

# Capítulo 7

## Radiación de partículas cargadas Interacción con la materia

### 7.1 Bremsstrahlung o radiación de frenado

Cuando partículas cargadas chocan entre sí se aceleran en el campo eléctrico de cada una, irradiando ondas electromagnéticas como resultado. Este tipo de radiación sucede cuando un electrón rápido reduce la velocidad por los choques y de ahí viene el nombre alemán de Bremsstrahlung (“radiación de frenado”).

#### 7.1.1 Radiación en choques, no relativista.

Hemos analizado casi detalladamente los choques de partículas cargadas en anteriores capítulos, ignorando la posibilidad de radiación. La órbita del proyectil es, clásicamente, una hipérbola. Sin embargo, al igual que una aproximación, aunque una que se romperá si el parámetro de impacto,  $b$ , es lo suficientemente pequeño, podemos ignorar la curvatura de la órbita y hacer que el choque se produzca cuando el proyectil viaje a lo largo de una línea recta. Este enfoque de “choque en línea recta” es el que adoptamos anteriormente como una aproximación para calcular la energía transferida a un oscilador armónico sencillo en un choque. Nuestro enfoque actual sigue un argumento paralelo.

A medida que el proyectil pasa el objetivo experimenta su campo, lo que provoca que acelere. Cuando el proyectil está lejos del objetivo, antes o después del choque, la aceleración se vuelve insignificante. Por lo tanto, el proyectil ha experimentado un “impulso”, un breve periodo de aceleración. Podemos calcular la duración de ese impulso como el tiempo que tarda el proyectil en recorrer una distancia de aproximadamente  $b$ , concretamente  $\tau = b/v_0$ , donde  $v_0$  es la velocidad de entrada del proyectil. Por término medio, el impulso es perpendicular a la velocidad del proyectil. La energía total irradiada en este impulso viene dada por la fórmula anterior (4.85) para la potencia instantánea irradiada por una carga acelerada:

$$P' = \frac{q_1^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3c} \dot{v}^2, \quad (7.1)$$

integrada durante la duración del impulso,  $\tau$ . Si tomando el valor característico de la aceleración, tal y como viene dado por la fuerza del campo eléctrico en el enfoque más cercano,

$$\dot{v} = E/m_1 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 b^2 m_1}, \quad (7.2)$$

obtenemos un cálculo de la energía irradiada:

$$W \approx P' \tau \approx \frac{q_1^4 q_2^2}{(4\pi\epsilon_0)^3} \frac{2}{3c^3} \frac{1}{m_1^2 b^4} \frac{b}{v_0} = \frac{q_1^4 q_2^2}{(4\pi\epsilon_0)^3} \frac{2}{3c^3} \frac{1}{m_1^2 v_0} \frac{1}{b^3} \quad (7.3)$$

Esta es la energía irradiada en un único choque con un parámetro de impacto  $b$ . Para obtener la energía irradiada por unidad de longitud se multiplica por la densidad de los objetivos y se integra sobre los parámetros de impacto para obtener lo siguiente:

$$\frac{dW}{d\ell} = n_2 \int \frac{q_1^4 q_2^2}{(4\pi\epsilon_0)^3} \frac{2}{3c^3} \frac{1}{m_1^2 v_0} \frac{1}{b^3} 2\pi b db = n_2 \frac{q_1^4 q_2^2}{(4\pi\epsilon_0)^3} \frac{4\pi}{3c^3} \frac{1}{m_1^2 v_0} \left[ \frac{1}{b} \right]_{b_{min}}^{b_{max}} \quad (7.4)$$

Observe que en este caso no es necesario recurrir a un límite superior a la integración,  $b_{max}$ . Podemos, perfectamente, dejar que  $b_{max}$  tienda al infinito sin ningún tipo de divergencia de la integral, aunque este no es el caso para el límite inferior. Tenemos dos opciones: (a) recurrir al límite en el parámetro clásico de impacto,  $b_{90}$ , donde nuestra aproximación en línea recta se rompe, o, la más probable, (b) recurrir al límite cuántico de siempre, donde la naturaleza de la onda del proyectil se vuelve importante a:

$$b_{min} = b_q = \frac{\hbar}{m_1 v_0} \quad (7.5)$$

Con este límite cuántico para  $b_{min}$  e infinito para  $b_{max}$ , la energía irradiada se transforma en:

$$\frac{dW}{d\ell} = n_2 \frac{q_1^4 q_2^2}{(4\pi\epsilon_0)^3} \frac{4\pi}{3c^3} \frac{1}{m_1 \hbar} \quad (7.6)$$

### 7.1.2 Bremsstrahlung para partículas ligeras o pesadas

Hasta hora hemos tratado el choque manteniendo la generalidad en el proyectil y en los objetivos, pero sólo hemos considerado la radiación procedente del proyectil. A continuación, es necesario que analicemos los tipos de choque que dan origen a un considerable bremsstrahlung. La ecuación (7.6) será de ayuda en este análisis.

En primer lugar, observamos que la velocidad del proyectil no influye en la fórmula. Sin embargo, la masa del proyectil es un efecto muy importante. Los proyectiles ligeros, como los electrones o los positrones, son radiadores mucho más eficientes (por la razón de la masa inversa) que los protones o los núcleos pesados, ya que su aceleración es mucho mayor.

Sin embargo, dicho esto, nos damos cuenta de que si un proyectil choca con un objetivo que es un electrón libre, éste experimentará una aceleración y dará origen a la radiación. Esta radiación procedente de la aceleración de la partícula del objetivo viene dada por la misma expresión anterior, excepto que la masa y la carga de las partículas se han intercambiado:

$$\frac{dW}{d\ell} = n_2 \frac{q_2^4 q_1^2}{(4\pi\epsilon_0)^3} \frac{4\pi}{3c^3} \frac{1}{m_2 \hbar} \quad (7.7)$$

En segundo lugar, respecto a las cargas, existen dos efectos que suelen provocar que los núcleos dominen como si fuesen objetivos a la hora de producir el bremsstrahlung. El primer efecto,

evidente en la ecuación (7.6), es que la radiación es proporcional a  $q_2^2 \propto Z^2$ , que en el caso de los átomos pesados es un factor  $Z$  superior al aumento en la radiación provocado por la existencia de  $Z$  electrones por átomo. El segundo efecto que provoca que las colisiones electrón-electrón sean ineficaces para la producción del bremsstrahlung es que los campos eléctricos irradiados provocados por las aceleraciones del electrón del proyectil y el electrón objetivos se anulan los unos a los otros.

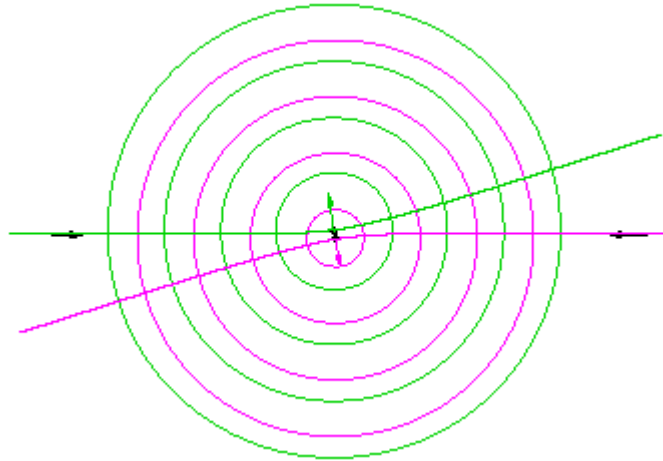


Figura 7.1. Los frentes de onda de radiación bremsstrahlung electrón-electrón están fuera de fase e interfieren de forma destructiva cuando la colisión está cerca comparada con la longitud de onda.

En colisiones electrón-electrón, las aceleraciones del proyectil y del objetivo son iguales y opuestas. Por lo tanto, tienden a dar origen a campos eléctricos irradiados iguales y opuestos, que es necesario sumar coherentemente para obtener el campo total. En realidad, los campos lejanos se anularán, a condición de que sólo exista una pequeña diferencia de fase producida a partir de la diferencia en las posiciones exactas de los electrones del proyectil y del objetivo. Esa diferencia de fase es aproximadamente  $kb$ , donde  $k$  es el número de onda pertinente de la radiación emitida y  $b$  es el parámetro de impacto. Sin embargo, el número de onda característico viene dado por:

$$k = \frac{\omega}{c} \approx \frac{1}{c\tau} \approx \frac{v_0}{cb} \quad (7.8)$$

Por lo tanto  $kb \approx v_0/c$ , o en otras palabras, las contribuciones del proyectil y del objetivo se cancelarán, ya que  $kb \ll 1$  si la velocidad de entrada es sustancialmente inferior a la velocidad de la luz. El bremsstrahlung electrón-electrón sólo es importante para los electrones relativistas. No obstante, observe que el bremsstrahlung electrón-positrón no produce esta cancelación de campo, por lo que puede ser significativo incluso en el caso no relativista.

Para el caso predominante de bremsstrahlung electrón-núcleo, podemos escribir la ecuación (7.6) utilizando las definiciones de la constante de estructura fina  $\alpha = e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c$  y el radio clásico del electrón  $r_e = e^2/4\pi\epsilon_0 m_e c^2$  de la siguiente forma:

$$\frac{dW}{d\ell} = n_2 Z^2 m_e c^2 \alpha \frac{4\pi}{3} r_e^2 \quad (7.9)$$

### 7.1.3 Comparación del Bremsstrahlung y de la pérdida de energía por colisión

Ahora, la cuestión surge de la relativa importancia del bremsstrahlung en el cálculo de la pérdida de energía de una partícula energética en materia. Esto viene determinado por la relación entre la energía irradiada por unidad de longitud, ecuación (7.6), y la pérdida de energía por colisión, ecuación (6.45). Para el bremsstrahlung no relativista de colisiones con núcleos, de tal forma que  $n_2 = n_a$ , esta relación es:

$$\left| \frac{dW}{dK} \right| = Z_1^2 Z_a \alpha \frac{m_e v_0^2}{m_1 c^2} \frac{1}{3 \ln \Lambda} \quad , \quad (7.10)$$

utilizando la definición de constante de estructura fina,  $\alpha$ , e indicando como  $Z_a$  el número atómico de los núcleos.

Inmediatamente vemos que, en colisiones no relativistas, el bremsstrahlung nunca es una contribución importante a la pérdida total de energía ya que, incluso en el caso de las colisiones de electrones con los elementos más pesados,  $Z_2 \alpha \sim 92/137 \approx 0,67$  y  $dW/dK$ , es muy inferior a uno debido a los factores  $v_0^2/c^2$  y  $1/3 \ln \Lambda$ .

Si el proyectil es una partícula pesada, la radiación de las colisiones nucleares es completamente insignificante debido a la relación de masa. Puede preocupar el hecho de que la radiación surja de la aceleración de los electrones atómicos por el paso de una partícula pesada. Sin embargo, esto no puede superar nunca a la energía que se transfiere a los electrones en la colisión, puesto que la aceleración transfiere la energía por colisión, al mismo tiempo que da origen a la radiación. Si tomamos formalmente la relación entre la ecuación (7.7) y la pérdida por colisión, obtenemos la misma expresión que en la ecuación (7.10), excepto que la masa del electrón sustituye a  $m_1$ , confirmando así que el bremsstrahlung es insignificante en una pérdida de energía no relativista de partículas pesadas y electrones.

No obstante, veremos que el bremsstrahlung electrón-núcleo puede ser importante para los electrones relativistas.

### 7.1.4 Distribución espectral

Es posible que deseemos calcular el espectro de la radiación electromagnética, que surge como resultado de la forma del impulso. En el caso de una colisión simple, el espectro de la frecuencia de radiación reflejará el espectro de la frecuencia del impulso. Un impulso infinitamente agudo tiene un espectro de frecuencia uniforme que resulta en una frecuencia infinita. Este impulso de aceleración tiene una duración de  $\tau = b/v_0$  y, de ese modo, un espectro aproximadamente uniforme sólo resulta en una frecuencia angular  $\omega \approx 1/\tau$ .

Por tanto, regrese a la expresión (7.3) para la energía irradiada en una colisión simple con parámetro de impacto  $b$ . Esta energía abarca una anchura espectral total de aproximadamente  $1/\tau$ , por lo que la densidad de energía de la potencia espectral es:

$$\frac{dW}{d\omega} \approx W \tau = \frac{q_1^4 q_2^2}{(4\pi\epsilon_0)^3} \frac{2}{3c^3} \frac{1}{m_1^2 v_0^2 b^2} \quad . \quad (7.11)$$

Este es el espectro de energía irradiada en una colisión simple de un parámetro de impacto precisado. Si deseamos obtener la energía irradiada por unidad de longitud, como siempre, es necesario multiplicar por la densidad del objetivo e integrar  $2\pi b db$  en todos los parámetros de impacto, lo que proporciona una dependencia logarítmica:

$$\frac{d^2W}{d\ell d\omega} = n_2 \frac{q_1^4 q_2^2}{(4\pi\epsilon_0)^3} \frac{4\pi}{3c^3} \frac{1}{m_1^2 v_0^2} \ln \left| \frac{b_{max}}{b_{min}} \right| . \quad (7.12)$$

$b_{min}$  surgirá debido a la naturaleza de la onda del proyectil, a condición de que el correspondiente  $b_{min} = \hbar/m_1 v_0$  sea mayor que  $b_{90}$ . Para cualquier valor fijo de la frecuencia fotónica, el parámetro máximo de impacto,  $\omega$ , al que esta fórmula es adecuada es aquel parámetro para el que  $\tau = b/v_0 \approx 1/\omega$ , ya que, como ya hemos discutido, para los valores superiores de  $b$ , el espectro de potencia desciende rápidamente en virtud del espectro de Fourier de la variación de tiempo del campo eléctrico. Por consiguiente:

$$\Lambda = \frac{b_{max}}{b_{min}} \approx \frac{2m_1 v_0^2}{\hbar\omega} ,$$

(y el factor adicional de 2 es una cuestión eludible para que el valor numérico sea correcto). En realidad, dado que alguna energía y algún momento se llevan a cabo por el fotón irradiado, la velocidad no es simplemente  $v_0$  antes y después de la colisión. Podríamos reconocer ese hecho sustituyendo el valor medio de la velocidad  $\frac{1}{2} \left\{ v_0 + \sqrt{2(K - \hbar\omega)/m_1} \right\}$  en lugar de  $v_0$  en este argumento logarítmico, donde  $K$  es la energía cinética inicial. Si hacemos esto y sustituimos también (de forma arbitraria, pero entonces no hemos realizado un cálculo adecuado si no uno aproximado) el factor  $4\pi$  por 16 en el coeficiente, obtenemos lo siguiente:

$$\frac{d^2W}{d\ell d\omega} = n_2 \frac{q_1^4 q_2^2}{(4\pi\epsilon_0)^3} \frac{16}{3c^3} \frac{1}{m_1^2 v_0^2} \ln \left| \frac{(\sqrt{K} + \sqrt{K - \hbar\omega})^2}{\hbar\omega} \right| . \quad (7.13)$$

Precisamente, esta expresión es lo que se obtiene mediante un cálculo cuántico mecánico no relativista basado en la aproximación de Born, que realizaron primero Bethe y Heitler, 1934.

### 7.1.5 Bremsstrahlung procedente de electrones relativistas

La obtención de cálculos aproximados para el bremsstrahlung a partir de electrones relativistas no es un proceso directo. Una razón principal es que, dado que la energía fotónica emitida se extiende desde cero hasta la energía incidente del electrón, tenemos que tratar con el hecho de que los fotones tienen energías comparables o superiores a las de la masa de reposo del electrón y, de ahí que lleven un momento que es crítico en el proceso de dispersión. Una forma de abordar este proceso es considerar el bremsstrahlung como la dispersión de “fotones virtuales” asociados con el campo del núcleo.

Este enfoque, que es conocido también como el método de Weizsäcker-Williams, en honor a sus primeros defensores, tiene en cuenta el bremsstrahlung en el marco de referencia en el que el electrón es estacionario y el ión pasa por delante del electrón. El electrón experimenta un campo eléctrico de variación en el tiempo del ión, cuyo espectro ya hemos discutido en el contexto de transferencia de energía por colisión y de la resistencia del oscilador. Este campo de variación en el tiempo (al menos a velocidades cercanas a la velocidad de la luz) se puede aproximar como un espectro de ondas planas. Estos son los cuantos virtuales.

Los cuantos virtuales se encuentran con el electrón (inicialmente) estacionario, que puede dispersarlos mediante el proceso de dispersión de Compton. De la misma forma que el momento

del fotón altera el proceso de dispersión de Compton relativo a la dispersión no relativista de Thomson, el bremsstrahlung se ve afectado por el momento del fotón y el retroceso del electrón. Puesto que la sección transversal total de la dispersión de Compton disminuye de forma inversamente proporcional a la energía fotónica para los fotones energéticos, [y, de hecho,  $\sigma_c \approx \sigma_T(3/4)(m_e c^2)/(\hbar\omega)$  para  $m_e c^2 \ll \hbar\omega$ , Jackson pág. 697] en este marco de referencia, los fotones virtuales dispersos (fotones bremsstrahlung) son predominantemente tales que  $\hbar\omega < m_e c^2$ .

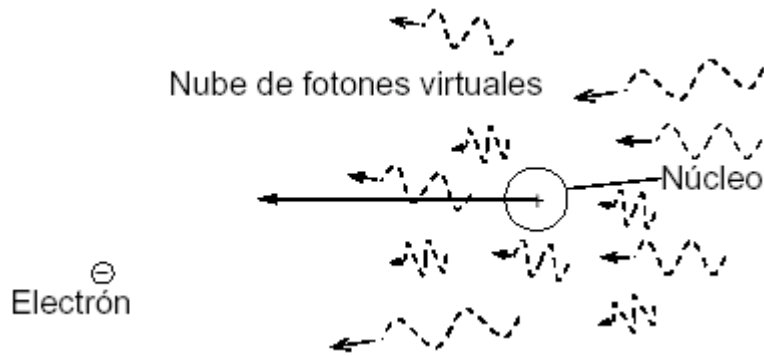


Figura 7.2. En el marco de reposo del electrón, el campo eléctrico del núcleo se considera como una “nube” de fotones virtuales con un espectro de energías, que se dispersan del electrón.

Recuerde que la densidad espectral de la energía fotónica virtual es, esencialmente, independiente de la velocidad [véase la sección sobre colisiones en línea recta].

Por consiguiente, en el caso de las velocidades relativistas, la tasa de dispersión de los fotones de todas las energías es aproximadamente constante, independiente de la energía de colisión, ya que consiste en una tasa constante (de orden la sección transversal de Thomson) de dispersión de una densidad espectral constante de fotón hasta un límite espectral constante ( $m_e c^2$ ). El efecto Doppler relativista eleva a la mayoría de estos fotones en el marco del laboratorio a energías superiores, produciendo que el espectro se extienda hasta  $m_e c^2$ , la energía del electrón en el marco del laboratorio, tal y como se ilustra en el esquema de la figura 7.3. Por consiguiente, la tasa de pérdida de energía es aproximadamente proporcional a la energía de colisión, ya que consta de una tasa constante de dispersión de fotones, aunque con energías de media proporcionales a la energía de colisión,  $m_e c^2$ .

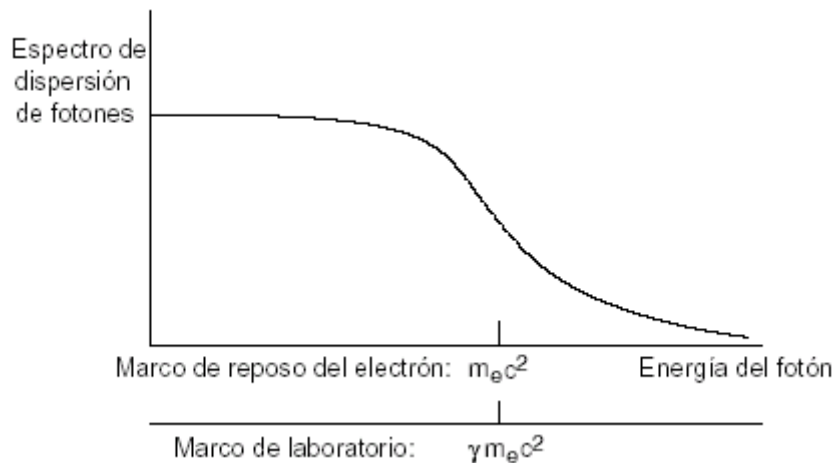


Figura 7.3. El espectro de dispersión de fotones en el marco del laboratorio puede considerarse aproximadamente como un espectro plano para  $m_e c^2$  en el marco de reposo del electrón, Doppler elevado a  $m_e c^2$  en el marco del laboratorio.

Este argumento cualitativo indica que deberíamos esperar que el espectro de pérdida de energía de bremsstrahlung, en la mayor parte del intervalo de energía fotónica, tenga un valor dado aproximadamente por la misma fórmula que en el caso no relativista (7.13), aunque con un valor distinto del factor logarítmico. La fórmula relativista completa se puede escribir de la forma siguiente [Jackson, ecuación 15.34]:

$$\frac{d^2W}{d\ell d(\hbar\omega)} \approx n_2 \frac{q_1^4 q_2^2}{(4\pi\epsilon_0)^3} \frac{16}{3c^3 \hbar} \frac{1}{m_1^2 v_0^2} \ln \left| \frac{2\gamma\gamma' m_e c^2}{\hbar\omega} \right| = n_2 Z_1^4 Z_2^2 \alpha r_e^2 \left( \frac{m_e}{m_1} \right) \frac{16}{3} \left( \frac{m_e c^2}{m_1 v_0^2} \right) \ln \Lambda \quad , \quad (7.14)$$

donde  $\gamma' = \gamma - \hbar\omega/m_e c^2$  es el factor relativista gama del electrón una vez se ha emitido el fotón, y  $v_0 \approx c$ , ya que esta es una colisión relativista.

Se puede escribir una expresión relativista para el espectro de energía fotónica por unidad de longitud, y que es aplicable a todas las energías. Los cálculos mecánico-cuánticos de la aproximación de Born para los proyectiles del electrón producen esta expresión en la forma [Heitler, pág. 250]:

$$\frac{d^2W}{d\ell d(\hbar\omega)} = n_2 Z_2^2 \alpha r_e^2 \frac{\gamma}{\gamma - 1} B \quad , \quad (7.15)$$

donde  $B$  es una función adimensional de la relación  $\hbar\omega/m_e c^2 (\gamma - 1)$ , que sustituye al factor  $(16/3) \ln \Lambda$ . Depende de la energía de colisión (es decir,  $(\gamma - 1)m_e c^2$ ) y de la energía fotónica, pero débilmente. En la figura 7.4 se muestra la forma de esta función  $B$ , que tiene un valor de orden 15 sobre la mayor parte del espectro del fotón. Se puede verificar fácilmente que esta expresión tiene la puesta en escala correcta con la velocidad a alta y baja energía de electrón.

Figura 7.4. La forma espectral del espectro de bremsstrahlung (Heitler).

La magnitud de la sección transversal viene dada por el término:

$$\alpha r_e^2 = 0,580 \times 10^{-31} \text{ m}^{-2} = 0,580 \text{ milibarnios} . \quad (7.16)$$

(un barnio es  $10^{-28} \text{ m}^{-2}$ ).

### 7.1.6 Blindaje y pérdida radiactiva total

Es necesario que expliquemos el blindaje del potencial nuclear por los electrones circundantes del átomo cuando las colisiones son distantes.

El potencial de "Thomas-Fermi" es una aproximación para el potencial nuclear blindado que se puede aproximar de la forma siguiente:

$$\phi = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 r} \exp(-r/a) , \quad (7.17)$$

con la longitud característica  $a \approx 1,4a_0 Z^{-1/3}$ . Esta forma de blindaje es idéntica a la que se aplica a la pérdida de energía por colisión de Coulomb, etc.

Su importancia es mayor a baja energía fotónica (relativa ala energía incidente), ya que las colisiones distantes son más efectivas allí. Reduce la sección transversal (o potencia irradiada), puesto que, principalmente, disminuye el parámetro de impacto máximo efectivo máximo a  $\sim a$ . Las curvas sólidas en la figura son los cálculos aproximados blindados (para el plomo). Las curvas de puntos no son blindadas. Existe una clara gran diferencia.

Los cálculos aproximados del efecto de blindaje se pueden obtener poniendo  $b_{max}$  igual a  $a$  en lugar de  $v_0/\omega$ , resultando en un factor logarítmico que para una colisión no relativista es:

$$\Lambda = \frac{b_{max}}{b_{min}} \approx \frac{m_1 v_0 a}{\hbar} = \frac{m_1 v_0 1.4a_0 Z^{-1/3}}{\hbar} = \left( \frac{1.4\beta}{\alpha Z^{1/3}} \frac{m_1}{m_e} \right) , \quad (7.18)$$

donde la forma final se deduce de:

$$\frac{\hbar}{a_0} = m_e c \alpha \quad (7.19)$$

En realidad, los efectos de blindaje son más importantes para las colisiones relativistas que para las no relativistas. En el caso de las primeras, sustituimos el parámetro de impacto máximo característico  $2\gamma\gamma'c/\omega$  por  $a$ , si el valor de  $a$  es inferior, por lo que el blindaje es importante. Lo será si:

$$\left( \frac{\omega}{2\gamma^2 c} \right) \left( \frac{1.4a_0}{Z^{1/3}} \right) < 1 \quad (7.20)$$

Esta desigualdad se aplicará a todo el rango de frecuencia hasta la máxima energía fotónica posible  $\hbar\omega = \gamma m_e c^2$  si la energía incidente cumple lo siguiente, utilizando de nuevo la ecuación (7.19):

$$\frac{m_1 c^2 1.4a_0}{2\gamma c\hbar Z^{1/3}} = \frac{0.7}{\alpha\gamma Z^{1/3}} \frac{m_1}{m_e} < 1 \quad , \quad (7.21)$$

Este criterio es  $\gamma > 196/Z^{1/3}$  para los proyectiles de electrones y cuando se cumple, se dice que las colisiones están en el rango de “blindaje completo”, y el factor logarítmico se transforma en  $\ln \Lambda \approx \ln(233/Z^{1/3})$ . [Jackson, pág. 722, aunque nuestro cálculo sería  $\ln(192/Z^{1/3})$ ].

Para los electrones no relativistas la pérdida de energía radiactiva es siempre insignificante si se compara con la pérdida por colisión. Este no es el caso de los electrones fuertemente relativistas, ya que la pérdida total de potencia de bremsstrahlung, para la potencia espectral aproximadamente constante, es proporcional a la anchura total del espectro, es decir, a la energía de colisión.

Si tomamos el caso de la sección transversal completamente blindada, en el que el término logarítmico y  $\gamma/(\gamma-1)$  son aproximadamente constantes, la tasa total de pérdida de energía integrada espectralmente viene dada por:

$$\frac{dW}{d\ell} = \int \frac{d^2W}{d\ell d(\hbar\omega)} d(\hbar\omega) = n_2 Z_2^2 \alpha r_e^2 \left(\frac{16}{3}\right) \ln \left| \frac{233}{Z^{1/3}} \right| \gamma m_e c^2 \quad (7.22)$$

Por lo tanto, si escribimos  $K = \gamma m_e c^2$  para la energía total de electrón, obtenemos una ecuación de frenado:

$$-\frac{dK}{d\ell} = K n_2 Z_2^2 \alpha r_e^2 \left(\frac{16}{3}\right) \ln \left| \frac{233}{Z^{1/3}} \right| \quad (7.23)$$

Si lo comparamos con la tasa de frenado de los efectos por colisión (sin contar el bremsstrahlung) hallamos que estas tasas, cuya dependencia de la carga nuclear  $Z$  es distinta, son iguales cuando  $\gamma \approx 200$  para el aire y  $\gamma \approx 20$  para el plomo.

Cuando la pérdida de bremsstrahlung predomina sobre una pérdida por colisión, la energía resulta suficiente para que el blindaje sea completo. Entonces, la tasa de frenado es constante, es decir, la ecuación de pérdida de energía se reduce aproximadamente a:

$$-\frac{dK}{d\ell} = K/\lambda \quad (7.24)$$

teniendo las soluciones decadentes de manera exponencial,  $K \propto \exp(-\ell/\lambda)$ , una longitud característica:

$$\lambda = \left[ n_2 Z_2^2 \alpha r_e^2 \left(\frac{16}{3}\right) \ln \left| \frac{233}{Z^{1/3}} \right| \right]^{-1} \quad (7.25)$$

Las expresiones más citadas son ligeramente distintas [Heitler y, posteriormente, Evans], sustituyendo de la siguiente forma en el límite completamente blindado:

$$\left(\frac{16}{3}\right) \ln \left| \frac{233}{Z^{1/3}} \right| \rightarrow 4 \ln \left| \frac{183}{Z^{1/3}} \right| + \frac{2}{9} = B \quad (7.26)$$

aunque la diferencia es pequeña, dentro de las incertidumbres del enfoque aproximado.

### 7.1.7 Bremsstrahlung de objetivo fuerte.

Los comentarios no se han pasado todavía a máquina.

## 7.2 Radiación de Cerenkov

Ecuaciones de Maxwell con un medio dieléctrico:

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad , \quad \nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (7.27)$$

La corriente consta, por una parte, de la polarización del medio:

$$\mathbf{j}_{\text{medio}} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \quad (7.28)$$

y, por otra parte, de las corrientes “externas”,  $\mathbf{j}_x$ , como la partícula que se mueve a través de ellas. Combinamos la corriente de polarización en el término  $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$  de la forma siguiente:

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}_x + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{j}_x + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon \mathbf{E}) \quad (7.29)$$

donde  $\epsilon$  = constante dieléctrica = permitividad relativa. Elimine  $\mathbf{B}$ :

$$-\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{B}) = \mu_0 \frac{\partial \mathbf{j}_x}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\epsilon \mathbf{E}) \quad (7.30)$$

o,

$$-\nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) + \nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\epsilon \mathbf{E}) = \mu_0 \frac{\partial \mathbf{j}_x}{\partial t} \quad (7.31)$$

Esta es ahora una ecuación de onda, pero con una fuente en el lado derecho. Por tanto, una forma práctica de pensar en la radiación de Cerenkov es considerar la corriente de la partícula rápida como acoplamiento a los osciladores que constan de ondas planas que se propagan con el vector de onda  $\mathbf{k}$  y la frecuencia  $\omega$ . Debido al medio dieléctrico, los “osciladores” de onda satisfacen la forma  $k^2 c^2 = \epsilon \omega^2$ . Este es el resultado estándar en el que el índice de refracción de una onda en un dieléctrico es:

$$\frac{kc}{\omega} = \epsilon^{1/2} = N \quad (7.32)$$

La velocidad de onda es  $\frac{\omega}{k} = c/\epsilon^{1/2}$ , es decir, las ondas viajan a menor velocidad que  $c$ , lo que permite que la partícula se acople a los osciladores de forma resonante. Anteriormente vimos (en el

cálculo de la resistencia del oscilador) que lo que necesita es la resonancia  $[|E(\omega)|^2]$  es lo que proporciona la transferencia de energía]. Para que se de la resonancia con una onda  $\alpha \exp i(k.x - \omega t)$ , es necesaria una partícula con movimiento uniforme (es decir, una partícula que no tenga una frecuencia de oscilación intrínseca) para moverse de tal forma que la fase de onda sea constante en la partícula. La posición de la partícula es  $\mathbf{r} = \mathbf{v}t$  (+ constante), por lo que la resonancia es:

$$\text{constante} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega) t \quad (7.33)$$

Es decir,  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} = \omega$ . Por lo tanto, si elegimos una frecuencia específica  $\omega$ , necesitamos satisfacer al mismo tiempo:

1.  $k = \frac{\omega}{c} \epsilon^{1/2}$  (relación de dispersión de onda)
2.  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} = \omega$  (resonancia con partícula)

Gráficamente: existen soluciones para una partícula que se mueve a mayor velocidad que la fase de onda ( $v > c/\epsilon^{1/2}$ ), ya que  $\frac{\omega}{v} > \frac{\omega}{c} \epsilon^{1/2}$ , de no darse esto no sería así. La radiación de Cerenkov requiere una velocidad “súper luminaria”.

Además, el ángulo que se encuentra entre  $\mathbf{k}$  y  $\mathbf{v}$  simplemente viene dado por:

$$\cos \theta = \frac{\omega}{kv} = \frac{c}{v\epsilon^{1/2}} \quad (7.34)$$

Si  $\epsilon$  es independiente de  $\omega$ , el resultado formará un “frente de onda de choque” óptico. Todos los frentes de onda electromagnéticos se suman coherentemente a lo largo del frente de onda de choque, conduciendo a una singularidad.

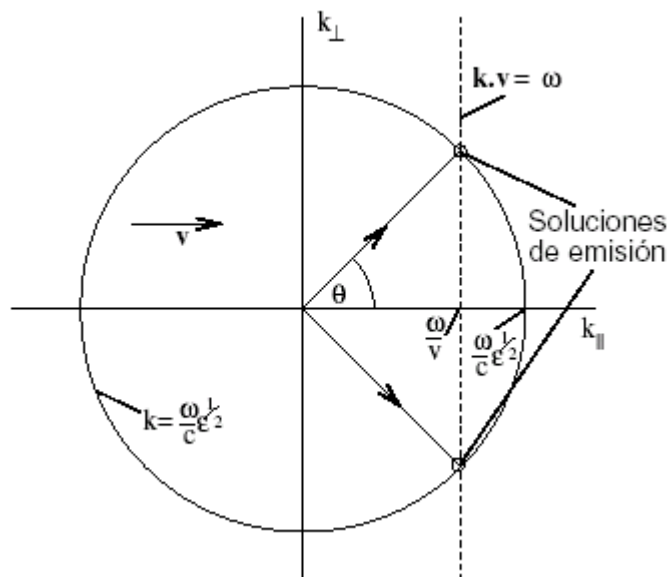


Figura 7.5. Coordenadas de  $k$  para satisfacer la resonancia y la relación de dispersión.

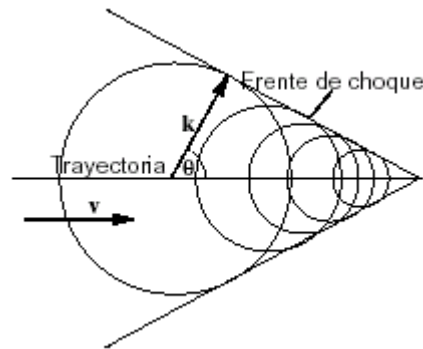


Figura 7.6. Frente de onda de choque que surge de la suma coherente de ondas procedentes de todas las partículas a lo largo de la trayectoria.

En realidad, si  $\epsilon$  es  $> \frac{c^2}{v^2}$  para todas las frecuencias, entonces se irradia una cantidad infinita de energía por unidad de longitud. Este es un reflejo de la singularidad en el frente de onda de choque. La variación de  $\epsilon$  con la frecuencia es crucial para el tratamiento adecuado de la emisión de Cerenkov. Los materiales ópticos tienen un índice de refracción que varía con la frecuencia (el prisma divide el espectro de luz blanca). Generalmente, la resonancia en átomos de medio se da en ultravioleta. Puede darse radiación para todas las frecuencias hasta la resonancia (distinta resonancia de Cerenkov) y hasta el lugar donde  $\frac{v}{c} = \frac{1}{\epsilon^{1/2}}$ . La variación  $\epsilon(\omega)$  elimina la singularidad y proporciona una variación espectral y un rango espectral finito.

### 7.2.1 Resistencia de acoplamiento

Nos interesan las ondas transversales:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (\Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{E} = 0) \quad (7.35)$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\epsilon \mathbf{E}) = -k^2 \mathbf{E} + \frac{\omega^2 \epsilon}{c^2} \mathbf{E} = \mu_0 \frac{\partial \mathbf{j}_x}{\partial t} \quad (7.36)$$

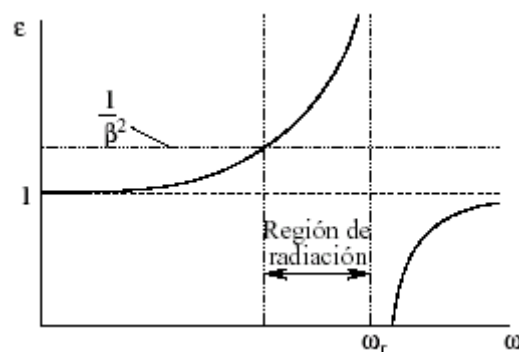


Figura 7.7. Variación típica de la permitividad relativa de un material transparente.

$\mathbf{E}$  es perpendicular a  $\mathbf{k}$ . Si  $\mathbf{v}$  está en la dirección  $x$ ,  $\mathbf{k} = k(\cos \theta, \sin \theta)$

$$\mathbf{E} = E (\sin \theta, \cos \theta, 0) \quad \text{o} \quad (7.37)$$

$$= E (0, 0, 1) \quad \text{son posibles polarizaciones} \quad (7.38)$$

Pero el vector  $\frac{\partial \mathbf{j}_x}{\partial t}$  determina el acoplamiento a la onda.

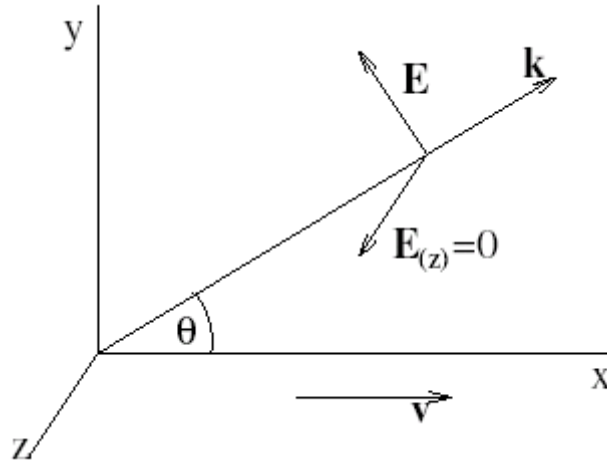


Figura 7.8. La polarización de la emisión de Cerenkov se da simplemente en el plano de emisión. El acoplamiento a  $\mathbf{E}_{(z)}$  es cero.

Para una partícula de un punto en movimiento,  $\mathbf{j}_x = q\mathbf{v}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{v}t)$ , que solamente tiene un componente x. De ahí que:

1. No se asocia en absoluto a la polarización  $E_z$ .
2. El acoplamiento a la polarización en el plano,  $\mathbf{E} = E(\sin\theta, \cos\theta)$  sea proporcional a  $\frac{E_j}{E_j}$ , es decir,  $\sin\theta$ .

Como punto final se observa que el conductor es  $\frac{\partial \mathbf{j}_x}{\partial t}$ , por lo que, debido a que el espectro de  $j_x$  es plano al ser una función delta en el tiempo, el espectro del término conductor es  $\propto (i)\omega$ . Todo esto se puede realizar de forma rigurosa. El resultado es que la energía irradiada por unidad de longitud de la trayectoria es:

$$\frac{dW}{d\ell} = \frac{q_1^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c^2} \int_{\epsilon(\omega) > \frac{1}{\beta^2}} \left(1 - \frac{c^2}{v^2\epsilon(\omega)}\right) \omega d\omega \quad [\text{Frank, Tamm 1937}] \quad (7.39)$$

y podemos identificar el término como:

$$1 - \frac{c^2}{v^2\epsilon} = 1 - \cos^2 \theta = \sin^2 \theta \quad (7.40)$$

es decir, la dependencia del acoplamiento del ángulo de radiación. Es cuadrado porque la energía pasa como el cuadrado del campo eléctrico.

$$\omega \text{ surge de } \frac{\partial}{\partial t} j_x. \quad (7.41)$$

Esta ecuación proporciona también el espectro de frecuencia de la potencia irradiada (el integrando) pero solamente es distinta de cero para frecuencias tales que  $\varepsilon > \frac{c^2}{v^2 \varepsilon}$  o  $v >$  velocidad de fase  $\frac{c}{\varepsilon^{1/2}}$ . La energía emitida por unidad de longitud se calcula haciendo que  $1 - \frac{c^2}{v^2 \varepsilon}$  sea igual a un valor medio, por lo que:

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} \left(1 - \frac{c^2}{v^2 \varepsilon}\right) \omega \, d\omega \simeq \frac{1}{2} [\omega_2^2 - \omega_1^2] \left(1 - \frac{c^2}{v^2 \bar{\varepsilon}}\right) \quad (7.42)$$

donde  $\omega_{2,1}$  son los límites superior e inferior de la región espectral de emisión.

$$\begin{aligned} \frac{dW}{d\ell} &= \frac{q_1^2}{4\pi \varepsilon_0} \frac{1}{c^2} \frac{1}{2} [\omega_2^2 - \omega_1^2] \left(1 - \frac{c^2}{v^2 \bar{\varepsilon}}\right) \\ &= \alpha \frac{\omega_2}{c} \frac{1}{2} \left[ \hbar \omega_2 - \frac{\hbar \omega_1^2}{\omega_2} \right] \left(1 - \frac{c^2}{v^2 \bar{\varepsilon}}\right) \\ &\simeq \alpha \frac{\omega_2}{c} \frac{1}{2} \hbar \omega_2 \left(1 - \frac{c^2}{v^2 \bar{\varepsilon}}\right) \quad \text{if } \omega_1 \ll \omega_2. \\ &= \alpha \frac{\pi}{\lambda_2} \hbar \omega_2 \left(1 - \frac{c^2}{v^2 \bar{\varepsilon}}\right) \quad \left(\frac{\lambda}{2\pi} = \frac{c}{\omega}\right) \end{aligned} \quad (7.43)$$

El valor aproximado de esta energía por unidad de longitud se puede calcular observando que la resonancia (donde  $\bar{\varepsilon} \rightarrow \infty$ ) en la respuesta óptica de lentes se acerca generalmente a  $\lambda_2 = 100 \text{ nm} \Rightarrow \hbar \omega_2 = 12 \text{ eV}$ , y cerca de esa resonancia  $\frac{c^2}{v^2 \bar{\varepsilon}} \rightarrow 0$ , por lo que:

$$\frac{dW}{d\ell} \sim \alpha \pi \frac{1}{10^{-7}} \cdot 12 \text{ eV/m} = 2.7 \times 10^6 \text{ eV/m} \quad (7.44)$$

Esta es una diminuta comparación con la tasa de pérdida de energía de otros procesos. El número de fotones emitidos por unidad de longitud es incluso más sencillo:

$$\frac{dN}{d\ell} \simeq \frac{q_1^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\hbar c^2} [\omega_2 - \omega_1] \left[ 1 - \frac{c^2}{v^2\epsilon} \right] \quad (7.45)$$

$$= \alpha 2\pi \left[ \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right] \left[ 1 - \frac{c^2}{v^2\epsilon} \right] \quad (7.46)$$

$$\simeq \alpha 2\pi \frac{1}{\lambda_2} \quad (\text{for } \omega_2 \gg \omega_1). \quad (7.47)$$

[Y la distribución espectral del fotón es:

$$\frac{dN}{d\ell d\omega} = \alpha \frac{1}{c} \sin^2 \theta = \alpha \frac{1}{c} \left[ 1 - \frac{c^2}{v^2\epsilon} \right]. \quad (7.48)$$

El cálculo aproximado de los fotones (total) / la longitud para  $\lambda_2 \approx 100 \text{ nm}$  :

$$\frac{dN}{d\ell} \simeq 5 \times 10^5 \text{ fotones / m} \quad (7.49)$$

El alcance óptico ( $\lambda \approx 400 - 600 \text{ nm}$ ) contiene aproximadamente  $\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) = 0,083$  veces más que ( $\times \sin^2 \theta$ ), por lo que puede ser tan pequeño como  $\frac{1}{100}$  de este total  $\sim 5$  fotones / mm.

## 7.2.2 Espectro de energía

El espectro de energía proporcional a:

$$\omega \left( 1 - \frac{c^2}{v^2\epsilon} \right) \quad (7.50)$$

es:

1. amplio y llano.
2. más grande a un valor mayor de  $\omega$  (más pequeño  $\lambda$ ) “azul” porque:

(a) factor  $\omega$

(b)  $\epsilon$  aumenta cuando lo hace  $\omega \Rightarrow 1 - \frac{c^2}{v^2\epsilon}$

Resultado: luz blanca azulada. Observado por Marie Curie, 1910. Estudiado en detalle por Cerenkov, 1935. Explicado por Frank & Tamm, 1937 (clásica). Utilizado para los detectores desde mediados de 1940.