

Boletín de problemas 7

Problema 1. Péndulo montado sobre un soporte elástico. Un collar de masa m se desliza sin fricción por una varilla rígida horizontal y es frenado por dos muelles idénticos con una constante de muelle k . Un péndulo formado por una barra rígida uniforme de longitud L y masa M está suspendido del collar por un pivote sin fricción.

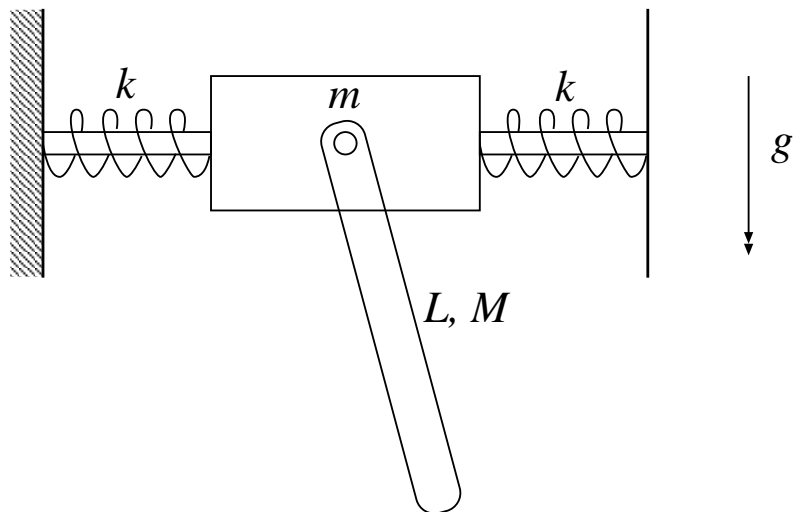


Figura 1: péndulo sujeto en una montura frenada por un muelle.

- Seleccione un conjunto completo e independiente de coordenadas generalizadas para este sistema.
- Derive las ecuaciones diferenciales de movimiento para estas coordenadas.

Problema 2. Estabilización de un balancín. Se construye un balancín con la forma del dibujo a partir de un bloque rectangular de metal de tamaño $2R \times 3R \times h$, donde h es la altura uniforme normal al dibujo. La densidad uniforme del material es ρ , masa por unidad de volumen.

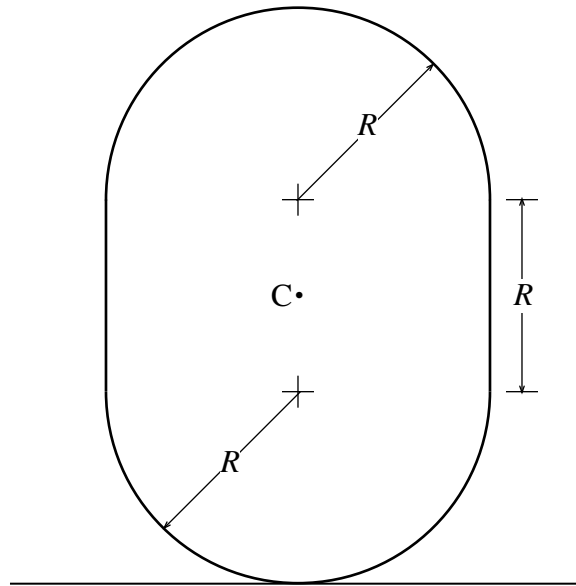
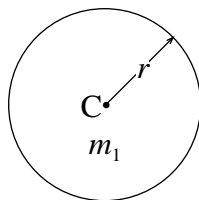
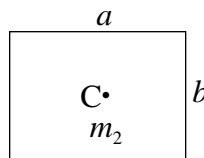


Figura 2: dimensiones del balancín.

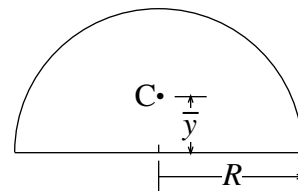
- (a) Exprese la masa M y el momento centroidal de inercia I_C del balancín en términos de los parámetros ρ , R , y h . En la figura 3 encontrará información que le será útil. En (i) el momento centroidal de inercia de un disco uniforme o un cilindro es $I_C = \frac{1}{2}m_1r^2$. En (ii) el momento centroidal de inercia de una placa uniforme rectangular es $I_C = \frac{1}{12}m_2(a^2 + b^2)$. En (iii) el centroide de un semicírculo se localiza a una distancia $\bar{y} = \frac{4}{3\pi}R$ por encima de la base.



(i)



(ii)



(iii)

Figura 3: consideraciones útiles acerca de las formas circulares y rectangulares.

- (b) Si el balancín está limitado a rodar sin deslizarse por el suelo, la posición recta que se muestra en la figura 2 es una posición de equilibrio. ¿Es este un equilibrio estable?

- (c) Para estabilizar el balancín, se propone aplicar una fuerza horizontal $f(t)$ al centroide del propio balancín, tal como se muestra en la figura 4. Derive una ecuación diferencial que describa como el ángulo de balanceo θ responde a la excitación $f(t)$.

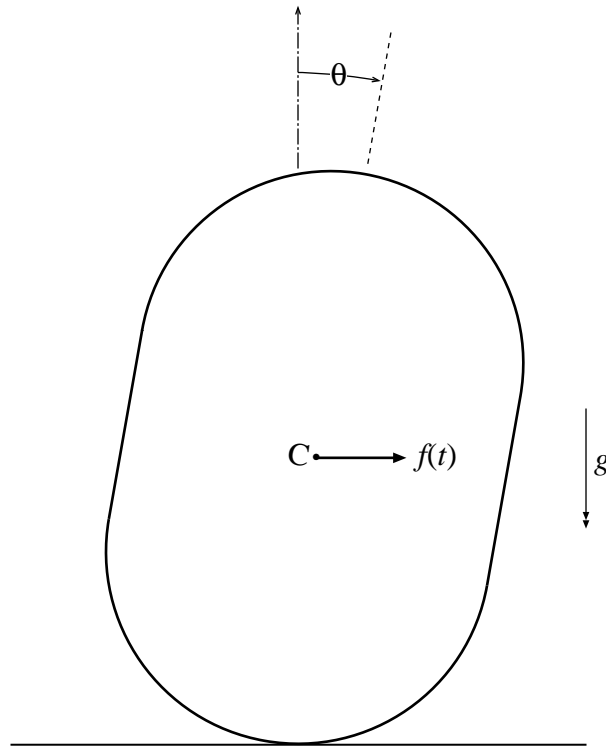


Figura 4: se aplica una fuerza $f(t)$ al balancín.

- (d) Linealice el resultado de (c) realizando las aproximaciones $\sin \theta \approx \theta$ y $\cos \theta \approx 1.0$. Transforme la ecuación diferencial del dominio de tiempo en una función de transferencia de $F(s)$ a $\Theta(s)$ en el dominio s de Laplace.
- (e) Se propone la construcción de la fuerza $f(t)$ para observar el ángulo θ , comparándolo con el ángulo deseado θ_d y utilizando la diferencia para generar la fuerza (mediante una unión accionada por un motor).

$$f(t) = K(\theta_d - \theta)$$

donde K es la ganancia efectiva, con las dimensiones de fuerza por radián. Transforme esta relación al dominio s - y únala al resultado de (d). Obtenga los polos de la función de transferencia de bucle cerrado des $\Theta_d(s)$ a $\Theta(s)$. ¿Para qué selección de valores de la ganancia K es estable el sistema de bucle cerrado?

Problema 3. Problema del valor propio. Dos masas se deslizan sin fricción por la varilla rígida horizontal sujetas por dos muelles con constante de muelle k .

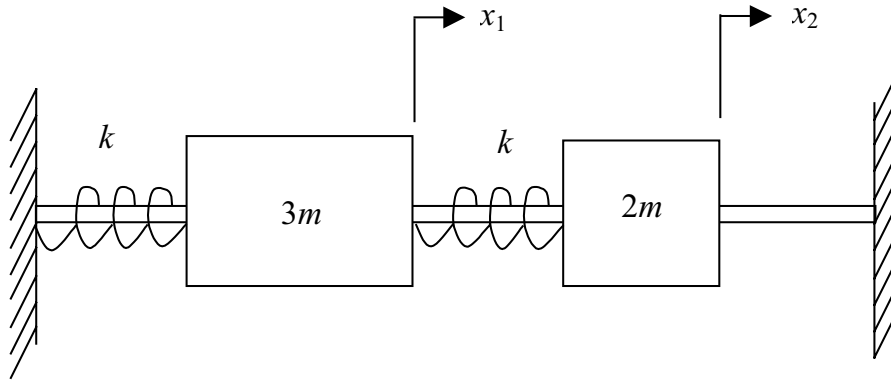


Figura 5: sistema vibratorio masa-muelle.

- (a) Formule las ecuaciones de movimiento para $x_1(t)$ y $x_2(t)$ en forma de ecuación diferencial matricial.
- (b) Derive un problema de valor propio de la forma:

$$[K]\{a\} = \omega^2[M]\{a\}$$

para modos naturales de la forma:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_1 \sin(\omega t + \phi) \\ a_2 \sin(\omega t + \phi) \end{Bmatrix}$$

- (c) Resuelva de forma analítica para las formas modales $\{a_1 \ a_2\}^T$ y valores propios ω_1^2 y ω_2^2 . Construya la *matriz modal* $[\Phi]$ cuyas columnas son los vectores de las formas modales.
- (d) Abra MATLAB y teclee el comando: *help eigen* para aprender acerca de las posibilidades de los valores propios de MATLAB. Aplique el comando $[V, D] = \text{EIG}(K, M)$ y compare las soluciones de propuestas por MATLAB a su solución anterior del apartado (c).