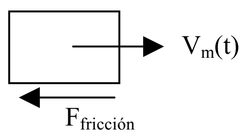
Soluciones del boletín de problemas 1

1.



$$m\frac{dv_m}{dt} = f_{fricción} = -Bv_m$$

$$v_m = v_0 e^{-\frac{B}{m}t}$$

Constante de tiempo $=\dfrac{m}{B}$

$$m = 10kg,\ v_m = \frac{1}{2}v_0\ en\ t = 5\,\text{seg}$$

$$\frac{1}{2}v_0 = v_0 e^{-\frac{B}{10}5}$$

$$B = 1.386$$

2.

$$T_{fricción} = \frac{d}{2} f_{fricción} = \frac{d}{2} B \frac{d}{2} \Omega = B \frac{d^2}{4} \Omega = K_B \Omega, \; donde K_B = B \frac{d^2}{4}$$

$$T_{entrada} = K_i I_s(t), \; donde \; K_i \; es \; constante$$

$$T_{entrada} - T_{fricción} = J \frac{d\Omega}{dt}$$

$$J \frac{d\Omega}{dt} + K_B \Omega = K_i I_s(t)$$

La entrada I_s se puede representar como:

$$I_s(t) = \frac{I_m}{T} t - \frac{I_m}{T} (t - T) u(t - T)$$

Considere la transformada de Laplace , $L[f(t-T)1(t-T)] = e^{-Ts} F(s)$.

Mediante la transformada de Laplace,

$$I_s(s) = K_i \frac{I_m}{T} \frac{1}{s^2} [1 - e^{-Ts}]$$

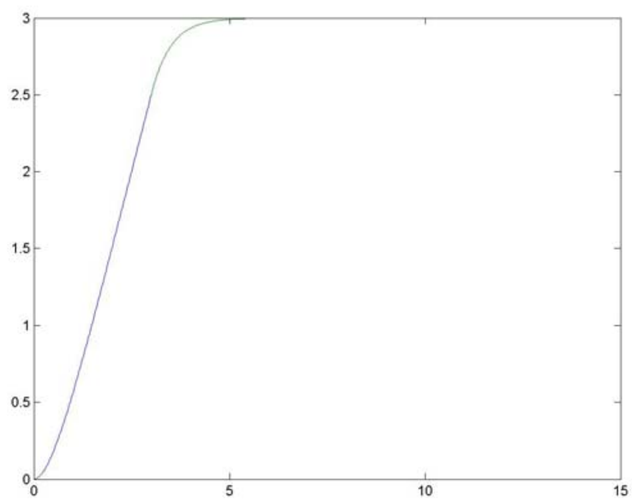
$$\Omega(s) = K_i \frac{I_m}{T} \frac{1}{s^2 (Js + K_B)} [1 - e^{-Ts}]$$

Utilizando la fracción parcial y la transformada inversa de Laplace, podemos obtener:

$$\Omega(t) = \frac{K_i I_m}{T K_B} [(-\frac{J}{K_B} + t + \frac{J}{K_B} e^{-\frac{K_B}{J} t}) - (-\frac{J}{K_B} + t - T + \frac{J}{K_B} e^{-\frac{K_B}{J}(t-T)}) u(t-T)]$$

Constante de tiempo: $\frac{J}{K_B}$.

Basándonos en la ecuación anterior, podemos dibujar una gráfica con la constante de tiempo =0.5.



3.

$$\tau_s \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{d\varphi}{dt} = K_v v_1$$

$$v_\varphi = k_\varphi \varphi$$

$$v_1 = K(v - v_\varphi)$$

a) Sustituya una vez todas las ecuaciones

$$\tau_s \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{d\varphi}{dt} + K_v K k_\varphi \varphi = K_v K v$$

b) En estado estacionario

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0 \quad y \quad \frac{d\varphi}{dt} = 0$$

$$\frac{\varphi}{v} = \frac{1}{k_\varphi}$$

c)

$$\frac{\varphi(s)}{v(s)} = \frac{K_v K}{\tau_s s^2 + s + K_v K k_\varphi} = (\frac{1}{k_\varphi})\frac{K_v K k_\varphi/\tau_s}{s^2 + (1/\tau_s)s + (K_v K k_\varphi/\tau_s)}$$

$w_n{}^2 = K_v K k_\varphi/\tau_s$, $w_n = \sqrt{K_v K k_\varphi/\tau_s}$ *: frecuencia natural no amortiguada*

$2\xi w_n = 1/\tau_s$, $\xi = \dfrac{1}{2w_n\tau_s} = \dfrac{1}{2\tau_s\sqrt{K_v K k_\varphi/\tau_s}}$ *: relación de amortiguación*

d)

En una amortiguación crítica no existe sobreexceso ni vía rápida. Por tanto, ξ debería ser 1.

$$\xi = \frac{1}{2w_n\tau_s} = \frac{1}{2\tau_s\sqrt{K_v K k_\varphi/\tau_s}} = 1$$

$$K = \frac{1}{4K_v k_\varphi \tau_s}$$

$$\varphi(t) = \frac{1}{k_\varphi}[1 - e^{-w_n t}(1 + w_n t)]$$

$w_n = \sqrt{K_v K k_\varphi/\tau_s} = 1/\tau_s$, *cuando* $K = \dfrac{1}{4K_v k_\varphi \tau_s}$

$$(\varphi)_{t\to\infty} = \frac{1}{k_\varphi}$$

$$0.9 = 1 - e^{-w_n T}(1 + w_n T) = 1 - e^{-\frac{T}{\tau_s}}(1 + \frac{T}{\tau_s})$$

A partir de la ecuación anterior, calculamos T. $T/\tau_s \approx 3.9$