

Soluciones del boletín de problemas 6

Problema 1. Varilla deslizándose por una pared. Dado que los extremos de la varilla están forzados a permanecer en contacto con la pared y el suelo, la varilla se localiza completamente proporcionando el ángulo θ entre la varilla y la vertical. De esta forma, el sistema tiene un grado de libertad y θ es una coordenada generalizada idónea para describir la configuración del sistema.

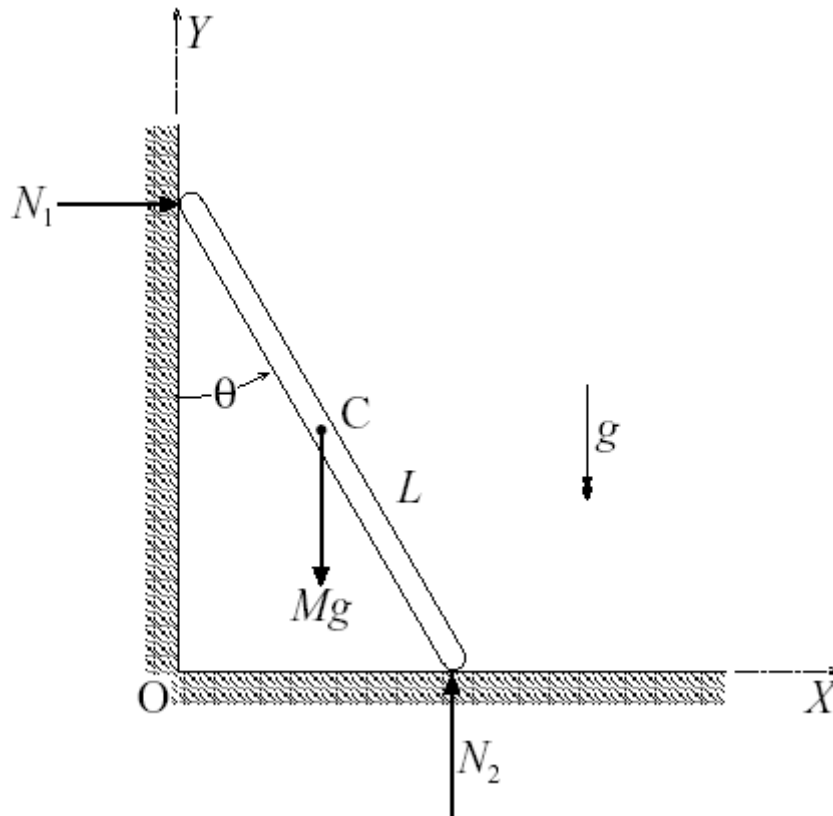


Figura 1: diagrama de cuerpo libre con coordenada generalizada θ .

Los componentes de desplazamiento del centro de masa C respecto al marco de referencia XOY son:

$$x = \frac{L}{2} \sin \theta \quad \text{y} \quad y = \frac{L}{2} \cos \theta$$

y los componentes de la velocidad lineal del centro de masa son:

$$\dot{x} = \frac{L}{2} \dot{\theta} \cos \theta \quad \text{y} \quad -\frac{L}{2} \dot{\theta} \sin \theta$$

La velocidad angular de la varilla es $\omega = \dot{\theta}$ en sentido contrario a las agujas del reloj. En la figura 1 se indican las fuerzas externas que actúan sobre la varilla: la fuerza de gravedad resultante Mg , y las reacciones del suelo y la pared. Puesto que no existe fricción, estas reacciones, N_1 y N_2 , son *normales* a las superficies. Se puede derivar la ecuación de movimiento aplicando los principios de momento lineal en las direcciones X e Y , y el principio de momento angular sobre el centro de masa C , y eliminando, a continuación, las fuerzas de reacción N_1 y N_2 de estas tres ecuaciones mediante manipulación algebraica. Este es el procedimiento más directo y el que describiremos en primer lugar y, seguidamente, describiremos un segundo procedimiento sofisticado que sólo requiere la sencilla aplicación del principio de momento angular sobre un punto especial B en movimiento.

- (i) Si se aplica el principio de momento lineal a la varilla de la figura 1 se obtiene:

$$N_1 = \frac{d}{dt} \left(M \frac{L}{2} \dot{\theta} \cos \theta \right) = M \frac{L}{2} (\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) \quad (1)$$

en la dirección X , y:

$$N_2 - Mg = \frac{d}{dt} \left(-M \frac{L}{2} \dot{\theta} \sin \theta \right)$$

o,

$$N_2 = Mg - M \frac{L}{2} (\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta) \quad (2)$$

El momento de inercia de la varilla sobre su centro de masa C es $I_C = ML^2/12$. Aplicando el principio de momento angular sobre el centro de masa C se obtiene:

$$N_2 \frac{L}{2} \sin \theta - N_1 \frac{L}{2} \cos \theta = \frac{d}{dt} \left(M \frac{L^2}{12} \dot{\theta} \right) = M \frac{L^2}{12} \ddot{\theta} \quad (3)$$

Obtenemos una única ecuación para θ sustituyendo N_1 de la ecuación (1) y N_2 de la ecuación (2) en la ecuación (3) para obtener:

$$\frac{L}{2} \sin \theta \left[Mg - M \frac{L}{2} (\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta) \right] - \frac{L}{2} \cos \theta \left[M \frac{L}{2} (\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) \right] = M \frac{L^2}{12} \ddot{\theta}$$

Después de anular los términos $\dot{\theta}^2$ y dividirlos por ML^2 , la ecuación queda reducida a:

$$\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4} \sin^2 \theta + \frac{1}{4} \cos^2 \theta \right) \ddot{\theta} = \frac{g}{2L} \sin \theta \quad \text{o,} \quad \ddot{\theta} - \frac{3g}{2L} \sin \theta = 0 \quad (4)$$

que es la ecuación de movimiento deseada.

- (ii) Para el segundo procedimiento es necesario un estudio en mayor profundidad de la geometría y conocer la ecuación generalizada de momento angular:

$$\sum \vec{\tau}_{ext} = \frac{d}{dt}(\vec{H}_B) + \vec{v}_B \times \vec{P} \quad (5)$$

La ventaja de este segundo procedimiento es que la ecuación de movimiento deseada se obtiene a partir de una sencilla aplicación de la ecuación (5).

Cuando la varilla AD de longitud L de la figura 3 resbala por la pared, es siempre una diagonal del rectángulo ABDO. La naturaleza del movimiento queda clara cuando nos damos cuenta de que la otra diagonal OB del mismo rectángulo también tiene una longitud L y gira en dirección a las agujas del reloj a la misma velocidad $\omega = \dot{\theta}$ que la varilla AD gira en sentido contrario a las agujas del reloj. Las dos diagonales tienen el mismo punto medio C. Por lo tanto, queda claro que la trayectoria del centro de masa C de la varilla es un arco circular de radio $L/2$. La velocidad lineal de C es dirigida tangencialmente alrededor de este arco y tienen una magnitud $v_C = L\dot{\theta}/2$.

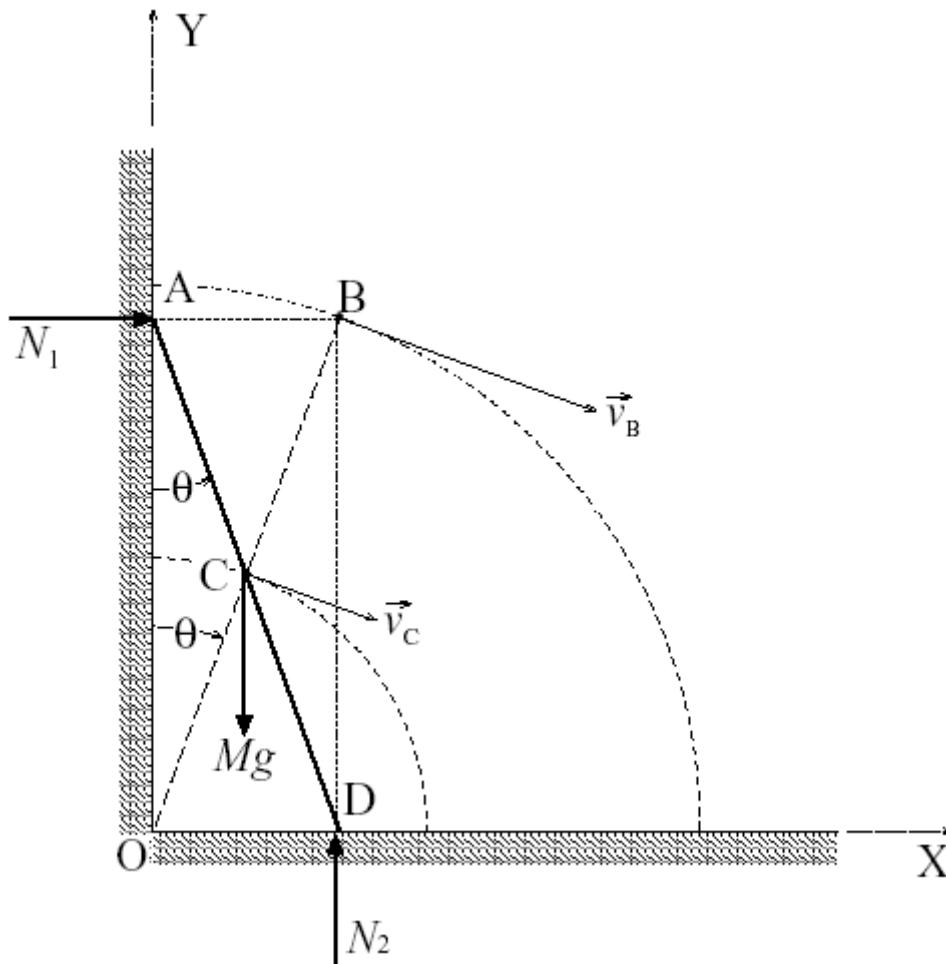


Figura 2: estudio de los movimientos de los puntos C y B.

Observe además que el punto B, que se encuentra en la intersección de las líneas de acción de las fuerzas de reacción N_1 y N_2 , viaja en un círculo de radio L . La velocidad de B es siempre paralela a la velocidad de C y $\vec{v}_B = 2\vec{v}_C$.

Las necesidades de momento de este sistema se satisfacen, económicamente, aplicando el principio de momento angular sobre el punto B en movimiento. Las reacciones N_1 y N_2 no tienen momento sobre B. El momento angular de la varilla sobre B es:

$$H_B = I_C \omega + \vec{BC} \times \vec{P} = M \frac{L^2}{12} \dot{\theta} + \frac{L}{2} \left(M \frac{L}{2} \dot{\theta} \right) = M \frac{L^2}{3} \dot{\theta}$$

La torsión externa total sobre B que actúa en la varilla se debe a la gravedad:

$$\sum \tau_{\text{ext}} = Mg \frac{L}{2} \sin \theta$$

Por tanto, puesto que la velocidad \vec{v}_B de B es paralela al momento lineal $\vec{P} = M\vec{v}_C$, la ecuación general de momento angular (5) se reduce a:

$$Mg \frac{L}{2} \sin \theta = \frac{d}{dt} \left(M \frac{L^2}{3} \dot{\theta} \right) \quad \text{o,} \quad \ddot{\theta} - \frac{3g}{2L} \sin \theta = 0$$

que es la ecuación de movimiento deseada.

Problema 2. Un disco desequilibrado rueda por una pendiente. Los ejes X e Y se disponen con el eje X a lo largo del plano inclinado. El disco sin masa que tiene incrustada la partícula m se comporta casi como los cuerpos rígidos: tiene una masa m , y un centro de masa C en la ubicación de la partícula, pero, puesto que toda la masa se concentra en C, tiene la propiedad especial de que $I_C = 0$. La ecuación de movimiento se derivará siguiendo dos procedimientos distintos. En el primer procedimiento, se utilizarán dos ecuaciones de momento lineal y una de momento angular para eliminar las fuerzas de reacción N y T . En el segundo procedimiento, la ecuación de movimiento se obtiene directamente a partir de una sencilla aplicación del principio momento angular.

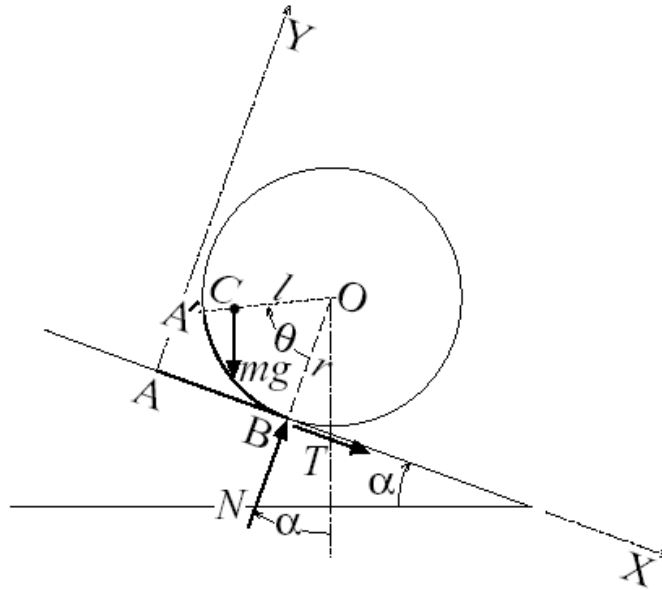


Figura 3: diagrama de cuerpo libre de un disco que rueda por una pendiente.

- (i) Al estudiar el movimiento, observamos que la distancia AB rodada por la pendiente debe ser igual al arco $A'B = r\theta$ en el caso de que no exista deslizamiento. Los componentes de desplazamiento x e y de la partícula m , ubicados en el punto C, son:

$$x = r\theta - l \sin \theta \quad \text{y} \quad y = r - l \cos \theta$$

y, por diferenciación, los componentes de velocidad son:

$$\dot{x} = r\dot{\theta} - l\dot{\theta} \cos \theta \quad \text{y} \quad \dot{y} = l\dot{\theta} \sin \theta$$

Como resultado, los componentes de momento lineal son:

$$P_x = m(r\dot{\theta} - l\dot{\theta} \cos \theta) \quad \text{y} \quad P_y = ml\dot{\theta} \sin \theta$$

Las fuerzas que actúan en el disco son: la fuerza de la gravedad mg y las fuerzas de reacción N y T que se muestran en la figura 3. El principio de momento lineal requiere:

$$T + mg \sin \alpha = \frac{dP_x}{dt} = m(r\ddot{\theta} - l\ddot{\theta} \cos \theta + l\dot{\theta}^2 \sin \theta)$$

o,

$$T = m(r\ddot{\theta} - l\ddot{\theta} \cos \theta + l\dot{\theta}^2 \sin \theta - g \sin \alpha) \quad (1)$$

en la dirección x , y :

$$N - mg \cos \theta = \frac{dP_y}{dt} = m(l\ddot{\theta} \sin \theta + l\dot{\theta}^2 \cos \theta)$$

o,

$$N = m(l\ddot{\theta} \sin \theta + l\dot{\theta}^2 \cos \theta + g \cos \alpha) \quad (2)$$

en la dirección y . Puesto que el momento de inercia sobre el punto C desaparece, el principio de momento angular requiere que la suma de las torsiones externas sobre C desaparezca también.

$$\sum \tau_C = Nl \sin \theta + T(r - l \cos \theta) = 0 \quad (3)$$

Las tres ecuaciones anteriores son ecuaciones para N , T , y θ . La ecuación de movimiento para θ se halla eliminando las fuerzas de reacción N y T . Insertando T de la ecuación (1) y N de la ecuación (2) en la ecuación (3), obtenemos:

$$m(l\ddot{\theta} \sin \theta + l\dot{\theta}^2 \cos \theta + g \cos \alpha)l \sin \theta + m(r\ddot{\theta} - l\ddot{\theta} \cos \theta + l\dot{\theta}^2 \sin \theta - g \sin \alpha)(r - l \cos \theta) = 0$$

que simplifica la ecuación de movimiento deseada.

$$(r^2 + l^2 - 2rl \cos \theta)\ddot{\theta} + rl\dot{\theta}^2 \sin \theta + g[l \sin(\alpha + \theta) - r \sin \alpha] = 0$$

- (ii) En el segundo procedimiento, las fuerzas de reacción N y T no intervienen en ningún momento ya que el principio de momento angular se aplica sobre el punto de contacto B. Estas fuerzas se aplican en B, por lo que no ejercen torsión sobre B. Para aplicar el principio de momento angular sobre un punto B en movimiento, es necesario utilizar el vector general:

$$\sum \vec{\tau}_B = \frac{d}{dt}(\vec{H}_B) + \vec{v}_B \times \vec{P} \quad (4)$$

(Observación sobre la notación vectorial. Generalmente, los vectores son representados en documentos mediante símbolos en negrita, símbolos subrayados o mediante flechas sobre símbolos, como \vec{f} . Por ejemplo, la velocidad de un vector se representa mediante \mathbf{v} , o \underline{v} , o \vec{v} . En los cálculos vectoriales es conveniente utilizar vectores unitarios alineados con un sistema de coordenadas cartesianas. Estos vectores unitarios se representan mediante los símbolos i , j , y k ; los símbolos \underline{e}_x , \underline{e}_y , y \underline{e}_z ; o \vec{u}_x , \vec{u}_y , y \vec{u}_z . En este boletín de soluciones se emplea la flecha sobre la notación).

$$\sum \vec{\tau}_B = \frac{d}{dt}(\vec{H}_B) + \vec{v}_B \times \vec{P} \quad (4)$$

En el presente problema, la única torsión sobre B se debe a la fuerza de la gravedad mg . En la figura 3 se observa que el brazo de palanca para la fuerza de gravedad es el desplazamiento horizontal entre los puntos C y B. Esta es la diferencia entre el

desplazamiento horizontal de C desde O [$l \sin(\alpha + \theta)$] y el desplazamiento horizontal de B desde O ($r \sin \alpha$). La torsión de gravedad en sentido contrario a las agujas del reloj se representa mediante el vector:

$$\vec{\tau}_B = mg[l \sin(\alpha + \theta) - r \sin \alpha] \vec{u}_z \quad (5)$$

El momento angular \vec{H}_B de la partícula m es el momento del momento lineal \vec{P} sobre B. Ahora:

$$\vec{H}_B = \vec{BC} \times \vec{P}$$

donde,

$$\vec{BC} = -l \sin \theta \vec{u}_x + (r - l \cos \theta) \vec{u}_y$$

y,

$$\vec{P} = P_x \vec{u}_x + P_y \vec{u}_y = m(r\dot{\theta} - l\dot{\theta} \cos \theta) \vec{u}_x + ml\dot{\theta} \sin \theta \vec{u}_y$$

por lo que, (recuerde que el producto vectorial de $\vec{A} = a_x \vec{u}_x + a_y \vec{u}_y$ y $\vec{B} = b_x \vec{u}_x + b_y \vec{u}_y$ es $\vec{A} \times \vec{B} = (a_x b_y - a_y b_x) \vec{u}_z$)

$$\vec{H}_B = -m[l^2 \sin^2 \theta + (r - l \cos \theta)^2] \dot{\theta} \vec{u}_z = -m(r^2 + l^2 - 2rl \cos \theta) \dot{\theta} \vec{u}_z$$

y,

$$\frac{d\vec{H}_B}{dt} = -m(r^2 + l^2 - 2rl \cos \theta) \ddot{\theta} + 2mrl\dot{\theta}^2 \vec{u}_z \quad (6)$$

El último término de la Ec.(4) es el producto vectorial de la velocidad \vec{v}_B del punto de contacto B y el momento lineal \vec{P} de la partícula m incrustada en el disco sin masa. Dado que:

$$\vec{v}_B = r\dot{\theta} \vec{u}_x \quad \text{y} \quad \vec{P} = m(r\dot{\theta} - l\dot{\theta} \cos \theta) \vec{u}_x + ml\dot{\theta} \sin \theta \vec{u}_y$$

el producto vectorial es:

$$\vec{v}_B \times \vec{P} = mrl\dot{\theta}^2 \sin \theta \vec{u}_z \quad (7)$$

Por último, si se insertan los términos (5), (6), y (7) en la Ec.(4) se obtiene la ecuación de movimiento deseada:

$$(r^2 + l^2 - 2rl \cos \theta) \ddot{\theta} + rl\dot{\theta}^2 \sin \theta + g[l \sin(\alpha + \theta) - r \sin \alpha] = 0$$

Problema 3. Modelo mecánico de un andador sobre cuerda floja.

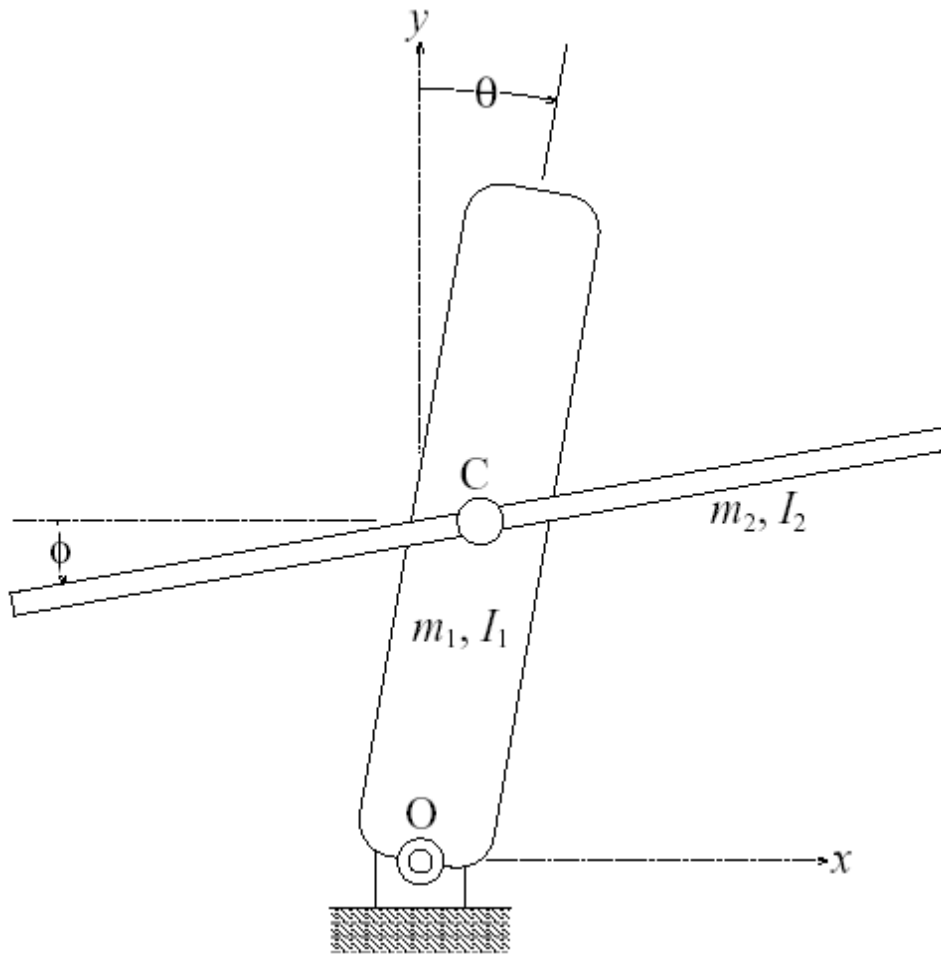


Figura 4: modelo mecánico de un andador sobre cuerda floja.

(a) La longitud OC es a . Las coordenadas de C en el marco Oxy son:

$$x = a \sin \theta \quad \text{y} \quad y = a \cos \theta$$

Los componentes de desplazamiento y velocidad de C que son correctos para primer orden en el ángulo pequeño θ , son:

$$x = a\theta$$

$$y = a$$

y,

$$v_x = \dot{x} = a\dot{\theta}$$

$$v_y = \dot{y} = 0$$

(b) En la figura 5 se muestra un diagrama de cuerpo libre del cuerpo rígido que representa al ejecutante.

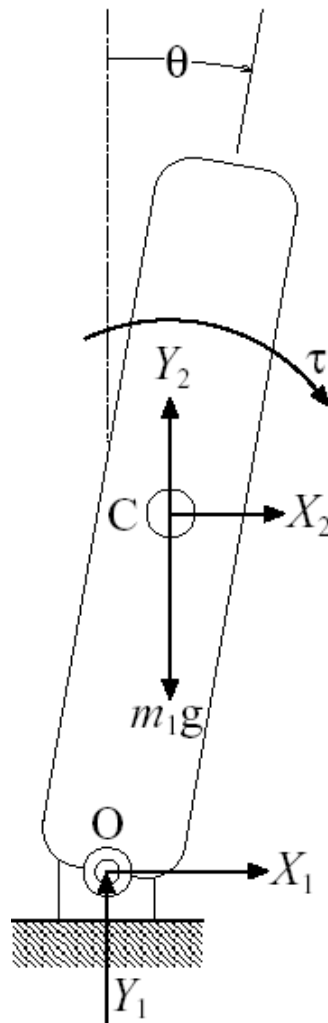


Figure 5: modelo de diagrama de cuerpo libre del ejecutante.

Las fuerzas de reacción X_1 y X_2 son las fuerzas del pivote que representa la cuerda floja y las fuerzas de reacción X_2 e Y_2 y la torsión τ representan las acciones de la pértiga de equilibrio actuando sobre el ejecutante. En la figura 6 se muestra un diagrama de cuerpo libre de la pértiga de equilibrio.

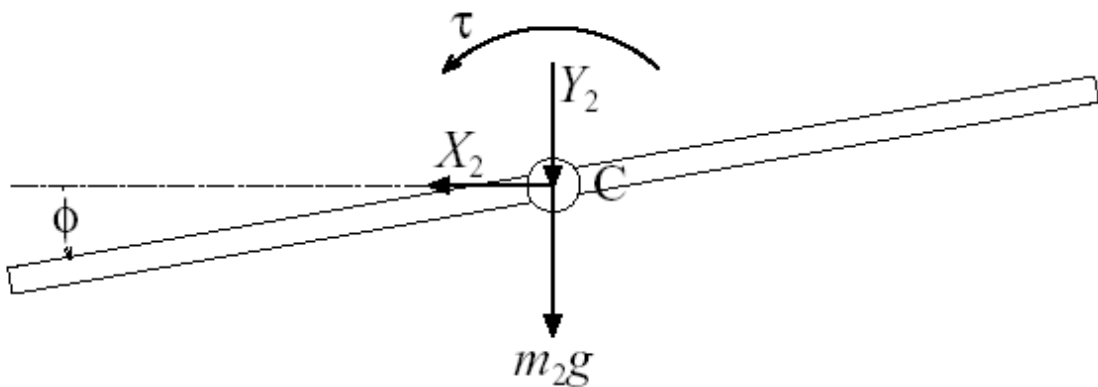


Figura 6: diagrama de cuerpo libre de la pértiga de equilibrio.

Observe que las fuerzas de reacción y la torsión que actúan sobre la pértiga de equilibrio procedentes del ejecutante o artista, son iguales y opuestas a las fuerzas de reacción y la torsión que actúan sobre el ejecutante y que proceden de la pértiga de equilibrio. Esto es necesario en la tercera ley de Newton de acción y reacción.

- (c) Si aplicamos los principios de momento angular al cuerpo rígido que representa al ejecutante, obtenemos:

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 &= \frac{d}{dt}(m_1 a \dot{\theta}) \\ Y_1 + Y_2 - m_1 g &= 0 \end{aligned}$$

Si aplicamos los principios de momento angular a la pértiga de equilibrio, obtenemos:

$$\begin{aligned} -X_2 &= \frac{d}{dt}(m_2 a \dot{\theta}) \\ -Y_2 - m_2 g &= 0 \end{aligned}$$

Los componentes de fuerza de reacción obtenidos de estas cuatro ecuaciones de momento lineal son:

$$\begin{aligned} Y_2 &= -m_2 g & (1) \\ X_2 &= -m_2 a \ddot{\theta} \\ Y_1 &= (m_1 + m_2) g \\ X_1 &= (m_1 + m_2) a \ddot{\theta} \end{aligned}$$

- (d) Si aplicamos los principios de momento angular sobre el centro de masa C de la pértiga de equilibrio, obtenemos:

$$\tau = \frac{d}{dt}(I_2 \dot{\phi}) = I_2 \ddot{\phi} \quad (2)$$

Si aplicamos los principios de momento angular sobre el centro de masa C del cuerpo rígido que representa al ejecutante, obtenemos:

$$\tau + Y_1 a \theta - X_1 a = \frac{d}{dt}(I_1 \dot{\theta})$$

que, cuando se insertan los valores de X_1 y X_2 de la Ec. (1), se reduce a:

$$[I_1 + (m_1 + m_2)a^2]\ddot{\theta} - (m_1 + m_2)ga\theta = \tau \quad (3)$$

Las ecuaciones (2) y (3) son ecuaciones independientes de movimiento para $\phi(t)$ y $\theta(t)$.

Se puede utilizar un procedimiento alternativo para obtener las ecuaciones de movimiento para θ y ϕ sin introducir las fuerzas de reacción X_1 , Y_1 , X_2 , y Y_2 . La idea es utilizar las ecuaciones de momento angular tomadas sobre puntos donde actúan estas fuerzas. Para eliminar las fuerzas X_2 y Y_2 , los momentos deberían tomarse sobre el punto C. La pértiga de equilibrio es un subsistema que no introduce ninguna otra fuerza de reacción. Si se aplica el principio de momento angular a la pértiga de equilibrio sobre su centro de masa C se obtiene una ecuación dinámica en la que no aparecen fuerzas de reacción. De hecho, esto ya se ha realizado al derivar la Ec.(2). Para eliminar las fuerzas X_1 e Y_1 , los momentos deberían tomarse sobre el punto fijo O. Aquí, para no volver a reintroducir las fuerzas internas de reacción X_2 e Y_2 , se debe aplicar el principio de momento angular a todo el sistema del ejecutante y de la pértiga de equilibrio. La torsión total en el sentido de las agujas del reloj sobre O que actúa sobre el ejecutante y la pértiga es:

$$\tau_o = (m_1 + m_2)ga\theta$$

El momento angular total sobre O en la dirección de las agujas del reloj es:

$$H_o = (I_1 + m_1a^2)\dot{\theta} - I_2\dot{\phi} + (m_2a\dot{\theta})a$$

Dado que O es un punto fijo, la ecuación de momento angular tiene la forma siguiente:

$$\tau_o = \frac{dH_o}{dt}$$

o,

$$(m_1 + m_2)ga\theta = [I_1 + (m_1 + m_2)a^2]\ddot{\theta} - I_2\ddot{\phi} \quad (4)$$

Las ecuaciones (2) y (4) derivadas mediante este procedimiento alternativo son un conjunto completo e independiente de ecuaciones de movimiento. Observe que la Ec. (4) no es idéntica a la Ec. (3), pero que el par (2) y (4) sí son equivalentes al par (2) y (3).