2.004 MODELISMO, DINÁMICA Y CONTROL II Primavera 2003

Soluciones del boletín de problemas 3

Problema 1: Impactos entre dos masas iguales y una mayor. En este problema tenemos tres masas finitas y tres colisiones entre dos masas. Los resultados genéricos de la Ec. (1) del problema 1 se pueden utilizar para determinar las velocidades posteriores al impacto en cada colisión. En la figura 3 se muestra el diagrama de espacio-tiempo para la secuencia de impactos.

Observe que en el primer y tercer impactos los choques implican a una masa en movimiento que golpea a una masa estacionaria de *igual* masa. En el problema 1 se señaló que en este caso especial existe una transferencia pura de momento desde la masa impactante a la masa impactada. Después de la primera colisión la masa impactante, que tenía velocidad v_0 hacia la derecha, se queda parada de repente mientras que la masa impactada, en un principio estacionaria, comienza a desplazarse con la misma velocidad v_0. Un transferencia similar de velocidad tiene lugar en el tercer impacto, en el que la masa impactante tiene velocidad v_1 hacia la izquierda.

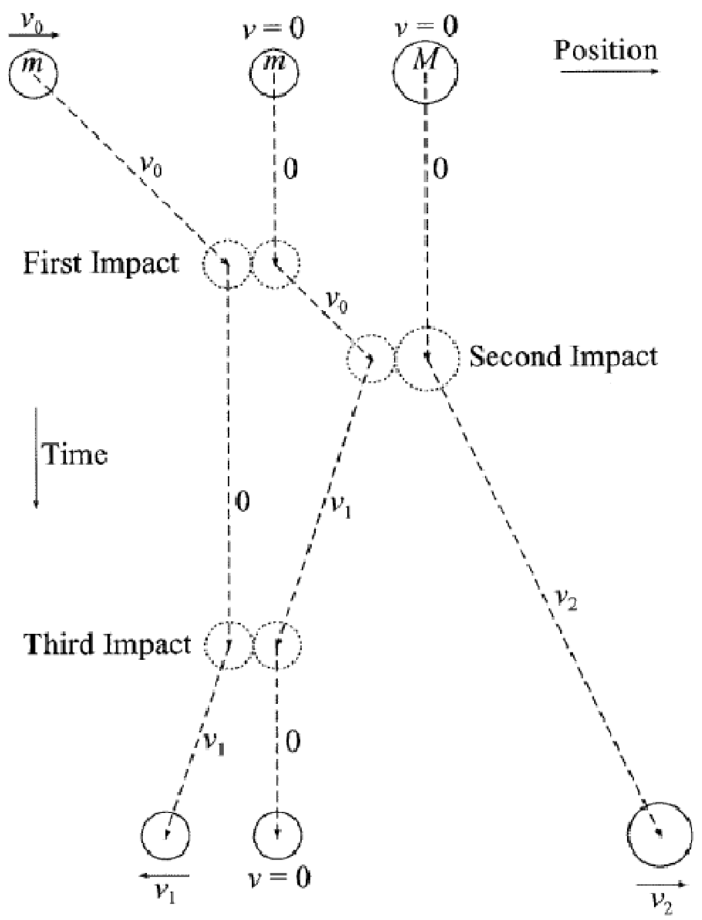


Figura 3: diagrama de espacio-tiempo de la secuencia de impactos.

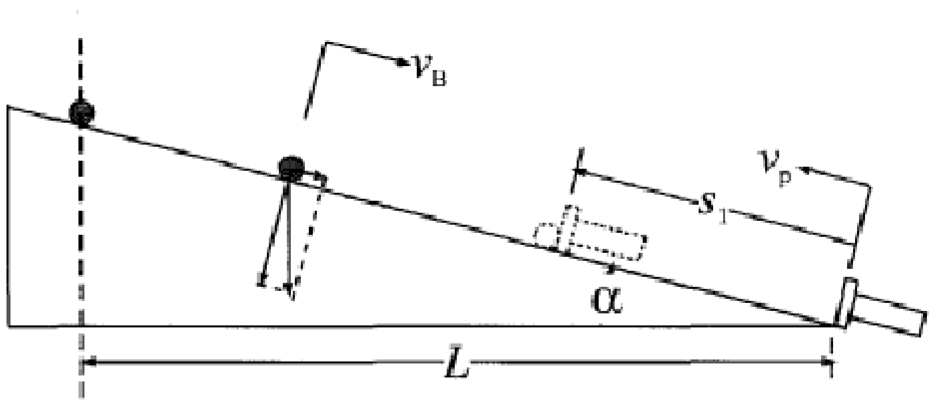
El segundo impacto de la figura 3 representa un choque exactamente igual a la colisión genérica descrita en el problema 1. Una masa m de velocidad v_0 hacia la derecha golpea una masa mayor M estacionaria. Las velocidades inmediatamente posteriores al impacto vienen dadas por la Ec.(1) del problema 1. Tal como se indica en la figura 3, la masa impactante inferior rebota hacia la derecha con una velocidad de magnitud v_1, y por analogía a la Ec. (1) tenemos:

$$v_1 = \frac{M-m}{M+m} v_0$$

y la masa impactada superior adquiere, de repente, una velocidad de magnitud v_2 hacia la derecha, y por analogía a la Ec. (1) tenemos:

$$v_2 = \frac{2m}{M+m} v_0$$

Problema 2. En $t = 0$, el pistón comienza a ir cuesta arriba a una velocidad constante v_p, y la pelota comienza a ir cuesta abajo a una velocidad inicial cero. Por acción de la gravedad, la pelota experimenta una aceleración $g \sin \alpha$ cuesta abajo. En el tiempo t_1, se produce un impacto al chocar la pelota con el pistón. Se supone que la velocidad del pistón no varía durante el impacto, pero poco después, el pistón se detiene, de forma que no se produce un segundo impacto antes de que la pelota alcance su máxima altura h_{max}. Para resolver este problema es necesario determinar el tiempo (y lugar) del choque, y a continuación, resolver el problema del impacto para hallar la nueva velocidad de la pelota, que fija la energía cinética de la pelota inmediatamente después del impacto. Por último, es necesario determinar la altura h_{max} a la que esta energía cinética se convierte totalmente en energía potencial.



Representemos la distancia cuesta arriba por s. El pistón comienza en $s = 0$ con velocidad constante v_p. El desplazamiento del pistón en el tiempo t, antes de que golpee la pelota es:

$$s_p = v_p t$$

La pelota comienza en $s = L / \cos\alpha$ y experimenta una aceleración cuesta abajo $-g\,sin\,\alpha$. Si integramos la aceleración obtenemos:

$$v_B = -gt\sin\alpha \quad \text{y} \quad s_B = \frac{L}{\cos\ \alpha} - \frac{1}{2}gt^2\sin\alpha$$

La colisión tiene lugar en el tiempo t_1, cuando $s_B = s_p$

$$\frac{L}{\cos\alpha} - \frac{1}{2}gt_2^1\sin\alpha = v_p t_1 \quad \text{o} \quad t_2^1 + 2\frac{v_p}{g\sin\alpha}t_1 - \frac{2L}{g\sin\alpha\cos\alpha}$$

Esta es una ecuación cuadrática para el tiempo t_1 de colisión. La raíz positiva de esta ecuación es:

$$t_1 = \frac{v_p}{g\sin\alpha}\left(\sqrt{1+\frac{2gL\sin\alpha}{v_p^2\cos\alpha}} - 1\right) \tag{1}$$

Esta es la respuesta al apartado (a) del problema 2. La ubicación donde tiene lugar la colisión es $s = s_1$, donde:

$$s_1 = v_p t_1 = \frac{v_p^2}{g\sin\alpha}\left(\sqrt{1+\frac{2gL\sin\alpha}{v_p^2\cos\alpha}} - 1\right)$$

A continuación, es necesario resolver el problema del impacto. Justo antes de la colisión, la velocidad del pistón era v_p y la de la pelota $-gt_1\,sin\ \alpha$. La velocidad relativa de acercamiento es $v_p + gt_1\,sin\ \alpha$. Inmediatamente después de la colisión, el pistón sigue teniendo una velocidad v_p, pero la pelota tiene una nueva velocidad v_B cuesta arriba. Por tanto, la velocidad relativa de separación es $v_B - v_p$. Ahora el coeficiente de restricción e es la relación de la velocidad relativa de separación y la velocidad relativa de acercamiento, lo que implica que:

$$v_B - v_p = e(v_p + gt_1\sin\alpha) \quad \text{o} \quad v_B = (1+e)v_p + egt_1\sin\alpha$$

(b) Inmediatamente después del impacto, la pelota tiene una elevación $h_1 = s_1 \sin\alpha$ y una velocidad v_B reciente. Después del impacto, la pelota se desliza cuesta abajo sin fricción, cambiando la energía cinética por energía potencial adicional.

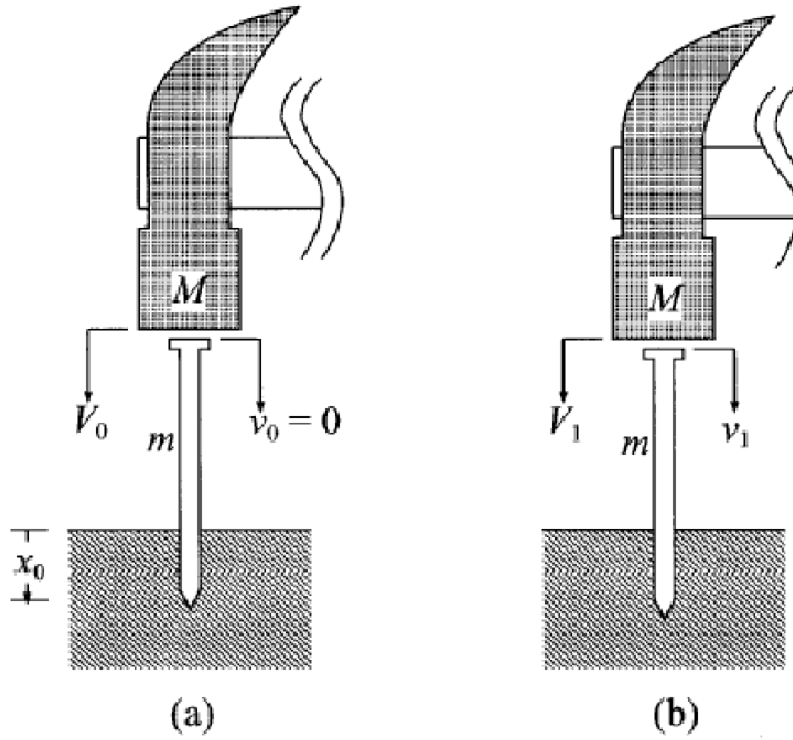
$$\frac{1}{2}mv_B^2 = mg(h_{\max} - h_1)$$

La elevación máxima alcanzada es:

$$h_{\max} = v_p t_1 \sin\alpha + \frac{1}{2g}\left[(1+e)v_p + egt_1 \sin\alpha\right]^2$$

donde t_1 viene dado por Ec.(1).

Problema 3. La cabeza del martillo golpea el clavo con una velocidad V_0, tal como se muestra en la figura (a). Después del impacto, el clavo tiene una velocidad v_1 y la cabeza del martillo una velocidad V_1, tal como se muestra en la figura (b).



(a) El momento inicial de la cabeza del martillo es MV_0 en dirección descendente y el momento descendente de la cabeza del martillo y el clavo combinados, después del impacto, es:

$MV_1 + mv_1$. La conservación del momento requiere que:

$$MV_1 + mv_1 = MV_0$$

(b) En el experimento, el clavo se incrusta en la madera a una distancia H y adquiere una velocidad descendente $v_0 = \sqrt{2gH}$. Después impacta contra la cabeza del martillo que está estática y rebota con una velocidad ascendente $v_1 = \sqrt{2gH}$. La velocidad descendente V_1 de la cabeza del martillo inmediatamente después del impacto no se midió. Sin embargo, se puede recuperar este dato a partir de las mediciones de v_0 y v_1 aplicando la conservación del momento descendente:

$$mv_0 = MV_1 - mv_1 \quad \text{o} \quad V_1 = \frac{m}{M}\left(v_0 + v_1\right)$$

El coeficiente de restitución e es la relación de la velocidad relativa de separación después del impacto, $v_1 + V_1$, y la velocidad relativa de acercamiento v_0.

$$e = \frac{v_1 + V_1}{v_0} = \frac{v_1}{v_0}\left[1 + \frac{m}{M}(1 + \frac{v_0}{v_1})\right] = \sqrt{\frac{h}{H}}\left[1 + \frac{m}{M}\left(1 + \sqrt{\frac{H}{h}}\right)\right]$$

Cuando se insertan los datos proporcionados en esta ecuación, el resultado es el siguiente:

$$e = \sqrt{0.1}\left[1 + 0.01(1 + \sqrt{10})\right] = 0.329$$

Cuando el martillo golpea el clavo, la velocidad relativa de acercamiento es V_0 y la de separación $v_1 – V_1$, por lo que la segunda ecuación es:

$$v_1 - V_1 = eV_0$$

siendo $e = 0.329$

(c) Las ecuaciones en los apartados (a) y (b) son dos ecuaciones simultáneas para las velocidades v_1 y V_1 después del impacto.

$$\begin{bmatrix} m/M & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_1 \\ V_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_0 \\ eV_0 \end{Bmatrix}$$

La solución para v_1 es:

$$v_1 = \frac{1+e}{1+m/M}V_0 = \frac{1+0.329}{1+0.01}10 = 13.16\, m/s$$

(d) La ecuación de movimiento para el clavo bajo la resistencia lineal es:

$$m\frac{dv}{dt} + bv = 0$$

donde $v = dx/dt$ y x se miden en dirección descendente en el bloque de madera. La solución para v, empezando desde $v = v_1$ en un tiempo $t = 0$ es $v = v_1 \exp\{-bt/m\}$. Para obtener la penetración adicional δ_1, se integra la ecuación $v = dx/dt$ durante el tiempo infinito desde x_0 a $x_0 + \delta$.

$$\delta = \int_{x_0}^{x_0+\delta} dx = \int_0^{\infty} v_1 \exp\{-bt/m\}\, dt = v_1\frac{m}{b} \quad \text{o} \quad \delta = \frac{m}{b}\frac{1+e}{1+m/M}V_0$$

(e) El coeficiente de resistencia viscosa b se obtiene insertando en la fórmula anterior los datos proporcionados.

$$b = \frac{v_1 m}{\delta} = \frac{13.16 \times 0.005}{0.002} = 32.9 \ \text{N/m/s}$$

(f) Cuando la resistencia de penetración es $R = \mu_k n x$, la ecuación de movimiento del clavo es:

$$m\frac{dv}{dt} + \mu_k n x = 0$$

Dado que la resistencia es una función de x, lo idóneo es considerar que la velocidad v también es una función de x y utilizar la regla de la cadena para escribir:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dt}\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx}v = \frac{d}{dx}(\frac{v^2}{2})$$

De esta forma la ecuación de movimiento es la siguiente:

$$m\frac{d}{dx}(\frac{v^2}{2}) + \mu_k n x = 0$$

que se puede integrar desde $x = x_0$, donde $v = v_1$, hasta $x = x_0 + \delta$, donde $v = 0$, para obtener:

$$m\int_{v_1}^{0} \frac{v^2}{2} + \mu n \int_{x_0}^{x_0+\delta} x \ dx = -m\frac{v_1^2}{2} + \mu n\left[\frac{(x_0+\delta)^2}{2} - \frac{x_0^2}{2}\right] = 0$$

Este resultado se puede escribir como una ecuación para hallar δ en el caso de que los otros parámetros sean conocidos.

$$\delta^2 + 2\delta x_0 - \frac{m}{\mu_k n}v_1^2 = 0$$

o, como una ecuación para hallar $\mu_k n$, si, como es el caso aquí, los otros parámetros son conocidos.

$$\mu_k n = \frac{m v_1^2}{\delta(2x_0 + \delta)}$$

Si se insertan los datos proporcionados, se obtiene:

$$\mu_k n = \frac{0.005(13.16)^2}{0.002(2(0.01) + 0.002)} = 19.690 \,\text{N/m}$$

(g) Con el resto de factores se hace los mismo. El martillo se aplica con la mitad de la velocidad original V_0. De la ecuación anterior (c) se deduce que la velocidad inicial del clavo v_1 también es la mitad. En el modelo de resistencia lineal, la penetración inicial δ es simplemente proporcional a v_1, por lo que dividirla por la mitad significaría dividir por la mitad δ, por lo que el nuevo valor de δ sería δ = 2 mm/2 = 1 mm.

(h) Para el modelo de fricción de Coulomb, el nuevo valor de δ se halla resolviendo la Ec.(1). Aquí se observa que δ depende en sentido no lineal de v_1. La solución a la ecuación (1) es:

$$\delta = -x_0 \pm \sqrt{x_0^2 + \frac{mv_1^2}{\mu_k n}}$$

Dado que δ debe ser positivo, se debe utilizar la raíz cuadrada positiva. Si se insertan los datos con v_1 = 13.16/2 = 6.58 m/s, se obtiene:

$$\delta = -0.01 + \sqrt{0.0001 + \frac{(0.005)(6.58)^2}{19.690}} = 0.000536 \text{ m}$$

Esto es 0.0536, apenas la mitad de la predicción realizada por el modelo lineal.