

## Soluciones para el boletín de problemas 7

**Problema 1. Péndulo montado sobre un soporte elástico.** Este problema es un ejercicio en la aplicación de los principios de momento. Aquí se describen dos soluciones posibles:

- (a) El sistema consta de dos cuerpos rígidos en movimiento plano. Si no hay restricciones habrá seis grados de libertad. Sin embargo, el carro  $m$  se desliza obligatoriamente a lo largo de la varilla, por lo que sólo tiene un grado de libertad indicado por el desplazamiento  $x$ . El extremo superior del péndulo  $M$  está forzosamente conectado al pivote B del carro, por lo que sólo tiene un grado adicional de libertad indicado por el ángulo  $\theta$ .

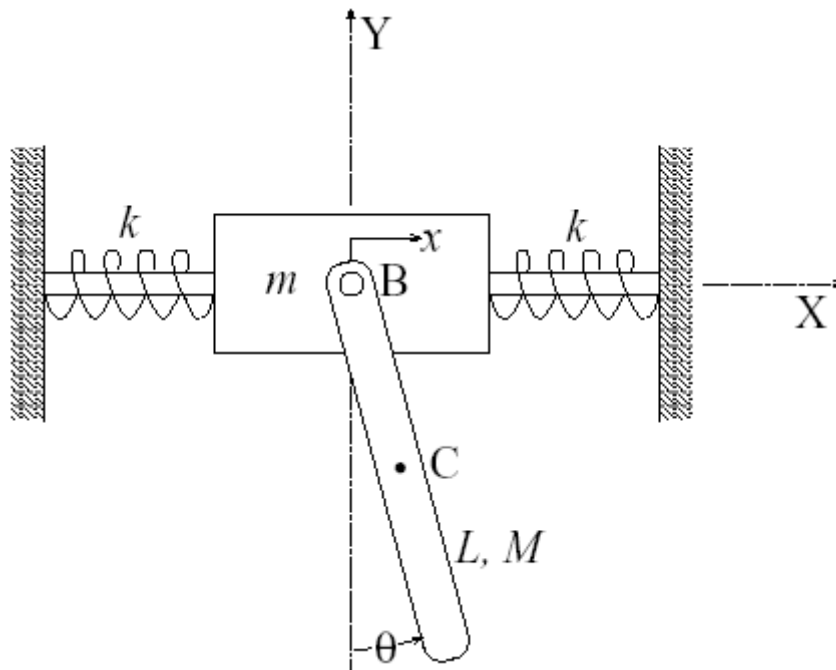


Figura 1: coordenadas generalizadas  $x$  y  $\theta$ .

Los desplazamientos del centro de masa C del péndulo se describen en relación al marco fijo de referencia XY, cuyo origen está en el centro de pivote B.

$$x_C = x + \frac{L}{2} \sin \theta \quad y \quad y_C = -\frac{L}{2} \cos \theta$$

Los componentes del momento lineal del péndulo son:

$$p_x = M\dot{x}_C = M\left(\dot{x} + \frac{L}{2}\dot{\theta} \cos \theta\right) \quad y \quad p_y = M\dot{y}_C = M\frac{L}{2}\dot{\theta} \sin \theta$$

El momento angular del péndulo sobre su centro de masa es:

$$H_C = I_C \omega = M \frac{L^2}{12} \dot{\theta}.$$

Las restricciones del carro  $m$  no permiten que exista un momento angular o lineal en la dirección  $Y$ . El momento lineal del carro en la dirección  $X$  es  $m\dot{x}$ .

- (b) Las ecuaciones de movimiento para las coordenadas generalizadas  $x$  y  $\theta$  se obtienen aplicando los principios de momento a los adecuados diagramas de cuerpo libre de las partes del sistema. En el primer enfoque, se escriben cuatro ecuaciones de momento: dos coordenadas generalizadas y dos fuerzas internas de reacción. Las fuerzas de reacción se eliminan después mediante manipulación algebraica para obtener dos ecuaciones diferenciales simultáneas para las coordenadas  $x$  y  $\theta$ . En el segundo enfoque, se obtienen directamente dos ecuaciones de movimiento para  $x$  y  $\theta$  seleccionando cuidadosamente cuerpos libres y principios de momento. En el segundo procedimiento, es necesario utilizar la ecuación generalizada de momento angular:

$$\sum \vec{\tau}_B = \frac{d\vec{H}_B}{dt} + \vec{v}_B \times \vec{P} \quad (1)$$

que se aplica cuando el centro de momento en movimiento B no es el centro de masa del sistema que se está estudiando.

- (i) El primer enfoque es más directo pero puede conllevar una considerable manipulación algebraica. Cada masa del sistema está aislada en diagramas de cuerpo libre independientes y, existen tantas ecuaciones de momento como componentes independientes de momento para esa masa. En la figura 2 se muestran los diagramas de cuerpo libre para el carro (a) y el péndulo (b). Observe que los componentes internos de la fuerza de reacción  $N$  y  $T$  en el pivote B en (b) son iguales y opuestos a aquellos en (a):

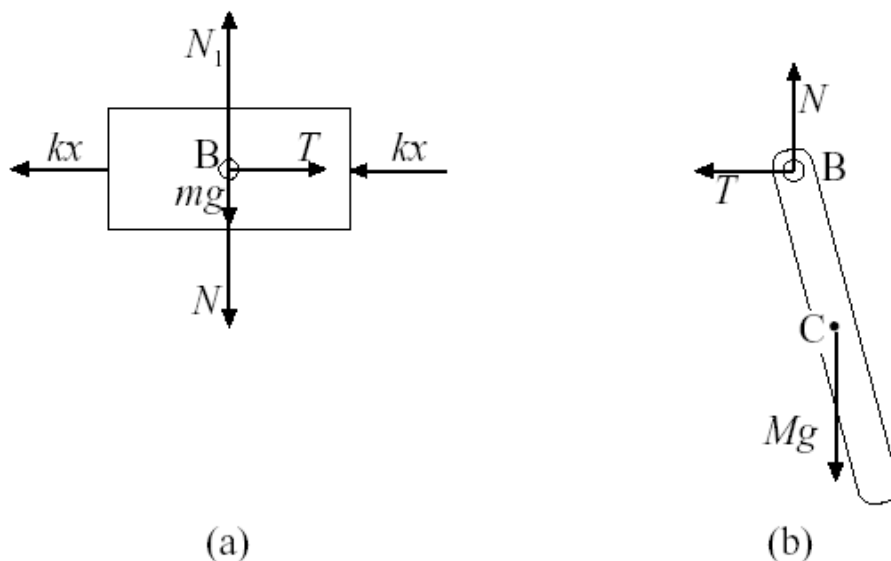


Figura 2: diagramas de cuerpo libre.

La reacción externa  $N_1$  en el carro  $m$  se aplica mediante la varilla que sostiene al carro. Si aplicamos el principio de momento lineal en la dirección horizontal del cuerpo libre en (a) obtenemos:

$$T - 2kx = \frac{dp_x}{dt} = m\ddot{x} \quad (2)$$

Dado que el carro no tiene momento vertical, el principio de momento en esa dirección se reduce a una relación de equilibrio,

$$N_1 = mg + N$$

que permite determinar la fuerza de reacción externa una vez halladas las fuerzas de reacción internas. Después volvemos al diagrama de cuerpo libre (b) de la figura 2 en el que tenemos tres componentes de momento: horizontal, vertical y angular sobre C, y aplicamos el principio de momento angular en la dirección horizontal para obtener:

$$-T = \frac{dp_x}{dt} = \frac{d}{dt}M(\dot{x} + \frac{L}{2}\dot{\theta} \cos \theta) = M[\ddot{x} + \frac{L}{2}(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta)] \quad (3)$$

A continuación, aplicamos el principio de momento lineal en la dirección vertical para obtener:

$$N - Mg = \frac{dp_y}{dt} = \frac{d}{dt}(M\frac{L}{2}\dot{\theta} \sin \theta) = M\frac{L}{2}(\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta) \quad (4)$$

y el principio de momento angular sobre C para obtener:

$$T\frac{L}{2} \cos \theta - N\frac{L}{2} \sin \theta = \frac{dH_C}{dt} = \frac{ML^2}{12}\ddot{\theta} \quad (5)$$

A estas alturas tenemos cuatro ecuaciones [(2), (3), (4), y (5)] para  $x$ ,  $\theta$ ,  $N$  y  $T$ . Nos queda eliminar las fuerzas de reacción internas  $N$  y  $T$  de estas cuatro ecuaciones para obtener dos ecuaciones independientes para las coordenadas generalizadas  $x$  y  $\theta$ . una de las ecuaciones se consigue insertando  $T$  de la ecuación (3) en (2) con el fin de obtener:

$$(M + m)\ddot{x} + 2kx + M\frac{L}{2}\ddot{\theta} \cos \theta - M\frac{L}{2}\dot{\theta}^2 \sin \theta = 0 \quad (6)$$

Obtenemos una segunda ecuación insertando los valores de  $T$  y  $N$  que nos proporcionan las ecuaciones (3) y (4) en (5) para obtener, después de una anulación considerable:

$$M\frac{L}{2}\ddot{x} \cos \theta + M\frac{L^2}{3}\ddot{\theta} + Mg\frac{L}{2} \sin \theta = 0 \quad (7)$$

Las ecuaciones (6) y (7) son las ecuaciones de movimiento deseadas para  $x$  y  $\theta$ .

- (ii) Una manera de eliminar las reacciones de fuerza interna es considerar *todo el sistema* como un cuerpo libre. Las reacciones internas aparecen en forma de pares iguales y opuestas fuerzas, por lo que no tienen ningún efecto en la dinámica del sistema. En la figura 3 se muestra un diagrama de cuerpo libre de todo el sistema:

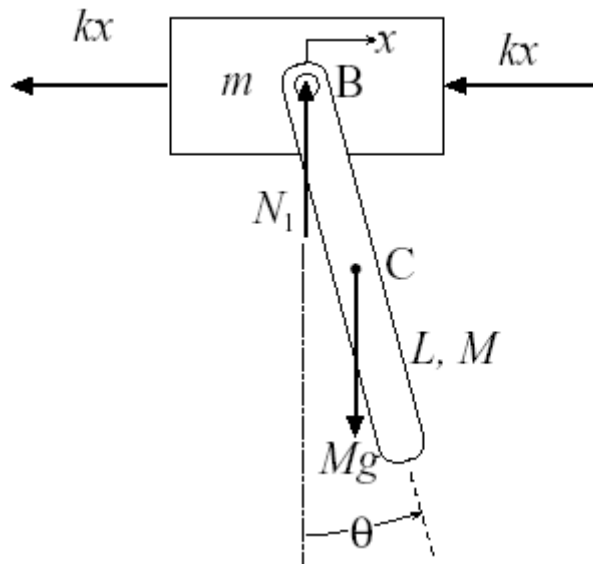


Figura 3: diagrama de cuerpo libre del carro más el péndulo.

La ecuación que se obtiene aplicando el principio de momento lineal en la dirección horizontal al cuerpo libre de la figura 3 es la siguiente:

$$\begin{aligned}
 -2kx &= \frac{d}{dt}(m\dot{x} + p_x) = \frac{d}{dt}\left[m\dot{x} + M\left(\dot{x} + \frac{L}{2}\dot{\theta} \cos \theta\right)\right] \\
 &= (M+m)\ddot{x} + M\frac{L}{2}(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta)
 \end{aligned}$$

que es equivalente a la Ec.(6) anterior.

Un segundo método para eliminar las fuerzas de reacción internas  $N$  y  $T$  consiste en volver al diagrama de cuerpo libre del péndulo  $M$  en la parte (b) de la figura 2 y observar que estas fuerzas de reacción no tienen torsión sobre sus puntos de aplicación B. Por tanto, consideramos que la aplicación de la ecuación generalizada de momento angular (1) es (b) en la figura 2. La única torsión ejercida en B se debe a la fuerza de la gravedad.

$$\vec{\tau}_B = -Mg\frac{L}{2} \sin \theta \vec{u}_z$$

El momento angular del péndulo sobre B es:

$$\begin{aligned}
 \vec{H}_B &= I_C \dot{\theta} \vec{u}_z + \vec{BC} \times \vec{P} = M \frac{L^2}{12} \dot{\theta} \vec{u}_z + \frac{L}{2} (\sin \theta \vec{u}_x - \cos \theta \vec{u}_y) \times (p_x \vec{u}_x + p_y \vec{u}_y) \\
 &= M \frac{L^2}{12} \dot{\theta} \vec{u}_z + \frac{L}{2} (\sin \theta \vec{u}_x - \cos \theta \vec{u}_y) \times M \left[ (\dot{x} + \frac{L}{2} \dot{\theta} \cos \theta) \vec{u}_x + (\frac{L}{2} \dot{\theta} \sin \theta) \vec{u}_y \right] \\
 &= \left[ ML^2 \dot{\theta} \left( \frac{1}{12} + \frac{1}{4} \sin^2 \theta + \frac{1}{4} \cos^2 \theta \right) + M \frac{L}{2} \dot{x} \cos \theta \right] \vec{u}_z = \left[ M \frac{L^2}{3} \dot{\theta} + M \frac{L}{2} \dot{x} \cos \theta \right] \vec{u}_z
 \end{aligned}$$

y el término adicional en la Ec.(1) es:

$$\vec{v}_B \times \vec{P} = \dot{x} \vec{u}_x \times (p_x \vec{u}_x + p_y \vec{u}_y) = \dot{x} p_y \vec{u}_z = M \frac{L}{2} \dot{\theta} \dot{x} \sin \theta \vec{u}_z$$

Por último, insertamos estos términos en la Ec. (1) y obtenemos:

$$-Mg \frac{L}{2} \sin \theta = \frac{d}{dt} \left[ M \frac{L^2}{3} \dot{\theta} + M \frac{L}{2} \dot{x} \cos \theta \right] + M \frac{L}{2} \dot{\theta} \dot{x} \sin \theta = M \frac{L^2}{3} \ddot{\theta} + M \frac{L}{2} \ddot{x} \cos \theta$$

que es equivalente a la Ec. (7) anterior.

**Comparación de los procedimientos (i) e (ii).** El primer método es directo, aunque puede resultar complicado eliminar las fuerzas de reacción superfluas si el sistema consta de numerosos cuerpos rígidos y sólo unas pocas coordenadas generalizadas independientes. En el caso del segundo método es necesario un análisis individual de la geometría de cada nuevo sistema para así identificar los cuerpos libres y los principios de momento que no introducen fuerzas de reacción superfluas. No es necesario utilizar tantas fórmulas algebraicas, no obstante, cada vez que se emplea una ecuación de momento angular generalizada (1) es necesario calcular dos productos vectoriales: el momento angular sobre el punto en movimiento B es  $\vec{H}_B = \vec{H}_C + \vec{BC} \times \vec{P}$  y el término adicional en (1) es  $\vec{v}_B \times \vec{P}$ . Dependiendo del sistema y de la propia experiencia, estos cálculos de producto vectorial pueden llevar más, o menos tiempo que las eliminaciones algebraicas necesarias en el primer procedimiento.

**Problema 2. Estabilización del balancín.** El balancín es un único cuerpo rígido, pero puede considerarse como un cuerpo formado por tres partes: dos formas semicirculares de masa  $m_1$  y una forma rectangular de masa  $m_2$ , tal como se muestra en la figura 1.

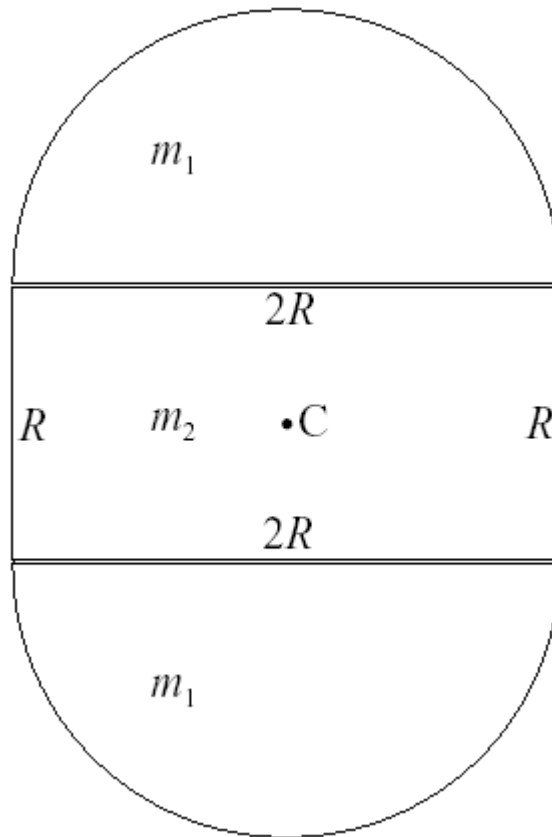


Figura 1: balancín formado por tres partes.

- (a) La masa de la parte semicircular es  $\rho h \pi R^2 / 2$  y la de la parte rectangular  $m_2 = 2 \rho h R^2$ , por lo que la masa total del balancín es:

$$M = 2m_1 + m_2 = \rho h \left( 2 \cdot \pi \frac{R^2}{2} + 2R^2 \right) = \rho h R^2 (\pi + 2)$$

Igualmente, el momento de inercia total del balancín sobre su centro de masa  $C$  es:

$$I_C = 2I_1 + I_2 \quad (1)$$

donde  $I_1$  es el momento de inercia de una de las partes semicirculares sobre  $C$ , y  $I_2$  el momento de inercia de la parte rectangular sobre  $C$ . Para la parte rectangular, el centroide del rectángulo es el propio  $C$ , por lo que:

$$I_2 = m_2 \frac{R^2 + (2R)^2}{12} = \frac{5}{12} m_2 R^2 = \frac{5}{6} \rho h R^4 \quad (2)$$

En el caso de las partes semicirculares, sus centroides  $C_1$  están separados del centroide  $C$  del balancín por una distancia  $R/2 + \bar{y}$ , tal como se muestra en la figura 2.

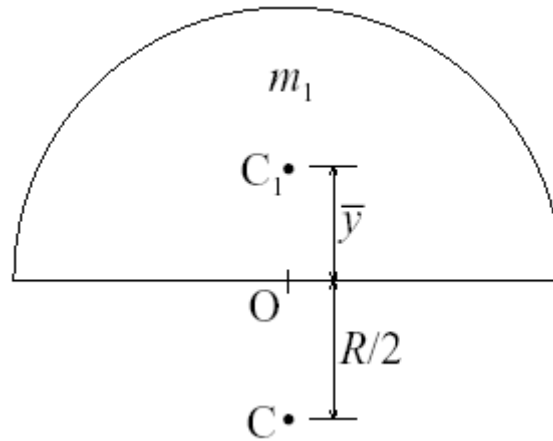


Figura 2:  $I_1$  es el momento de inercia de la parte circular sobre C.

El cálculo de  $I_1$  es un ejercicio para utilizar el *teorema del eje paralelo*. A partir de la figura 2 tenemos que:

$$I_1 = I_{C_1} + m_1\left(\frac{R}{2} + \bar{y}\right)^2$$

donde  $I_{C_1}$  es el momento de inercia de la parte semicircular sobre su propio centroide  $C_1$ , e  $\bar{y}$  viene dado por  $4R/3\pi$ . resulta bastante complicado calcular  $I_{C_1}$  por integración directa. Un procedimiento alternativo sería utilizar de nuevo el teorema del eje paralelo para relacionar  $I_{C_1}$  con el momento de inercia  $I_o$ , que se estudia fácilmente y es el momento de inercia de la parte semicircular sobre el centro O del círculo. El teorema del eje paralelo dicta que:

$$I_o = I_{C_1} + m_1\bar{y}^2 \quad \text{o} \quad I_{C_1} = I_o - m_1\bar{y}^2$$

Ahora  $I_o$  es una mitad del momento de inercia de un disco circular completo de radio  $R$  y masa  $2m_1$ , por lo que:

$$I_o = \frac{1}{2}(2m_1)\frac{R^2}{2} = m_1\frac{R^2}{2}$$

Trabajando hacia atrás a través de las ecuaciones anteriores encontramos lo siguiente:

$$I_{C_1} = m_1\left(\frac{R^2}{2} - \bar{y}^2\right)$$

y por tanto:

$$I_1 = m_1\left(\frac{R^2}{2} - \bar{y}^2 + \frac{R^2}{4} + R\bar{y} + \bar{y}^2\right) = m_1R^2\left(\frac{3}{4} + \frac{4}{3\pi}\right) = \left(\frac{3\pi}{8} + \frac{2}{3}\right)\rho hR^4 \quad (3)$$

Por último, insertamos las ecuaciones (2) y (3) en la (1) y obtenemos:

$$I_C = \left[ 2 \cdot \left( \frac{3\pi}{8} + \frac{2}{3} \right) + \frac{5}{6} \right] \rho h R^4 = \frac{9\pi + 26}{12} \rho h R^4 = \frac{9\pi + 26}{12(\pi + 2)} MR^2 = 0.88MR^2$$

- (b) Si el balancín se balancea a través de un ángulo pequeño lejos de la posición de equilibrio y, a continuación, deja de estar en posición de reposo, las fuerzas que actúan sobre él serán las que se muestran en la figura 3.

Se puede observar que la fuerza de la gravedad  $Mg$  ejerce una *molesta* torsión en el punto de contacto B. El equilibrio es inestable.

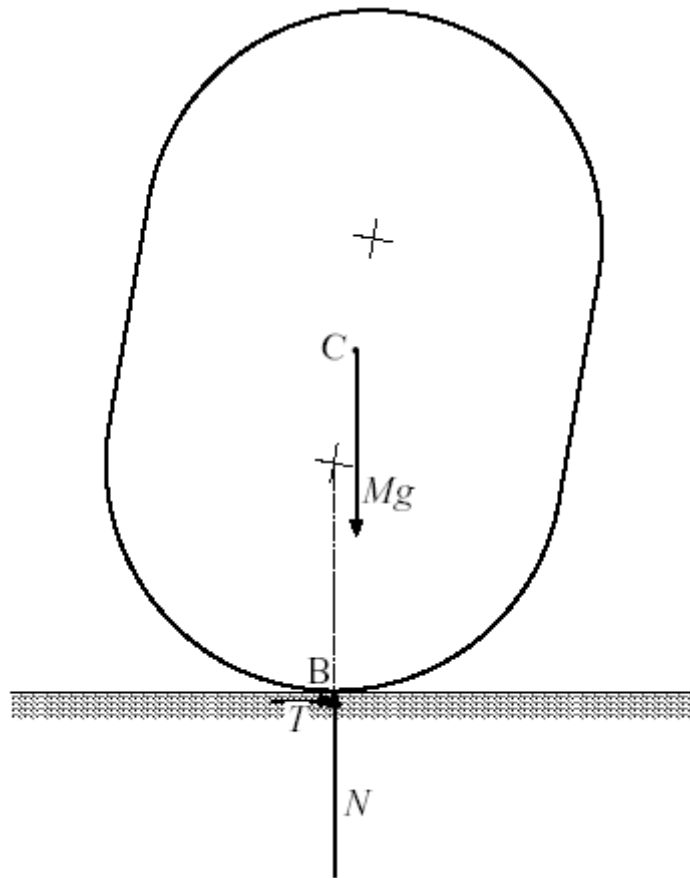


Figura 3: la posición recta de equilibrio es inestable.

- (c) Para derivar una ecuación diferencial que describa la respuesta  $\theta(t)$  a la excitación  $f(t)$ , estudiamos primero el movimiento rotatorio (véase la figura 4).

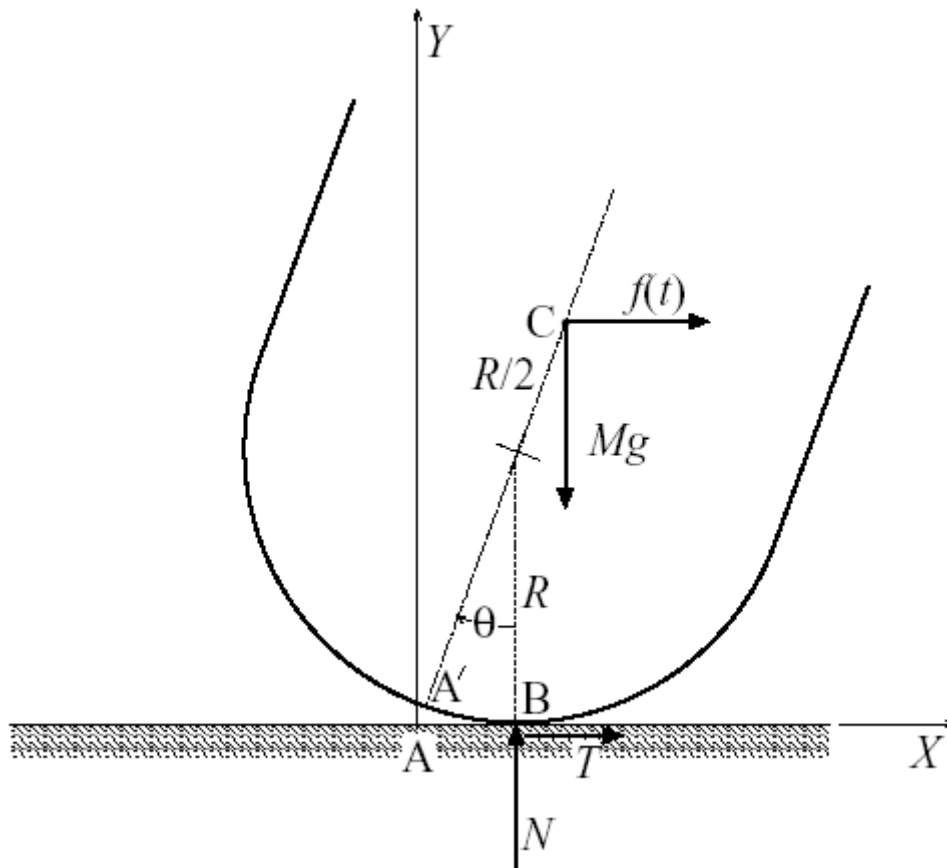


Figura 4: diagrama de cuerpo libre del balancín en rotación sin deslizamiento.

Debido a la restricción por la cual no se produce deslizamiento, para describir completamente la posición del balancín solo es necesaria la única coordenada generalizada  $\theta$ . Observe que el balancín se encuentra en posición recta de equilibrio cuando  $\theta = 0$ . La distancia AB recorrida en el suelo durante el rodamiento es igual al arco  $A'B = R\theta$  del balancín. Los componentes de desplazamiento del centro de masa C son:

$$x = R\theta + \frac{R}{2} \sin \theta \quad y \quad y = R + \frac{R}{2} \cos \theta$$

y los componentes de momento lineal del balancín son:

$$P_x = M\dot{x} = M(R\dot{\theta} + \frac{R}{2}\dot{\theta} \cos \theta) \quad y \quad P_y = M\dot{y} = -M\frac{R}{2}\dot{\theta} \sin \theta$$

El momento angular del balancín sobre su centro de masa C es:

$$H_C = I_C \omega = I_C \dot{\theta}$$

en el sentido de las agujas del reloj. En la figura 4 se muestran las fuerzas que actúan sobre el balancín: la fuerza de control  $f(t)$  y la fuerza de la gravedad  $Mg$ , que actúan sobre el centro de masa C, y los componentes de la fuerza de

reacción del suelo,  $N$  y  $T$ . A continuación se detallan dos procedimientos para obtener la ecuación de movimiento:

- (i) En el primer procedimiento, se escriben tres ecuaciones de momento que contienen las cantidades desconocidas  $\theta$ ,  $N$ , y  $T$ . A continuación, se eliminan las fuerzas de reacción mediante eliminación algebraica. Las tres ecuaciones representan: el principio de momento lineal aplicado en la dirección *horizontal*,

$$f(t) + T = \frac{dP_x}{dt} = M(R + \frac{R}{2} \cos \theta) \ddot{\theta} - M \frac{R}{2} \dot{\theta}^2 \sin \theta \quad (4)$$

el principio de momento lineal aplicado en la dirección *vertical*,

$$N - Mg = \frac{dP_y}{dt} = -M \frac{R}{2} (\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta) \quad (5)$$

y el principio de momento angular aplicado sobre el centro de masa C (en el sentido de las agujas del reloj),

$$N \frac{R}{2} \sin \theta - T(R + \frac{R}{2} \cos \theta) = \frac{dH_C}{dt} = I_C \ddot{\theta} \quad (6)$$

Nos queda eliminar de estas tres ecuaciones las fuerzas de reacción del suelo  $N$  y  $T$ . la Ec.(4) se resuelve fácilmente para  $T$ , y la Ec.(5) para  $N$ . Cuando se insertan estos valores en la parte izquierda de la Ec.(6) se obtiene una única ecuación larga, considerablemente simplificada, sobre la anulación de términos proporcionales a  $\sin \theta \cos \theta$ , y utilizando la identidad  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta$ . El resultado simplificado es:

$$[I_C + MR^2(\frac{5}{4} + \cos \theta)] \ddot{\theta} - M \frac{R^2}{2} \dot{\theta}^2 \sin \theta - Mg \frac{R}{2} \sin \theta = f(t)(R + \frac{R}{2} \cos \theta) \quad (7)$$

Esta es la ecuación de movimiento deseada.

- (ii) En el segundo procedimiento sólo se aplica un principio de momento. A partir de la figura 4 observamos no se introducirán las reacciones del suelo  $N$  y  $T$  si se aplica el principio de momento angular sobre el punto de contacto B. Puesto que B tiene una velocidad  $\vec{v}_B = R\dot{\theta}\vec{u}_x$ , es necesario utilizar la ecuación generalizada de momento angular:

$$\sum \vec{\tau}_B = \frac{d\vec{H}_B}{dt} + \vec{v}_B \times \vec{P} \quad (1)$$

La torsión sobre B es:

$$\sum \vec{\tau}_B = -f(t)(R + \frac{R}{2} \cos \theta) \vec{u}_z - Mg \frac{R}{2} \sin \theta \vec{u}_z$$

El momento angular sobre B es:

$$\vec{H}_B = \vec{H}_C + \vec{BC} \times \vec{P}$$

donde,

$$\vec{BC} = \frac{R}{2} \sin \theta \vec{u}_x + (R + \frac{R}{2} \cos \theta) \vec{u}_y \quad \vec{P} = P_x \vec{u}_x + P_y \vec{u}_y$$

por lo que,

$$\vec{BC} \times \vec{P} = [P_y \frac{R}{2} \sin \theta - P_x (R + \frac{R}{2} \cos \theta)] \vec{u}_z = M \dot{\theta} [ -(\frac{R}{2} \sin \theta)^2 - (R + \frac{R}{2} \cos \theta)^2 ] \vec{u}_z$$

Por consiguiente, el momento angular del balancín sobre B es:

$$\vec{H}_B = -[I_C \dot{\theta} + MR^2 \dot{\theta} (\frac{5}{4} + \cos \theta)] \vec{u}_z$$

y su derivada es:

$$\frac{d\vec{H}_B}{dt} = -\{[I_C + MR^2 (\frac{5}{4} + \cos \theta)] \ddot{\theta} - MR^2 \dot{\theta}^2 \sin \theta\} \vec{u}_z$$

El término adicional en la Ec. (1) es:

$$\vec{v}_B \times \vec{P} = R \dot{\theta} \vec{u}_x \times (P_x \vec{u}_x + P_y \vec{u}_y) = R \dot{\theta} P_y \vec{u}_z = -M \frac{R^2}{2} \dot{\theta}^2 \sin \theta \vec{u}_z$$

Por último, insertando estos términos en la Ec. (1) obtenemos:

$$-f(t)(R + \frac{R}{2} \cos \theta) \vec{u}_z - Mg \frac{R}{2} \sin \theta \vec{u}_z = -\{[I_C + MR^2 (\frac{5}{4} + \cos \theta)] \ddot{\theta} - MR^2 \dot{\theta}^2 \sin \theta\} \vec{u}_z - M \frac{R^2}{2} \dot{\theta}^2 \sin \theta \vec{u}_z$$

que es equivalente a la ecuación de movimiento (7) obtenida mediante el procedimiento del apartado (i).

$$[I_C + MR^2 (\frac{5}{4} + \cos \theta)] \ddot{\theta} - M \frac{R^2}{2} \dot{\theta}^2 \sin \theta - Mg \frac{R}{2} \sin \theta = f(t)(R + \frac{R}{2} \cos \theta) \quad (7)$$

- (d) La ecuación diferencial no lineal (7) puede linealizarse en la proximidad de la posición de equilibrio  $\theta = 0$  estableciendo que  $\sin \theta = \theta$  y  $\cos \theta = 1$  y rechazando los términos de orden superior en  $\theta$  y  $\dot{\theta}$ . Por ejemplo, el término proporcional a  $\dot{\theta}^2 \sin \theta$  en (7) es un término de tercer orden si lo comparamos con los términos de primer orden proporcionales a  $\theta$  y  $\ddot{\theta}$ , por lo que se omite en la aproximación lineal. La aproximación linealizada a (7) es:

$$(I_C + \frac{9}{4}MR^2)\ddot{\theta} - Mg\frac{R}{2}\theta = \frac{3R}{2}f(t) \quad (8)$$

Observe que el coeficiente de  $\ddot{\theta}$  se puede interpretar mediante el teorema del eje paralelo como el momento de inercia del balancín sobre su punto inferior  $A'$  más extremo.

$$I_{A'} = I_C + M(\frac{3R}{2})^2$$

la ecuación diferencial linealizada en el dominio de tiempo se puede transformar al dominio  $s$  de Laplace realizando las siguientes sustituciones:

$$\theta(t) \longrightarrow \Theta(s), \quad f(t) \longrightarrow F(s), \quad \text{y} \quad \frac{d}{dt} \longrightarrow s$$

la transformada de la Ec.(8) es:

$$(I_{A'}s^2 - Mg\frac{R}{2})\Theta(s) = \frac{3R}{2}F(s) \quad (9)$$

y la función de transferencia de  $F(s)$  a  $\Theta(s)$  es:

$$\frac{\Theta(s)}{F(s)} = \frac{\frac{3R}{2}}{I_{A'}s^2 - Mg\frac{R}{2}}$$

(e) La fuerza de control  $f(t)$  es descrita en el dominio de tiempo como:

$$f(t) = K[\theta_d(t) - \theta(t)]$$

En el dominio  $s$  se transforma en:

$$F(s) = K[\Theta_d(s) - \Theta(s)] \quad (10)$$

la fuerza de control se acopla al balancín insertando  $F(s)$  de la Ec. (10) en la Ec. (9) para obtener:

$$(I_{A'}s^2 - Mg\frac{R}{2})\Theta(s) = K\frac{3R}{2}[\Theta_d(s) - \Theta(s)]$$

o,

$$(I_{A'}s^2 + K\frac{3R}{2} - Mg\frac{R}{2})\Theta(s) = K\frac{3R}{2}\Theta_d(s)$$

La función de transferencia desde el ángulo deseado hasta el ángulo de respuesta real es:

$$\frac{\Theta(s)}{\Theta_d(s)} = \frac{K \frac{3R}{2}}{I_A s^2 + K \frac{3R}{2} - Mg \frac{R}{2}}$$

Los polos de la función de transferencia son las raíces de la ecuación:

$$s^2 = - \frac{(3K - Mg) \frac{R}{2}}{I_A}$$

Si  $s^2$  es negativo, los polos se ubican en el eje imaginario del plano  $s$ , y los movimientos naturales del sistema son oscilaciones delimitadas. Sin embargo, si  $s^2$  es positivo, uno de los polos es real y positivo, lo cual indica que uno de los movimientos naturales supone un crecimiento exponencial. El límite entre la estabilidad y la inestabilidad está en  $s^2 = 0$ , cuando la ganancia  $K$  tiene un valor:

$$K = \frac{Mg}{3}$$

El sistema es inestable para valores inferiores de  $K$ , y estable para valores superiores.

### Problema 3. Problema del valor propio.

Las ecuaciones de movimiento se obtienen aplicando el principio de momento lineal a cada una de las masas sucesivamente. La tensión  $kx_1$  actúa sobre la masa  $3m$  en dirección a la izquierda, y la tensión  $k(x_2 - x_1)$  lo hace en dirección a la derecha, por lo que:

$$-kx_1 + k(x_2 - x_1) = \frac{d}{dt}(3m\dot{x}_1) = 3m\ddot{x}_1$$

La tensión  $k(x_2 - x_1)$  actúa sobre la masa  $2m$  en dirección a la izquierda, por lo tanto:

$$-k(x_2 - x_1) = \frac{d}{dt}(2m\dot{x}_2) = 2m\ddot{x}_2$$

(a) Estas ecuaciones se pueden escribir en forma matricial:

$$- \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 3m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

(b) Se espera que las vibraciones libres no amortiguadas tengan la siguiente forma:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \sin(\omega t + \phi)$$

Cuando esta solución de prueba se inserta en la Ec. (1), el resultado es el problema de valor propio,

$$\begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} 3m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \quad (2)$$

para las formas de modo natural  $\{a_1 \ a_2\}^T$  y las frecuencias naturales  $\omega^2$ .

(c) la solución analítica del problema de valor propio se obtiene desplazando todos los términos de la Ec. (2) a la izquierda de la ecuación,

$$\begin{bmatrix} 2k - 3m\omega^2 & -k \\ -k & k - 2m\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3)$$

y estableciendo el determinante de la matriz en cero para obtener la ecuación característica:

$$2k^2 - 7km\omega^2 + 6m^2\omega^4 - k^2 = k^2 - 7km\omega^2 + 6m^2\omega^4 = (k - m\omega^2)(k - 6m\omega^2) = 0$$

Las raíces de la ecuación característica son los valores propios:

$$\omega_1^2 = \frac{1}{6} \frac{k}{m} \quad \text{y} \quad \omega_2^2 = \frac{k}{m}$$

Los modos naturales correspondientes se obtienen volviendo a sustituir los valores propios en la Ec. (3). Cuando se inserta  $\omega_1^2 = \frac{1}{6} \frac{k}{m}$  en la Ec. (3) el resultado es el siguiente:

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2}k & -k \\ -k & \frac{2}{3}k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

lo que indica que la primera forma de modo puede representarse mediante el vector modal:

$$\{a\}_1 = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix} 2/3 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Cuando insertamos  $\omega_1^2 = \frac{k}{m}$  en la Ec. (3) el resultado es:

$$\begin{bmatrix} -k & -k \\ -k & -k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

lo que indica que la segunda forma de modo puede representarse mediante el vector modal:

$$\{a\}_2 = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix}_2 = \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

La matriz modal  $[\Phi]$  tiene los modos individuales en forma de columnas, de forma que:

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 2/3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- (d) MATLAB no se puede utilizar para dimensiones. Para utilizar MATLAB, debemos transformar el problema del valor propio (2) en un problema adimensional agrupando todos los parámetros dimensionales en un parámetro no dimensional  $\tilde{e}$  para obtener:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix}$$

donde,

$$\lambda = \frac{m\omega^2}{k}$$

Para resolver el problema del valor propio con ayuda de MATLAB sólo es necesario introducirle las matrices no dimensionales  $[K]$  y  $[M]$  y, a continuación, teclear la orden  $[V, D] = \text{eig}(K, M)$ .

A continuación, incluimos la sesión completa de MATLAB:

```
K = [ 2 -1 ; -1 1 ] ; M = [ 3 0 ; 0 2 ] ;
[V, D] = eig( K, M )
```

V =

```
0.7071    0.5547
-0.7071    0.8321
```

D =

```
1.0000    0
0         0.1667
```

Observe que MATLAB lista el valor propio mayor en primer lugar, lo cual es lo opuesto a las convenciones generales de ingeniería que denominan al modo con la frecuencia natural *inferior* el *primer* modo. Observe además que MATLAB gradúa sus vectores modales de forma que la suma de los cuadrados de todos los elementos sea unitaria. Esto difiere de la tradición en ingeniería de graduar el vector modal de forma que el *elemento mayor* sea unitario.