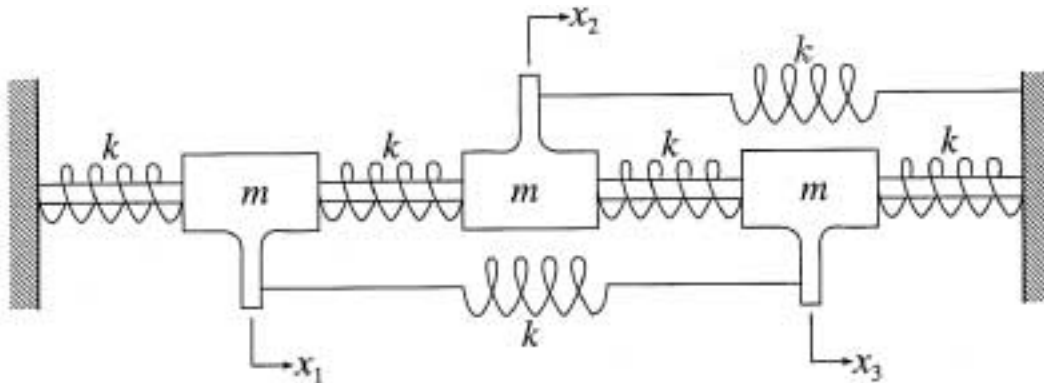


Boletín de problemas 8

Problema 1. Tres masas iguales m se deslizan sin fricción por una varilla rígida horizontal. Sujetos a las masas hay seis muelles idénticos con constante de muelle k , tal como se muestra a continuación en el dibujo. las vibraciones libres del sistema se describen mediante tres modos naturales de vibración y sus correspondientes frecuencias naturales de vibración.



Identifique el mayor número posible de modos y frecuencias naturales.

Problema 2. Vibración torsional. Probablemente el dispositivo mecánico de transmisión de potencia más común sea un sencillo eje. Un motor de accionamiento aplica una torsión τ en un extremo del y el otro extremo aplica una torsión τ al elemento impulsado: una hélice, una herramienta de máquina, una bomba, un generador eléctrico, *etc.* El eje está torsionado, pero si el conductor es capaz de mantener una velocidad de rotación ω , entonces la potencia transmitida a lo largo del eje rotativo torsionado es $\pi = \tau\omega$. En un caso ideal, tanto la torsión τ como la velocidad ω son constantes y existe un flujo permanente. En realidad, las características de los dos conductores y de los elementos impulsados son tales que el flujo de potencia oscila en cada revolución. Uno de los mayores culpables de que se produzca una oscilación de torsión es el motor de combustión interno. Una secuencia de explosiones hacen que la torsión oscile, lo cual es justo lo contrario de una torsión constante estacionaria. Una consecuencia de esta torsión oscilante es un giro oscilante en el eje: vibración torsional.

desde el punto de vista histórico, la vibración torsional fue un gran reto técnico durante el primer cuarto del siglo XX. Se estaba extendiendo el uso de motores Otto y Diesel en coches y barcos y había una

de fallos en los ejes debidos a la vibración torsional. Este tipo de vibración era especialmente dañina puesto que la vibración de deformación se superpone a la velocidad media de rotación estacionaria ω y pasaba inadvertida a las entonces rudimentarias herramientas. El profesor Edward Miller, por aquel entonces director del Departamento de Ingeniería Mecánica del MIT, solía contar una historia de como en cierta ocasión detectó una grave vibración torsional antes de que el eje tuviera una rotura por fatiga, al darse cuenta durante la prueba inicial de una bomba accionada por un motor Diesel de que el eje de unión del motor con la bomba estaba al rojo vivo. Desde entonces, los avances en ingeniería han sido lo suficientemente importantes como para que la vibración torsional deje de ser un misterio. En la mayoría de los casos, los procedimientos estándar de diseño están disponibles para asegurar que los niveles de vibración torsional permanecen dentro de los límites aceptables.

En este problema le pedimos que estudie un sistema concreto formado por una bomba accionada por un motor eléctrico a través de un eje cuya *rigidez torsional* (¿recuerda esto mismo del curso 2.001?) es:

$$K = \frac{\tau}{\Delta\theta} = \frac{GI_Z}{L}$$

donde G es el módulo de cizallamiento, I_Z es el momento polar de inercia del área transversal del eje, y L es la longitud del eje. El momento de inercia de masa del rotor del motor es I_m y el momento de inercia de masa del impulsor de la bomba es I_p . En la figura 1 se muestra un esquema del sistema.

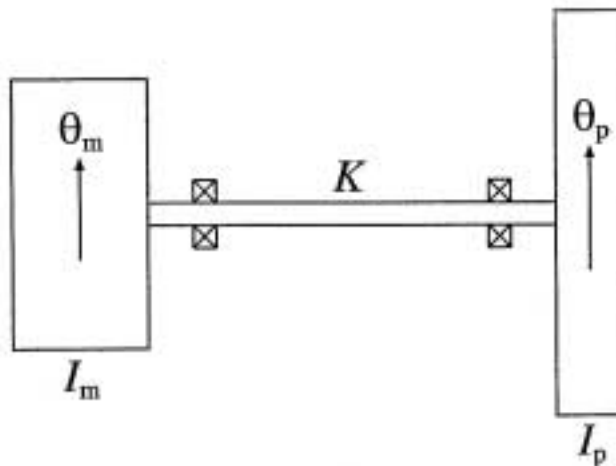


Figure 1: Motor drives pump through elastic shaft.

Se desea hallar los modos naturales y las frecuencias naturales del sistema no amortiguado y la respuesta forzada cuando se conoce el motor, para los casos en los que:

$$I_m = 20 \text{ lb-in-sec}^2$$

$$I_p = 40 \text{ lb-in-sec}^2$$

$$K = 1,000,000 \text{ in-lb/rad}$$

Los ángulos de rotación del motor y de la bomba son θ_m y θ_p , respectivamente.

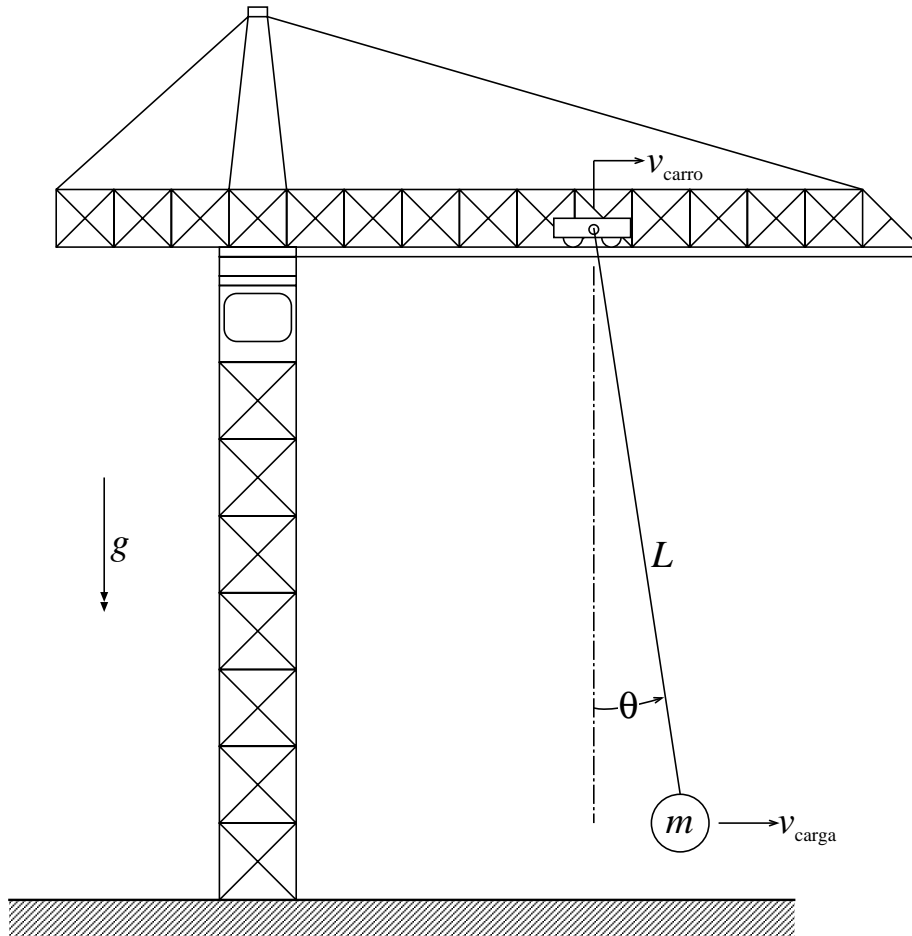
- Obtenga las ecuaciones de movimiento para las coordenadas generalizadas θ_m y θ_p durante el movimiento libre y no amortiguado.
- Construya el problema de valor propio para los modos naturales y las frecuencias naturales.
- Resuelva el problema de valor propio y obtenga las matrices modal y diagonal de los cuadrados de las frecuencias naturales.
- Considere la respuesta de estado estacionario del sistema cuando la torsión del motor es:

$$\tau_m = \tau_0 + \tau_{alt} \sin \Omega t$$

donde τ_0 es la torsión media constante producida por el motor, y Ω es la velocidad media constante de rotación del motor. La cantidad τ_{alt} es la amplitud de una torsión alterna pequeña provocada por la variación del campo magnético alrededor de la circunferencia del espacio entre el rotor y el estator. halle las respuestas de estado estacionario de los ángulos θ_m y θ_p .

- ¿Cuál es la potencia media que el motor emite a la bomba?
- El eje que conecta el motor y la bomba se diseñó al menos para transmitir la potencia prevista en el apartado (e), sin embargo, cuando se instaló el sistema se descubrió que había una rotura por fatiga en el eje muy pronto. Si le llamasen a usted para consultarle las causas de esta rotura, ¿sugeriría una razón por la que se habría producido dicha rotura?
- ¿Podría sugerir una solución al problema sin necesidad de realizar cambios importantes en el hardware?

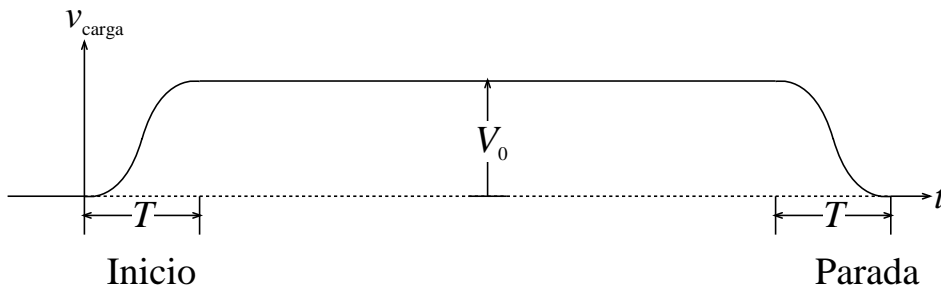
Problema 3. Dinámica de una grúa. La grúa que se muestra en el dibujo se utiliza para mover cargas de un sitio a otro en una obra.



Considere el transporte horizontal (L es constante). El operador de la grúa controla la velocidad del carro v_{carro} pero la velocidad de la carga no tiene por qué ser la misma que la del carro, debido a la acción del péndulo. Un problema fundamental para los operadores de grúas es controlar la velocidad del carro, de forma que la carga se mueva suave y rápidamente hacia su destino sin que se balancee de un lado a otro con un ángulo tan amplio que sean necesarios varios minutos para que cese el balanceo y sea segura su manipulación.

- Utilice el ángulo θ como coordenada generalizada. Derive una ecuación linealizada de movimiento para la respuesta $\theta(t)$ debida a la entrada $v_{carro}(t)$.
- Obtenga una ecuación diferencial que relacione la velocidad de la carga $v_{carga}(t)$ con la velocidad del carro $v_{carro}(t)$.
- Halle la función de transferencia desde la velocidad del carro $v_{carro}(s)$ hasta el ángulo $\theta(s)$.
- Halle la función de transferencia desde la velocidad del carro $v_{carro}(s)$ hasta la velocidad de la carga $v_{carga}(s)$.

En el dibujo de abajo se muestra un historial de tiempo conveniente para la velocidad de la carga. Hay un breve intervalo de *inicio* de duración T en el que la carga acelera suavemente hasta alcanzar una velocidad V_0 . Al final de este periodo tanto el carro como la carga viajan a una velocidad V_0 con ángulo $\theta = 0$. A continuación, hay un breve intervalo de *parada* en el que la carga decelera suavemente hasta alcanzar una velocidad cero y tanto el carro como la carga se detienen, con un ángulo $\theta = 0$.



La descripción analítica de la velocidad de la carga durante el intervalo de *inicio* es:

$$v_{carga} = \frac{V_0}{2} \left(1 - \cos \pi \frac{t}{T} \right)$$

si el origen de t se ubica al comienzo del intervalo de *inicio*. La descripción analítica de la velocidad de la carga durante el intervalo de *parada* es:

$$v_{load} = \frac{V_0}{2} \left(1 + \cos \pi \frac{t}{T} \right)$$

si el origen de t se ubica al comienzo del intervalo de *parada*. Con el fin de obtener resultados cuantitativos a las siguientes cuestiones, dele el siguiente valor al intervalo T .

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

- (e) Determine el historial de tiempo de la velocidad del carro que se necesita para producir la anterior velocidad de la carga en el intervalo de *inicio*. Realice un esquema y compare la velocidad del carro con la velocidad de la carga durante el intervalo de *inicio*.
- (f) Determine el historial de tiempo de la velocidad del carro que se necesita para producir la anterior velocidad de carga en el intervalo de *parada*. Realice un esquema y compare la velocidad del carro con la velocidad de la carga durante el intervalo de *parada*.
- (g) Determine el historial de tiempo de θ durante los intervalos de *inicio* y de *parada*. Realice un esquema del historial de tiempo de θ durante los intervalos de *inicio* y de *parada*.