

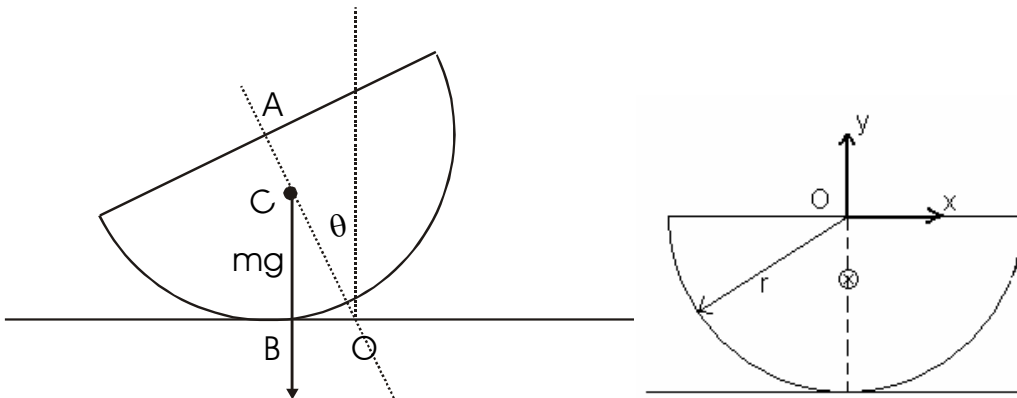
2.004: MODELISMO, DINÁMICA Y CONTROL II

Segundo trimestre, 2003

LE ROGAMOS TENGA EN CUENTA QUE LOS EJERCICIOS SE ENTREGAN AL COMIENZO DE LAS SESIÓN DE PRÁCTICAS (EN LOS 10 PRIMEROS MINUTOS). NO SE ACEPTARÁN TRABAJOS ATRASADOS.

Ejercicio pre-práctica para el experimento 4

1. (a) Considere un "balancín". El balancín consiste en medio cilindro con la parte curva hacia abajo sobre una superficie plana que presenta gravedad. La limitación geométrica es la condición de "rodadura sin deslizamiento". Calcule el centro de masa de este sistema. Calcule también el momento de inercia del balancín.



Ubicación de \otimes :

$$\bar{x} = 0$$

por simetría con la figura en reposo de la derecha.

$$\bar{y} = \frac{\int y^* dA}{A}$$

debido a propiedades de masa uniforme

$$\bar{y} = \frac{\int_{-r}^0 y^* 2\sqrt{r^2 - y^2} dy}{\frac{\pi r^2}{2}}$$

el término dentro de la raíz es el valor x en un y dado, y 2 veces eso corresponde a la anchura del círculo. El área es más la de un semicírculo que la de un círculo completo. Basándonos en el origen definido en la figura de la derecha, integramos desde $y = -r$ hasta $y = 0$.

utilice una sustitución u para resolver esta integral:

$$u = r^2 - y^2, \quad du = -2y dy, \quad \text{lim superior} = r^2, \quad \text{lim inferior} = 0;$$

Esto nos proporciona:

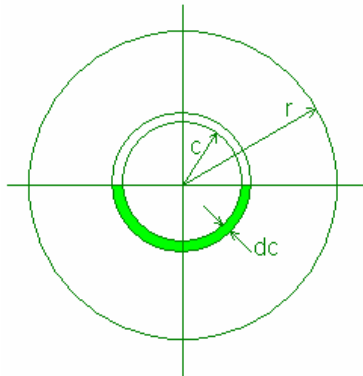
$$\bar{y} = \frac{\int_0^{r^2} \sqrt{u} du}{-\frac{\pi r^2}{2}}$$

$$\bar{y} = -\frac{2}{\pi r^2} * \frac{2}{3} * u^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{r^2} = -\frac{4}{3\pi r^2} (r^3 - 0) = -\frac{4r}{3\pi} \quad \text{respuesta final}$$

momento de inercia del balancín:

primero, halle el momento de inercia aproximadamente en el origen O y, a continuación, utilice el teorema del eje paralelo para hallarlo aproximadamente en el centro de la masa, ⊗.

$$I_{zz_o} = \int_V \rho * c^2 dV$$



y dV es el volumen de la mitad inferior del anillo diferencial.

dV = 1/2 (2πc dc dz) donde dz es la anchura diferencial en la página.

la anchura total en la página viene indicada como l.

recuerde que la masa m = ρ*volumen = ρ*π*r²*l/2

$$I_{zz_o} = \int_0^l \int_0^r \rho * c^2 * \pi * c * dc dz$$

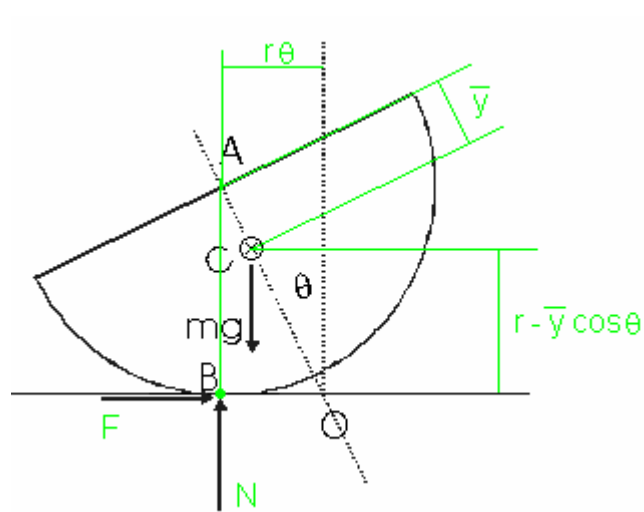
$$I_{zz_o} = \rho \pi l \int_0^r c^3 dc = \rho \pi l \frac{r^4}{4} = \frac{m r^2}{2}$$

A continuación, utilice el teorema del eje paralelo para hallar I_{zz⊗}

$$I_{zz\otimes} = I_{zz_o} - m \bar{y}^2;$$

$$I_{zz\otimes} = 0.32 m r^2$$

(b) Escriba la ecuación de equilibrio de fuerza y torsión en relación al centro de masa.



medida desde el punto O:

$$\begin{aligned}
 x &= -r\theta + \bar{y} \sin\theta; & y &= r - \bar{y} \cos\theta; \\
 x' &= -r\theta' + \bar{y} \cos\theta \theta'; & y' &= \bar{y} \sin\theta \theta'; \\
 x'' &= -r\theta'' - \bar{y} \sin\theta \theta'^2 + \bar{y} \cos\theta \theta''; & y'' &= \bar{y} \cos\theta \theta'^2 + \bar{y} \sin\theta \theta'';
 \end{aligned}$$

$$\Sigma F_x: F = ma_x = m(-r\theta'' - \bar{y} \sin\theta \theta'^2 + \bar{y} \cos\theta \theta'');$$

$$\Sigma F_y: mg - N = ma_y = m(\bar{y} \cos\theta \theta'^2 + \bar{y} \sin\theta \theta'');$$

$$\Sigma \tau_O: F(r - \bar{y} \cos\theta) - N(\bar{y} \sin\theta) = I_{zzO} \theta'';$$

y el torque aproximadamente en el punto de contacto, B, es:

$$\Sigma \tau_B: -mg \bar{y} \sin\theta = I_{zzB} \theta'' \quad \text{where } I_{zzB} = -mr^2/2$$

(c) ¿Cuál es la frecuencia natural del balancín para una oscilación angular pequeña alrededor de la posición de reposo?

utilizando la ecuación de torsión y barajando de nuevo los términos:

$$\theta''(I_{zz\otimes} + mr^2 + m\bar{y}^2 - 2mr\bar{y}\cos\theta) + \theta'(mr\bar{y}\sin\theta) + mg\bar{y}\sin\theta = 0;$$

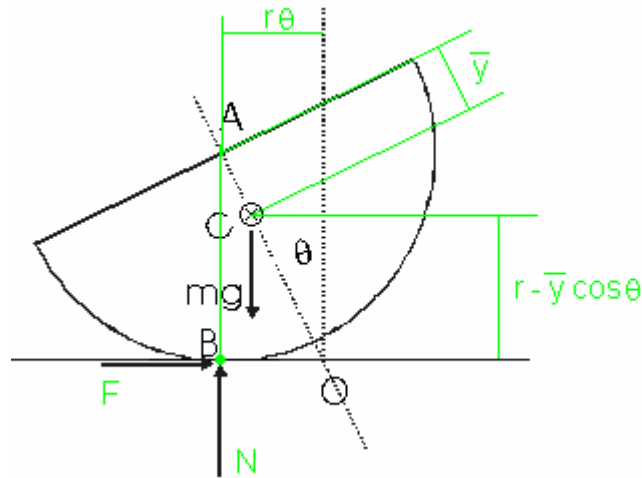
aproximación de ángulo pequeño: $\cos\theta = 1$ y $\sin\theta = \theta$, θ'^2 muy pequeño.

$$\theta''(I_{zz\otimes} + mr^2 + m\bar{y}^2 - 2mr\bar{y}) + mg\bar{y}\theta = 0$$

a continuación, utilizando la similitud a la ecuación de segundo orden $x'' + 2\xi\omega_n x' + \omega_n^2 x = 0$;

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g\bar{y}}{0.32r^2 + (r - \bar{y})^2}}$$

(d) Repita el cálculo anterior de la frecuencia natural escribiendo las ecuaciones de equilibrio de fuerza y torsión en referencia al punto de contacto en movimiento.



medido desde el punto O:

$$\begin{aligned} x &= -r\theta; & y &= 0; \\ x' &= -r\theta'; & y' &= 0; \\ x'' &= -r\theta''; & y'' &= 0; \end{aligned}$$

$$\Sigma F_x: F = ma_x = -mr\theta'';$$

$$\Sigma F_y: mg - N = ma_y = 0;$$

$$\Sigma \tau_B: -mg \bar{y} \sin\theta = I_{zzB} \theta_B''$$

$$\text{donde } I_{zzB} = I_{zzO} + m(\sqrt{(r - \bar{y} \cos \theta)^2 + (\bar{y} \sin \theta)^2})^2$$

$$I_{zzB} = 0.32mr^2 + m(r^2 - 2r\bar{y} \cos \theta + \bar{y}^2)$$

después de una aproximación de pequeño ángulo ($\cos \theta = 1$), queda tal que:

$$I_{zzB} = 0.32mr^2 + m(r - \bar{y})^2$$

utilizando la ecuación de torsión y barajando de nuevo los términos:

$$\theta''(0.32mr^2 + m(r - \bar{y})^2) + mg \bar{y} \sin\theta = 0;$$

aproximación de pequeño ángulo: $\sin\theta = \theta$,

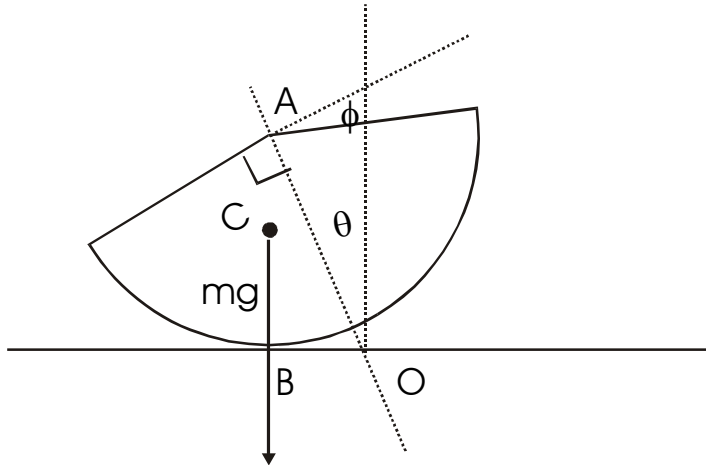
$$\theta''(0.32mr^2 + m(r - \bar{y})^2) + mg \bar{y} \theta = 0;$$

utilizando, a continuación, la similitud a la ecuación de segundo orden $x'' + 2\xi\omega_n x' + \omega_n^2 = 0$;

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g\bar{y}}{0.32r^2 + (r - \bar{y})^2}}$$

Por lo tanto, la frecuencia natural es la misma que la obtenida en el apartado 1(c).

2. Considere un "balancín parcial". Mantenga la condición de contorno de rodadura sin deslizamiento.



(a) Calcule el nuevo centro de masa. Calcule también el nuevo ángulo de reposo del balancín.

por tanto, este balancín no es realmente asimétrico. Se coloca de forma que el ángulo de reposo es $\phi/2$. la coordenada x del centro de masa es otra vez 0, por simetría.

Ubicación de \otimes :

$\bar{x} = 0$ por simetría de la figura en reposo de la derecha.

$\bar{y} = \frac{\int y * dA}{A}$ debido a las propiedades de la masa uniforme

$$\bar{y} = \frac{\int_{-r}^{-r \sin(\phi/2)} y * 2\sqrt{r^2 - y^2} dy + \int_{-r \sin(\phi/2)}^0 y * 2 \cot(\phi/2) * y dy}{\frac{r^2 (\pi - \phi)}{2}}$$

utilice la sustitución u para resolver la primera integral, igual que anteriormente, y la segunda es sencilla. Esto nos proporciona:

$$\bar{y} = -\frac{4r \cos(\phi/2)}{3(\pi - \phi)}$$
 respuesta final

momento de inercia del balancín:

En primer lugar, halle el momento de inercia aproximadamente en el origen O y, a continuación, utilice el teorema del eje paralelo para hallarlo aproximadamente en el centro de masa, \otimes .

$$I_{zz_o} = \int_V \rho^* c^2 dV$$

dV es ahora $(2\pi - \pi - \phi)/2\pi * 2\pi c \, dc \, dz = (\pi - \phi)/2\pi * 2\pi c \, dc \, dz = (\pi - \phi)c \, dc \, dz$

recuerde que la masa $m = \rho^* \text{volumen} = \rho^*(\pi - \phi) * r^2 * l/2$

$$I_{zz_o} = \int_0^l \int_0^r \rho^* c^2 * (\pi - \phi) * c * dc dz$$

$$I_{zz_o} = \rho(\pi - \phi)l \int_0^r c^3 dc = \rho(\pi - \phi)l \frac{r^4}{4} = \frac{mr^2}{2}$$

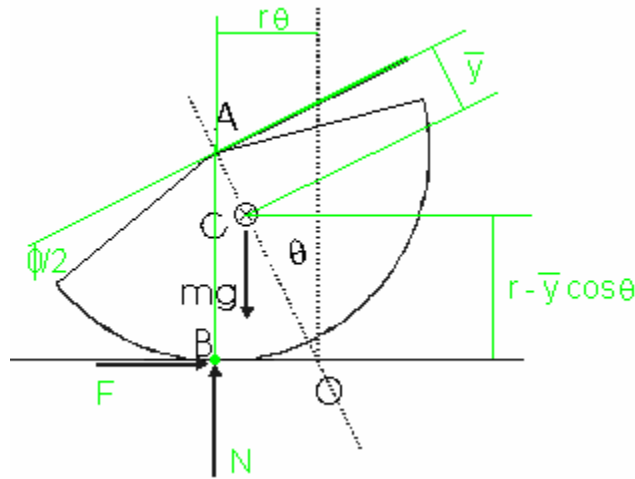
a continuación, utilice el teorema del eje paralelo para hallar $I_{zz\otimes}$

$$I_{zz\otimes} = I_{zz_o} - m \bar{y}^2;$$

$$I_{zz\otimes} = \left(0.5 - \frac{16r^2 \cos^2(\phi/2)}{9(\pi - \phi)^2} \right) mr^2$$

(b) Escriba las ecuaciones de equilibrio de fuerza y torsión en el centro de masa.

Las fuerzas y la torsión en y aproximadamente en el centro de masa son las mismas que anteriormente, excepto que el valor m and \bar{y} en las ecuaciones de fuerza, e I en la ecuación de torsión han cambiado.



$$\begin{aligned}
 x &= -r\theta + \bar{y} \sin\theta; & y &= r - \bar{y} \cos\theta; \\
 x' &= -r\theta' + \bar{y} \cos\theta \theta'; & y' &= \bar{y} \sin\theta \theta'; \\
 x'' &= -r\theta'' - \bar{y} \sin\theta \theta'^2 + \bar{y} \cos\theta \theta''; & y'' &= \bar{y} \cos\theta \theta'^2 + \bar{y} \sin\theta \theta'';
 \end{aligned}$$

$$\Sigma F_x: F = ma_x = m(-r\theta'' - \bar{y} \sin\theta \theta'^2 + \bar{y} \cos\theta \theta'');$$

$$\Sigma F_y: mg - N = ma_y = m(\bar{y} \cos\theta \theta'^2 + \bar{y} \sin\theta \theta'');$$

$$\Sigma \tau_{\odot}: F(r - \bar{y} \cos\theta) - N(\bar{y} \sin\theta) = I_{zz\odot} \theta'';$$

y la torsión aproximadamente en el punto de contacto, B, es:

$$\Sigma \tau_B: -mg \bar{y} \sin\theta = I_{zzB} \theta_B'' \quad \text{donde } I_{zzB} = -mr^2/2$$

(c) Calcule la frecuencia natural del balancín para una oscilación angular pequeña alrededor del ángulo de reposo.

ω_n se deriva de la misma forma que en el caso semicircular, pero la magnitud de I e \bar{y} ha cambiado.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g\bar{y}}{0.32r^2 + (r - \bar{y})^2}}$$

(d) Repita el cálculo anterior de la frecuencia natural escribiendo las ecuaciones de equilibrio de fuerza y torsión en referencia al punto de contacto en movimiento.

Al igual que en el apartado 1(d), la frecuencia natural es la misma que la obtenida en el apartado 2(c).