

# Capítulo 4

## Radiación mediante cargas en movimiento

### 4.1 Potenciales y campos de una carga puntual en movimiento

La solución general:

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{[\rho]}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \quad (4.1)$$

parece como si fuese a proporcionar directamente el resultado para una carga puntual de la misma forma que la solución estática. Para una carga puntual estacionaria  $\rho = q\delta(\mathbf{x} - \mathbf{r})$ , donde  $\mathbf{r}$  es la posición de la carga,  $\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}|}$ . Abreviando, escribamos  $R \equiv |\mathbf{x} - \mathbf{r}|$ . Uno puede pensar que para una carga en movimiento  $\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} [1/R]$ , lo cual es erróneo. No nos hemos ocupado de los derivados, etc. de cantidades retardadas.

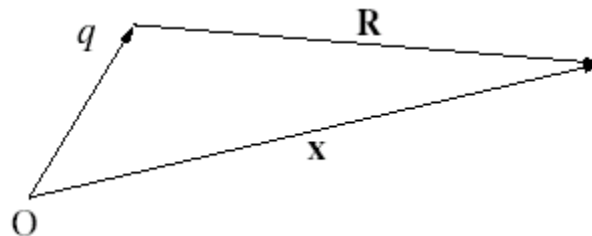


Figura 4.1. Coordenadas vectoriales de carga y de punto de campo.

Vayamos con cuidado. La densidad de carga es  $\rho(\mathbf{x}, t) = q\delta(\mathbf{x} - \mathbf{r}(t))$  y, ahora, se permite que  $\mathbf{r}$  varíe con el tiempo, por lo que queremos que:

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}, t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\delta(\mathbf{x}' - \mathbf{r}(t'))}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \quad , \quad t' = t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}(t')|} \int \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{r}(t')) d^3x' \end{aligned} \quad (4.2)$$

donde aprovechamos el hecho de que la función delta es no cero únicamente donde su argumento es cero, por lo que toda la contribución a la integral procede del lugar en el que  $\mathbf{x}' = \mathbf{r}(t')$ , que es donde la partícula está en tiempo retardado, es decir:

$$\mathbf{r} \left( t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c} \right) \quad (4.3)$$

[Esto requiere una notación autoreferencial, que es una de las razones por las que la escribimos  $[[\mathbf{r}]]$ ]. A continuación, tenemos que realizar la integral  $\int \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{r}(t)) d^3x'$ . Ésta no es unitaria, ya que  $\mathbf{x}'$  aparece dentro de  $\mathbf{r}(t)$  y  $\mathbf{x}'$ . La función delta se define tal que:

$$\int \delta(\mathbf{y}) d^3y = 1 \quad (4.4)$$

Pero, ahora, este argumento es  $\mathbf{y} = \mathbf{x}' - \mathbf{r}(t)$ . Necesitamos relacionar  $d^3y$  con  $d^3x'$  para la integral que deseamos. Considere el gradiente de un componente:

$$\begin{aligned} \nabla' y_i &= \nabla' (x'_i - r_i(t)) = \nabla' [[x'_i - r_i]] \\ &= [[\nabla' (x'_i - r_i)]] + \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{c|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (x'_i - r_i) \right] \\ &= [[\nabla' x'_i]] + \frac{1}{c} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \left[ -\frac{\partial r_i}{\partial t} \right] \end{aligned} \quad (4.5)$$

[puesto que  $r_i$  es una función de  $t$  pero no directamente de  $\mathbf{x}'$ ]. Seleccione ejes tal que  $\mathbf{x}' = (x'_1, x'_2, x'_3)$  con componente 1 en la dirección  $\mathbf{R} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$ . Entonces, el segundo término está presente únicamente para el componente  $x_1$ , no para los otros dos (ya que son  $\perp$  para  $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$ ). Además,  $(\nabla' x'_i) = \delta_{ij}$ . Por consiguiente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_1}{\partial x'_1} &= 1 + \frac{1}{c} \left[ -\frac{\partial r_1}{\partial t} \right] \\ \frac{\partial y_2}{\partial x'_2} &= 1 \quad ; \quad \frac{\partial y_3}{\partial x'_3} = 1 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} d^3y &= dy_1 dy_2 dy_3 = \left( 1 - \frac{1}{c} \left[ \frac{\partial r_1}{\partial t} \right] \right) dx'_1 dx'_2 dx'_3 \\ &= \left[ 1 - \frac{1}{c} \frac{\mathbf{R}}{R} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right] d^3x' \end{aligned} \quad (4.7)$$

Escribamos:

$$\kappa \equiv 1 - \frac{1}{c} \frac{\mathbf{R}}{R} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = 1 - \frac{1}{c} \hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{v} \quad (4.8)$$

Entonces:

$$\int \delta(\mathbf{y}) d^3 \mathbf{x}' = \int \delta(\mathbf{y}) \frac{d^3 \mathbf{y}}{[\kappa]} = \frac{1}{[\kappa]} \quad (4.9)$$

Y, por último:

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\kappa R} \right] \quad (4.10)$$

Exactamente mediante el mismo proceso, podemos obtener el valor correcto para cada componente de  $\mathbf{A}$  y, en total ( $\mathbf{v} = \partial \mathbf{r} / \partial t$ ),  $\mathbf{j} = q\mathbf{v}\delta$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \left[ \frac{\mathbf{v}}{\kappa R} \right] \quad (4.11)$$

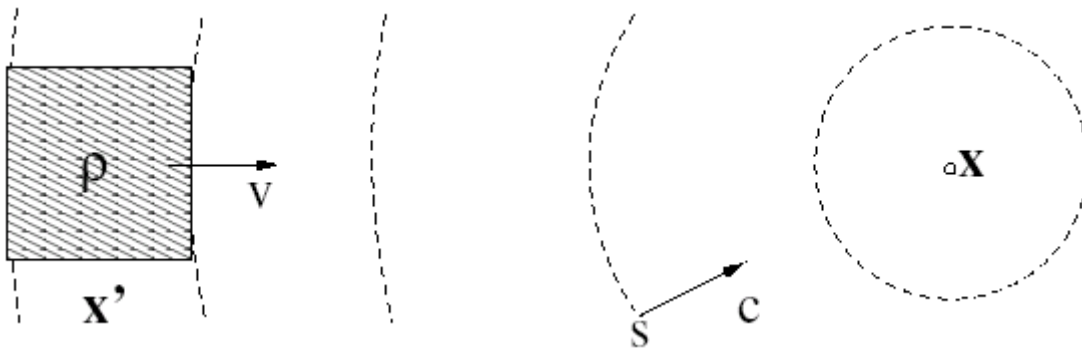


Figura 4.2. Integral de densidad de carga sobre una carga cuadrada en movimiento en tiempo retardado.

Estas expresiones se denominan los potenciales de “Liénard-Wiechert” de una carga puntual en movimiento. Puesto que el factor de corrección  $\kappa$  es tan importante, y la literatura científica está regada de artículos erróneos, obtengamos el resultado de manera gráfica. La integral retardada  $\int [[\rho]] d^3 x'$  se puede considerar como compuesta de contribuciones de una superficie esférica  $S$  que barre hacia dentro en dirección al punto (de campo) de observación  $\mathbf{x}$ , a la velocidad de la luz, llegando en el tiempo  $t$ . La carga que integramos es el valor de  $\rho$  cuando la superficie  $S$  pasa. Si estamos tratando con una densidad de carga localizada, como se ilustra, la superficie se puede aproximar como planar en la carga. Si la región de carga se mueve rígidamente a la velocidad  $v$  hacia  $\mathbf{x}$ , su influencia o contribución a la integral aumenta, ya que para el momento que la superficie  $S$  ha barrido de delante atrás, la carga se ha desplazado. Por consiguiente, el volumen de la

contribución (en  $x'$ ) es mayor por el radio  $\frac{L'}{L}$  del  $\frac{\text{volumen adicional} + \text{volumen de la carga}}{\text{volumen de la carga}}$ . ¿A qué cantidad corresponde esto? ¿Cuándo alcanza  $S$  la parte frontal de la carga? En el momento que  $S$  alcanza la parte frontal:

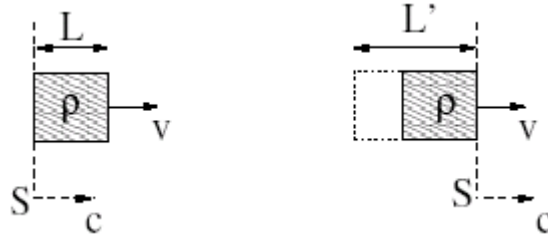


Figura 4.3. Instantáneas del momento que la superficie de integración,  $S$ , cruza las partes posterior y frontal de la carga.

$$L' = c\Delta t = v\Delta t + L \quad (4.12)$$

Por lo tanto:

$$\Delta t = (c - v)L \quad \text{y} \quad L' = \frac{c}{c - v}L = \frac{1}{1 - \frac{v}{c}}L \quad (4.13)$$

Por consiguiente, al igual que anteriormente:

$$\frac{L'}{L} = \frac{1}{1 - \frac{v}{c}} = \frac{1}{\kappa} \quad (4.14)$$

Observe que la velocidad transversal no hace nada y que las aproximaciones implícitas en considerar  $S$  planar, se transforman en exactas para una carga puntual, con extensión espacial  $\rightarrow 0$ . La cantidad  $\kappa$  puede referirse también a la relación de intervalos de tiempo,  $dt$ , con los correspondientes intervalos de tiempo retardado,  $dt'$ .

$$t' = t - \frac{R'}{c} \quad \text{o} \quad t = t' + \frac{R'}{c} \quad (4.15)$$

Por lo que:

$$\frac{dt}{dt'} = 1 + \frac{1}{c} \frac{dR'}{dt'} \quad (4.16)$$

Sin embargo:

$$\begin{aligned} \frac{dR'}{dt'} &= \frac{d}{dt'} |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = \frac{d}{dt'} \{(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')\}^{1/2} \\ &= \frac{-\mathbf{v} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{R'} = -\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{R}'}{R'} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Por consiguiente:

$$\frac{dt}{dt'} = 1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{R}'}{cR'} = \kappa \quad (4.18)$$

En sentido estricto, éste es el valor de  $\kappa$  en tiempo retardado, cuando la superficie  $S$  pasa la partícula que se necesita aquí en el caso de que  $v$  esté cambiando.

## 4.2 Potencial de una carga puntual en movimiento uniforme

Un caso especial importante es cuando  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \text{constante}$ . Lorentz derivó su transformación a partir de la solución retardada, que es la base de la relatividad especial. Tome ejes tales como  $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{x}}$ . Es necesario que calculemos el potencial en  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  y supongamos que la partícula se encuentra en el origen en el momento que interesa, ( $t = 0$ ). La parte complicada es simplemente calcular el tiempo retardado  $t'$  y la posición  $\mathbf{x}'$ . Por definición:

$$c^2 (-t')^2 = R'^2 = (x - vt')^2 + y^2 + z^2 \quad (4.19)$$

Sustituya  $(-t')v = -x'$

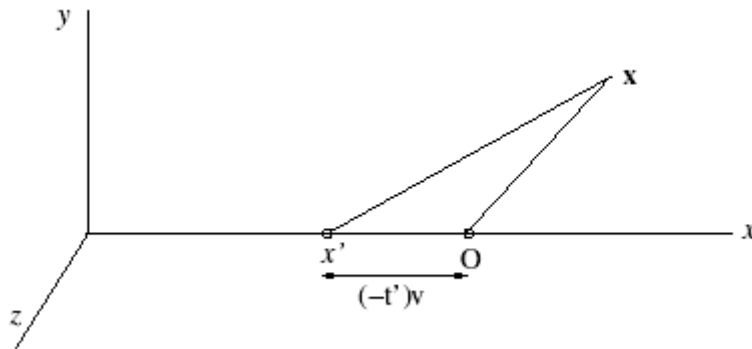


Figura 4.4. Coordenadas de una carga en movimiento uniforme en  $\mathbf{x}(t)$ .

$$\frac{c^2}{v^2} x'^2 = (x - x')^2 + y^2 + z^2 \quad (4.20)$$

<sup>1</sup>[Feynman 21-6]

Reúna los términos:

$$x'^2 \left( \frac{c^2}{v^2} - 1 \right) + 2xx' - (x^2 + y^2 + z^2) = 0 \quad (4.21)$$

La solución:

$$\left( \frac{c^2}{v^2} - 1 \right) x' = -x \pm \sqrt{x^2 + (x^2 + y^2 + z^2) \left( \frac{c^2}{v^2} - 1 \right)} \quad (4.22)$$

(en la que debe tomarse el signo -).

$$R' = -\frac{c}{v}x' = \frac{c}{v} \frac{x + \sqrt{x^2 + (x^2 + y^2 + z^2) \left( \frac{c^2}{v^2} - 1 \right)}}{\frac{c^2}{v^2} - 1} \quad (4.23)$$

También necesitamos el valor retardado de  $\kappa$ , es decir,  $1 - (R'/R).(v/c)$ .

$$\kappa' = 1 - \frac{v}{c} \cdot \frac{x - x'}{R'} \quad (4.24)$$

Y:

$$\kappa' R' = R' - \frac{v}{c} (x - x') = R' - \frac{v}{c} \left( x + \frac{v}{c} R' \right) = \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) R' - \frac{v}{c} x \quad (4.25)$$

Si sustituimos para  $R'$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} \kappa' R' &= \frac{v}{c} \left\{ x + \sqrt{x^2 + (x^2 + y^2 + z^2) \left( \frac{c^2}{v^2} - 1 \right)} - x \right\} \\ &= \frac{v}{c} \sqrt{x^2 + (x^2 + y^2 + z^2) \left( \frac{c^2}{v^2} - 1 \right)} \\ &= \sqrt{\frac{x^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} + y^2 + z^2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \end{aligned} \quad (4.26)$$

Este es el valor en el tiempo  $t = 0$ . En cualquier otro tiempo  $t$ , la partícula se encuentra en la posición  $x = vt$ , en lugar de en el origen,  $x = 0$ . Nuestra fórmula fue desarrollada para la partícula en el origen.

Por lo tanto, para utilizarla, debemos desplazar el origen a  $x = vt$ , lo que significa que simplemente tenemos que reemplazar  $x$  en esta fórmula con  $x - vt$ . Por último, si sustituimos el resultado general para  $k'R'$  en la fórmula de Liénard-Wiechert, obtenemos:

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\kappa R} \right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \sqrt{\left( \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right)^2 + y^2 + z^2}} \quad (4.27)$$

Observe como tenemos los comienzos de la relatividad. Conseguimos dependencia del potencial electromagnético en las coordenadas espaciales que solamente pueden ser consistentes con la fórmula en el marco de referencia en el que la partícula está en reposo:

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)}} \quad (4.28)$$

si la coordenadas se transforman en:

$$x_1 = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad , \quad y_1 = y \quad , \quad z_1 = z \quad . \quad (4.29)$$

Esta es la (parte espacial de la) transformación de Lorentz, incorporando la contracción de Fitzgerald en la dirección del movimiento. A continuación, es necesario que reconozcamos también que existe un potencial vectorial:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \left[ \frac{\mathbf{v}}{\kappa R} \right] = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \sqrt{\left( \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right)^2 + y^2 + z^2}} \quad (4.30)$$

Por lo tanto, el campo eléctrico tiene ambas contribuciones:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \quad . \quad (4.31)$$

Para evaluarlas, indique mediante  $R''$  la cantidad en el denominador de  $\phi$  y  $A$ :

$$R'' \equiv \sqrt{\left( \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)^2 + y^2 + z^2} \quad . \quad (4.32)$$

[Observe que esto no es  $R'$ , el radio retardado]. Sus derivados son:

$$\frac{\partial R''}{\partial x} = \frac{x - vt}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{1}{R''} \quad ; \quad \frac{\partial R''}{\partial y} = \frac{y}{R''} \quad ; \quad \frac{\partial R''}{\partial z} = \frac{z}{R''} \quad ; \quad \frac{\partial R''}{\partial t} = \frac{-v(x - vt)}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) R''} \quad . \quad (4.33)$$

Por consiguiente:

$$\nabla \frac{1}{R''} = \frac{-1}{R''^2} \nabla R'' = -\frac{1}{R''^3} \left( \frac{x - vt}{1 - v^2/c^2}, y, z \right) \quad (4.34)$$

dado:

$$-\nabla \phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{1}{R''^3} \left( \frac{x - vt}{1 - v^2/c^2}, y, z \right) \quad (4.35)$$

y:

$$-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{1}{R''^3} \left( \frac{(-v^2/c^2)(x - vt)}{(1 - v^2/c^2)}, 0, 0 \right) \quad (4.36)$$

por lo que:

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \mathbf{A} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{1}{R''^3} (x - vt, y, z) \quad . \quad (4.37)$$

Este es un excelente resultado. Demuestra que, a pesar que las contribuciones para que  $\mathbf{E}$  surja de la posición retardada de la partícula, la dirección de  $\mathbf{E}$  es, de hecho, radial en sentido hacia fuera desde la posición instantánea (es decir, no retardada). El campo  $\mathbf{E}$  en  $t = 0$  se encuentra a lo largo del vector del radio  $(x, y, z)$ . El campo eléctrico no es exactamente el mismo que para una carga estacionaria.

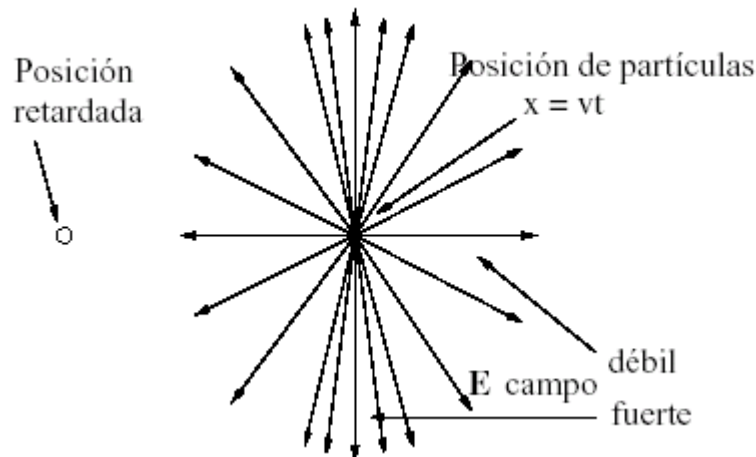


Figura 4.5. Las líneas del campo eléctrico de una carga en movimiento uniforme señalan hacia el exterior desde la posición instantánea (no retardada), pero la resistencia no es simétrica.

El campo no es esféricamente simétrico, ya que es proporcional a:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left( \left( \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right)^2 + y^2 + z^2 \right)^{3/2}} \quad (4.38)$$

que la hace más fuerte en la dirección perpendicular, y más débil en la dirección paralela. El campo magnético se puede obtener a partir de  $\mathbf{B} = \nabla \Lambda \mathbf{A}$  reconociendo  $\nabla \Lambda(f\mathbf{v}) = -\mathbf{v} \Lambda \nabla f$ , si  $\mathbf{v}$  es constante. De ahí que, utilizando  $A = v\phi/c^2$ :

$$\mathbf{B} = -\frac{\mathbf{v}}{c^2} \wedge \nabla \phi = \frac{\mathbf{v}}{c^2} \wedge \left( \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \wedge \mathbf{E} \quad (4.39)$$

[la última forma utiliza el hecho de que  $(\mathbf{A})$  y  $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$  son paralelos a  $\mathbf{v}$ , por lo que  $\mathbf{v} \wedge \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = 0$ . Esta expresión para el campo magnético se puede describir también, observando que  $\mathbf{E}$  se encuentra en la dirección de  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{R}' \wedge \mathbf{R} = (t - t')\mathbf{v} \wedge \mathbf{R}$  y  $t - t' = R'/c$ , por lo que  $\mathbf{v} \wedge \mathbf{E} = (\mathbf{R}'c/R') \wedge \mathbf{E}$ . En resumen:

	$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{vt}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left( \left( \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right)^2 + y^2 + z^2 \right)^{3/2}} \quad (4.40)$
y	$\mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \wedge \mathbf{E} = \frac{1}{cR'} \mathbf{R}' \wedge \mathbf{E} \quad (4.41)$

Una forma práctica de considerar el resultado de que el campo eléctrico sigue siendo radial pero con una distribución esféricamente asimétrica, es pensar en lo que les sucede a las líneas de campo cuando se ven el marco de referencia del laboratorio [componentes  $(x, y, z)$ ] comparado con el marco de referencia en el que la partícula está en reposo [componentes  $(x_1, y_1, z_1)$ ]. Resulta que el campo eléctrico que hemos calculado es exactamente el que se obtendría suponiendo que la distribución esféricamente simétrica de las líneas de campo en el marco de reposo simplemente se comprime con junto con el resto del espacio en la dirección  $x$ , a través de la transformada de coordenadas de la ecuación 4.29. Esta contracción se ilustra en la figura 4.6.

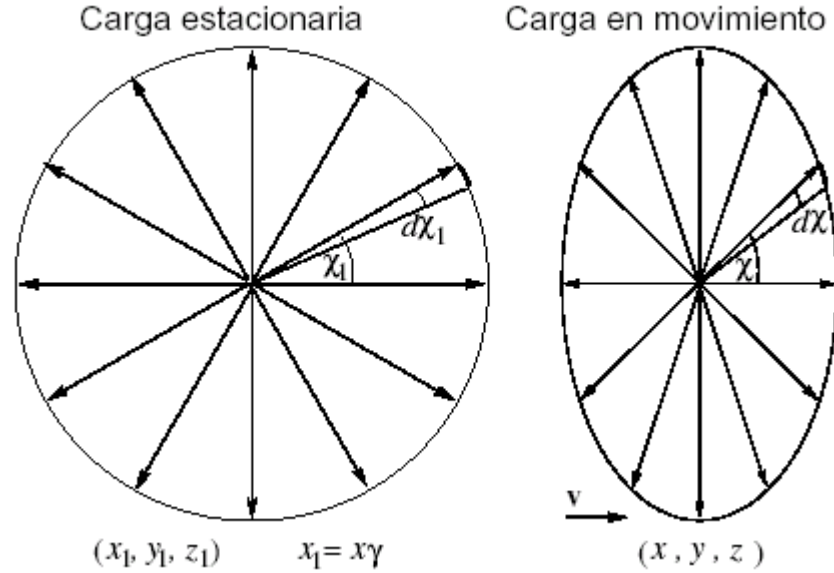


Figura 4.6. Contracción del espacio que proporciona la distribución de líneas del campo eléctrico de una carga en movimiento.

Para una compresión unidimensional puramente geométrica como esta, los ángulos entre la dirección de  $\mathbf{R}$  y  $\mathbf{v}$  (para los dos casos) se relacionan mediante:

$$\tan \chi_1 = y_1/x_1 = y/(\gamma x) = (1/\gamma) \tan \chi \quad , \quad (4.42)$$

donde,  $\gamma = 1/\sqrt{(1 - v^2/c^2)}$ , por lo que:

$$\cos \chi_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \chi_1}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (1/\gamma)^2 \tan^2 \chi}} \quad . \quad (4.43)$$

A continuación, el elemento de un ángulo sólido, correspondiente al incremento de un ángulo  $d\chi$  es  $d\Omega = 2\pi \sin \chi d\chi$ , y:

$$\begin{aligned} \sin \chi_1 d\chi_1 = -d(\cos \chi_1) &= -d\left(\frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + \tan^2 \chi}}\right) = \frac{\gamma \tan \chi \sec^2 \chi}{(\gamma^2 + \tan^2 \chi)^{3/2}} d\chi \\ &= \frac{\gamma}{(\gamma^2 \cos^2 \chi + \sin^2 \chi)^{3/2}} \sin \chi d\chi \quad . \end{aligned} \quad (4.44)$$

Por lo que la relación entre los ángulos sólidos correspondientes es:

$$\begin{aligned}
d\Omega_1 &= \frac{\gamma}{(\gamma^2 \cos^2 \chi + \sin^2 \chi)^{3/2}} d\Omega \\
&= \frac{\gamma R^3}{(\gamma^2 x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} d\Omega \\
&= \frac{\gamma R^3}{R'^3} d\Omega \quad , \quad (4.45)
\end{aligned}$$

donde  $\mathbf{R} = x^2 + y^2 + z^2$ . Por lo tanto, si las líneas de campo se comprimen de esta forma puramente geométrica, el número de líneas de campo por ángulo sólido unitario, que es proporcional a la intensidad de campo eléctrico, en el marco de laboratorio es igual al valor en el marco de reposo por el factor  $d\Omega_1/d\Omega = \gamma R^3/R'^3$ . Por consiguiente, la comprensión geométrica conduciría a un campo eléctrico:

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{R}}{R^3} \frac{\gamma R^3}{R'^3} \quad . \quad (4.46)$$

Esto es, precisamente, lo que calculamos directamente a partir de las ecuaciones de los campos. En otras palabras, podemos considerar que el campo eléctrico asimétrico de la ecuación 4.40 surge de la comprensión del espacio correspondiente a la transformación de Lorentz (ec. 4.29).

Aquí no estamos recurriendo a la transformación de Lorentz basada en un entendimiento de la relatividad especial. De hecho, lo contrario es la situación histórica. La transformada de Lorentz fue parte de la base anterior para el descubrimiento de la relatividad. Véase el análisis sobre electromagnetismo como base de la relatividad en Jackson 1998, págs. 514-518. Las ecuaciones de Maxwell ya son totalmente relativistas. No necesitan rectificación para efectos relativistas de la forma que sí la necesitan las leyes de Newton, por ejemplo. Por supuesto, el propósito es más fuerte que eso: las ecuaciones de Maxwell solamente pueden tenerse en cuenta cuando se aplica la relatividad especial (es decir, las transformaciones de Lorentz y no las galileanas). Nuestro tiempo no llega para cubrir la relatividad, pero tenemos que dedicar un tema especial para este fin, ya que las ecuaciones de electromagnetismo ya son relativistas.

### 4.3 Campos de una carga generalmente en movimiento

Los potenciales de Lienard Wiechert proporcionan la solución potencial general. De éstos podemos obtener los campos generales  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  a partir de una partícula en movimiento con velocidad arbitraria: no solamente un valor de  $\mathbf{v}$  uniforme. Puesto que los dos potenciales y campos dependen únicamente de los valores en tiempo retardado, nuestro cálculo será casi el mismo que para el movimiento uniforme, a excepción de que debemos utilizar el valor de  $\mathbf{v}$  en ese tiempo retardado y justificar posibles derivados de tiempo de  $\mathbf{v}$ . Nuestras derivadas de  $\phi$  y  $\mathbf{A}$  atraviesan exactamente igual que antes, excepto que el origen de las coordenadas se encuentra en el punto  $\mathbf{x}' + \mathbf{v}'t'$  a lo largo de la trayectoria proyectada de la partícula si continuase y pasase el tiempo retardado con una velocidad constante  $\mathbf{v}'$ . [Aquí estamos considerando  $\mathbf{v}$  como principal para recordar que éste es el valor retardado que necesitamos].

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{(x - v't) + (y^2 + z^2) \left(1 - \frac{v'^2}{c^2}\right)}} \quad (4.47)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\mathbf{v}'}{\sqrt{(x - v't) + (y^2 + z^2) \left(1 - \frac{v'^2}{c^2}\right)}} \quad (4.48)$$

A continuación, necesitamos obtener los campos por diferenciación. Obtenemos exactamente los mismos términos que anteriormente, además de otros términos adicionales que surgen de la derivada de tiempo de  $\mathbf{v}$ . Podríamos realizarlo directamente teniendo en cuenta todas las contribuciones, pero en su lugar, vamos a realizar un cálculo vectorial comenzando con las formas de Lienard-Wiechert:

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\kappa R} \right] \quad ; \quad \mathbf{A} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left[ \frac{\mathbf{v}}{\kappa R} \right] \quad (4.49)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ -\nabla \left[ \frac{1}{\kappa R} \right] - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\mathbf{v}}{\kappa R} \right] \right\} \quad (4.50)$$

De nuevo, es necesario tener mucho cuidado con los diferenciales. Para cualquier función  $f(\mathbf{x}, t)$ ,

$$\nabla[f] = \nabla f \left( \mathbf{x}, t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c} \right) \quad (4.51)$$

$$= [\nabla f] - \left[ \frac{\partial f}{\partial t} \right] \frac{1}{c} \nabla |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \quad (4.52)$$

Esta no es la misma situación anterior. Entonces teníamos  $\nabla'$ , es decir, un gradiente respecto a la posición retardada,  $\mathbf{x}'$ , manteniendo  $\mathbf{x}$  y  $t$  fijos. Aquí hablamos del gradiente w.r.t  $\mathbf{x}$ , manteniendo  $t$  fijo. Aplique la ecuación anterior a la función  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$  que es, en sentido estricto,  $[[|\mathbf{x} - \mathbf{r}|]]$  o  $[[R]]$ . Obtenemos:

$$\nabla[|\mathbf{x} - \mathbf{r}|] = [\nabla|\mathbf{x} - \mathbf{r}|] - \left[ \frac{\partial}{\partial t} |\mathbf{x} - \mathbf{r}| \right] \frac{1}{c} \nabla[|\mathbf{x} - \mathbf{r}|] \quad (4.53)$$

es decir:

$$\left[ \left( 1 - \frac{\mathbf{R}' \cdot \mathbf{v}}{R' c} \right) \right] \nabla[x - r] = [\nabla|\mathbf{x} - \mathbf{r}|] \quad (4.54)$$

Por lo tanto:

$$\nabla \llbracket R \rrbracket = \left\llbracket \frac{1}{\kappa} \nabla R \right\rrbracket = \left\llbracket \frac{\mathbf{R}}{\kappa R} \right\rrbracket . \quad (4.55)$$

Entonces, volviendo a la identidad general:

$$\nabla \llbracket f \rrbracket = \llbracket \nabla f \rrbracket - \left\llbracket \frac{\partial f}{\partial t} \right\rrbracket \frac{1}{c} \left\llbracket \frac{\mathbf{R}}{\kappa R} \right\rrbracket \quad (4.56)$$

$$= \left\llbracket \nabla f - \frac{\mathbf{R}}{c\kappa R} \frac{\partial f}{\partial t} \right\rrbracket . \quad (4.57)$$

De la misma forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} \llbracket f \rrbracket = \frac{\partial}{\partial t} f \left( \mathbf{x}, t - \frac{\llbracket \mathbf{x} - \mathbf{r} \rrbracket}{c} \right) \quad (4.58)$$

$$= \left\llbracket \frac{\partial f}{\partial t} \right\rrbracket \left( 1 - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \llbracket \mathbf{x} - \mathbf{r} \rrbracket \right) \quad (4.59)$$

Si sustituimos  $\mathbf{R} = |\mathbf{x} - \mathbf{r}|$  para  $f$ , tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \llbracket R \rrbracket = \left\llbracket \frac{1}{\kappa} \frac{\partial R}{\partial t} \right\rrbracket \quad (4.60)$$

Y, puesto que:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial R}{\partial t} = \kappa - 1 , \quad (4.61)$$

generalmente tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \llbracket f \rrbracket = \left\llbracket \frac{1}{\kappa} \frac{\partial f}{\partial t} \right\rrbracket . \quad (4.62)$$

En este momento ya tenemos las herramientas para evaluar  $\mathbf{E}$ :

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\llbracket -\nabla \left( \frac{1}{\kappa R} \right) + \frac{\mathbf{R}}{c\kappa R} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\kappa R} \right) - \frac{1}{c^2\kappa} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\mathbf{v}}{\kappa R} \right) \right\rrbracket . \quad (4.63)$$

Una vez teniendo todo dentro del operador de retardo, se puede proceder con el álgebra como si  $\mathbf{x}'$  fuese fijo. En concreto:

$$\kappa R = R - \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{c} \quad (4.64)$$

$$\nabla (\kappa R) = \frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|} - \frac{\mathbf{v}}{c} \quad (4.65)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\kappa R) &= \frac{\partial R}{\partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} \cdot \mathbf{v} - \frac{\mathbf{R}}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \\ &= \dot{R} + \frac{v^2}{c} - \frac{1}{c} \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{v}} \end{aligned} \quad (4.66)$$

donde el punto indica  $\frac{\partial}{\partial t}$ . Los términos en  $\mathbf{E}$  son, entonces:

$$-\nabla \left( \frac{1}{\kappa R} \right) = \frac{1}{\kappa^2 R^2} \nabla (\kappa R) = \frac{1}{\kappa^2 R^2} \left( \frac{\mathbf{R}}{R} - \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \quad (4.67)$$

$$\frac{1}{c\kappa} \frac{\mathbf{R}}{R} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\kappa R} \right) = -\frac{1}{c\kappa^3 R^3} \mathbf{R} \frac{\partial}{\partial t} (\kappa R) = -\frac{1}{c\kappa^3 R^3} \mathbf{R} \left( \dot{R} + \frac{v^2}{c} - \frac{1}{c} \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{v}} \right) \quad (4.68)$$

$$-\frac{1}{c^2 \kappa} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\mathbf{v}}{\kappa R} \right) = -\frac{1}{c\kappa^3 R^2} \left( \dot{R} + \frac{v^2}{c} - \frac{1}{c} \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{v}} \right) \mathbf{v} - \frac{1}{c^2 \kappa^2 R} \dot{\mathbf{v}} \quad (4.69)$$

Uniendo todos los términos e indicando  $\hat{\mathbf{R}} = \frac{\mathbf{R}}{R}$ , obtenemos:

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\kappa^3 R^2} \left( \hat{\mathbf{R}} - \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) - \frac{1}{c\kappa^3 R} \left\{ \kappa \frac{\dot{\mathbf{v}}}{c} - \left( \hat{\mathbf{R}} - \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \left( \hat{\mathbf{R}} \cdot \frac{\dot{\mathbf{v}}}{c} \right) \right\} \right] \quad (4.70)$$

o, utilizando las identidades vectoriales triples del producto, tenemos:

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\kappa^3 R^2} \left( \hat{\mathbf{R}} - \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) + \frac{1}{c\kappa^3 R} \hat{\mathbf{R}} \wedge \left[ \left( \hat{\mathbf{R}} - \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \wedge \frac{\dot{\mathbf{v}}}{c} \right] \right] \quad (4.71)$$

El campo magnético es  $\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}$ , que mediante una identidad es directamente análogo al que indicamos para el gradiente:

$$\begin{aligned}
\mathbf{B} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left\{ \nabla \wedge \left[ \frac{\mathbf{v}}{\kappa R} \right] \right\} \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left[ \nabla \wedge \left( \frac{\mathbf{v}}{\kappa R} \right) - \frac{\mathbf{R}}{c\kappa R} \wedge \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\mathbf{v}}{\kappa R} \right) \right] , \quad (4.72)
\end{aligned}$$

Además:

$$\begin{aligned}
\nabla \wedge \left( \frac{\mathbf{v}}{\kappa R} \right) &= -\mathbf{v} \wedge \nabla \left( \frac{1}{\kappa R} \right) \\
&= -\frac{1}{\kappa^2 R^2} \mathbf{v} \wedge \left( \hat{\mathbf{R}} - \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \\
&= -\frac{1}{\kappa^2 R^2} c \hat{\mathbf{R}} \wedge \left( \hat{\mathbf{R}} - \frac{\mathbf{v}}{c} \right) = -c \hat{\mathbf{R}} \wedge \nabla \left( \frac{1}{\kappa r} \right) . \quad (4.73)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, por comparación con nuestra expresión (4.63) para  $\mathbf{E}$ :

$$\mathbf{B} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left[ -c \hat{\mathbf{R}} \wedge \nabla \left( \frac{1}{\kappa R} \right) - \hat{\mathbf{R}} \wedge \frac{1}{c\kappa} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\mathbf{v}}{\kappa R} \right) \right] = \frac{1}{c} \left[ \hat{\mathbf{R}} \right] \wedge \mathbf{E} , \quad (4.74)$$

Resumiendo nuestros resultados, los campos debidos a una carga puntual  $q$  que se mueven con velocidad variable  $\mathbf{v}$ , tales que el vector del radio desde la carga al punto de campo es  $\mathbf{R}$ , se pueden expresar utilizando  $\kappa \equiv 1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{v}/c$  de la siguiente forma:

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\kappa^3 R^2} \left( \hat{\mathbf{R}} - \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) + \frac{1}{c\kappa^3 R} \hat{\mathbf{R}} \wedge \left[ \left( \hat{\mathbf{R}} - \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \wedge \frac{\dot{\mathbf{v}}}{c} \right] \right] \quad (4.75)$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \left[ \hat{\mathbf{R}} \right] \wedge \mathbf{E} . \quad (4.76)$$

Existen muchas formas diferentes para estas expresiones que resultan útiles para ilustrar distintos aspectos de los campos de una carga puntual en movimiento. Para más información acerca del análisis de estos puntos, véase Jackson y Feynman.

## 4.4 Radiación a partir de cargas en movimiento

### 4.4.1 Términos de campo cercano y de radiación

La forma de  $\mathbf{E}$  que obtuvimos se presentó de tal manera que tenía dos términos separados. El primero de ellos no contiene  $\dot{\mathbf{v}}$ , mientras que el segundo es proporcional a  $\dot{\mathbf{v}}$ . Por lo tanto, el primer término es exactamente lo que se obtendría para un movimiento uniforme  $\dot{\mathbf{v}} = 0$  (aunque esto no está claro cuando se compara con nuestra fórmula anterior expresada en coordenadas). Además, todo lo que hay dentro del paréntesis es adimensional  $\hat{R} = \frac{v}{c}$ , *excepto*  $\frac{1}{k^3 R^2}$  y  $\frac{1}{ck^3 R c} \dot{\mathbf{v}}$ . Estos factores deciden el comportamiento de sus términos respectivos a grandes distancias de punto de campo,  $R$ . El término “estático” (constante  $\mathbf{v}$ ) es  $\propto \frac{1}{R^2}$ , pero el término  $\dot{\mathbf{v}}$  es  $\propto \frac{1}{R}$ . Por lo tanto, el vector de Poynting es, respectivamente:

$$\mathbf{E} \wedge \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \wedge \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0 c} \mathbf{E} \wedge \left( \left[ \hat{\mathbf{R}} \right] \wedge \mathbf{E} \right) \propto \frac{1}{R^4} \quad \text{or} \quad \frac{1}{R^2} \quad (4.77)$$

Si preguntamos por el flujo total de potencia electromagnética a través de una superficie esférica que se encuentra alejada de la carga, ese valor tiene una escala común a la superficie del área  $4\pi R^2$  por  $\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}$ . Por consiguiente, el flujo de potencia  $\propto \frac{1}{R^2}$  para el término constante  $v$ , y  $\propto 1$  para el término  $\dot{\mathbf{v}}$ . Por tanto, vemos que el término constante  $v$  da lugar a un flujo de potencia extremadamente pequeño alejado de la carga, pero el término  $\dot{\mathbf{v}}$  da lugar a un flujo de potencia finito, incluso en el infinito. Esta distinción nos exige que consideremos estos dos términos como el término de “campo cercano”:

$$E \propto \frac{1}{R^2} v \quad (4.78)$$

y el término de “radiación”:

$$\mathbf{E} \propto \frac{1}{R} \dot{\mathbf{v}} \quad (4.79)$$

Una partícula cargada solamente emite radiación si se acelera.

### 4.4.2 Radiación en un ángulo sólido específico

Habiendo identificado como el término de radiación únicamente al término  $1/R$ , no tendremos en cuenta el otro término de campo cercano. Imagine, por tanto, una esfera de radio  $R$  rodeando la posición retardada de la partícula. El vector de Poynting del término de radiación es:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}/\mu_0 &= \mathbf{E} \wedge \left( \left[ \hat{\mathbf{R}} \right] \wedge \mathbf{E} \right) / c\mu_0 = \left( E^2 / c\mu_0 \right) \left[ \hat{\mathbf{R}} \right] - \left( \mathbf{E} \cdot \left[ \hat{\mathbf{R}} \right] \right) \mathbf{E} / c\mu_0 \\
&= \frac{1}{c\mu_0} E^2 \left[ \hat{\mathbf{R}} \right] \quad , \quad (4.80)
\end{aligned}$$

en el que la última forma reconoce que el término de radiación tiene a  $\mathbf{E}$  como perpendicular a  $\left[ \hat{\mathbf{R}} \right]$ . Por consiguiente, la energía radiada cruza la esfera, normal a su superficie, con una intensidad local (energía / unidad de superficie / unidad de tiempo)  $E^2/c\mu_0$ , y con  $E$  dado por el segundo término de la ecuación 4.71. Uno se interesa a menudo por la potencia radiada por unidad de ángulo sólido,  $\Omega_s$ , sustentado por el área en el punto de radiación. Por definición de ángulo sólido, una pequeña superficie de la esfera,  $A$ , sustenta un ángulo sólido  $A/R^2$ . Por consiguiente, la potencia por unidad de ángulo sólido es  $R^2 E^2 / c\mu_0$ . El término adicional  $R^2$  anula el  $R^2$  que se encuentra en  $E^2$ , dejando una expresión independiente del radio de la esfera,  $R$ . Por convenio, podemos escribir la potencia por unidad de ángulo sólido mediante la notación siguiente:

$$\frac{dP}{d\Omega_s} = \frac{R^2 E^2}{c\mu_0} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{4\pi c} \left| \left[ \frac{1}{\kappa^3} \hat{\mathbf{R}} \wedge \left\{ \left( \hat{\mathbf{R}} - \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \wedge \dot{\mathbf{v}} \right\} \right] \right|^2 \quad (4.81)$$

#### 4.4.3 Radiación de partículas no relativistas : aproximación dipolar

Las simplificaciones algebraicas considerables suceden cuando  $v/c \ll 1$  y, por tanto, podemos aproximar  $(\hat{\mathbf{R}} - \mathbf{v}/c) \approx \hat{\mathbf{R}}$ , y  $\kappa = 1$ . Entonces:

$$\frac{dP}{d\Omega_s} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{4\pi c} \left| \hat{\mathbf{R}} \wedge \left( \hat{\mathbf{R}} \wedge \frac{\dot{\mathbf{v}}}{c} \right) \right|^2 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{4\pi c} \left( \frac{\dot{\mathbf{v}}}{c} \right)^2 \sin^2 \alpha \quad (4.82)$$

donde  $\alpha$  es el ángulo que está entre  $\hat{\mathbf{R}}$ , la dirección del ángulo sólido (propagación) y  $\dot{\mathbf{v}}$ , la aceleración. Se puede realizar fácilmente una integración de la potencia total radiada sobre toda la esfera (todos los ángulos sólidos). Tomando la dirección de  $\dot{\mathbf{v}}$  como la dirección polar, la integral es tal que:

$$d\Omega_s = 2\pi \sin \alpha \, d\alpha \quad . \quad (4.83)$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta que:

$$\int \sin^2 \alpha \, 2\pi \sin \alpha \, d\alpha = 2\pi \int (1 - \cos^2 \alpha) \sin \alpha \, d\alpha = 2\pi \left[ -\cos \alpha + \frac{1}{3} \cos^3 \alpha \right]_0^\pi = \frac{8\pi}{3} \quad , \quad (4.84)$$

obtenemos:

$$P = \int \frac{dP}{d\Omega_s} d\Omega_s = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3c} \left(\frac{\dot{v}}{c}\right)^2 . \quad (4.85)$$

Esta expresión para la radiación total de una carga acelerada no relativista se conoce como la fórmula de Larmor. A menudo, las expresiones no relativistas para  $P$  y  $dP/d\Omega_s$  se denominan “aproximación dipolar”, ya que corresponden exactamente a lo que se obtiene para la radiación a partir de una distribución eléctrica de la oscilación estacionaria de un dipolo a cuando el momento de dipolo eléctrico,  $\mathbf{p}$ , es tal que:

$$\ddot{\mathbf{p}} = q\dot{\mathbf{v}} . \quad (4.86)$$

Por consiguiente, este patrón de radiación e intensidad es lo que se obtiene también de antenas dipolares mucho más pequeñas que la longitud de onda de la radiación.

## 4.5 Radiación de partículas relativistas

La expresión general para la radiación por partícula acelerada, sin recurrir a aproximaciones que requieran  $v \ll c$ , viene dada por la ecuación (4.81). Sin embargo, se debe hacer una distinción importante en relación a los debates sobre energía por unidad de tiempo entre las expresiones que se basan en el tiempo en el punto de campo,  $t$ , como por ejemplo en la ecuación (4.81), y expresiones referidas al tiempo en la partícula, tiempo retardado  $t'$ . Si deseamos saber cuanta energía irradia una partícula por unidad de tiempo en partícula, que es lo que realmente queremos si deseamos calcular, por ejemplo, a que velocidad pierde energía la partícula, o, si deseamos calcular la energía total irradiada por unidad de volumen, añadiendo la energía irradiada por todas las partículas en ese volumen, entonces debemos multiplicar las expresiones de la energía por tiempo en punto de campo por el radio  $dt/dt' = \kappa$ . Esta conversión hará que la potencia de  $\kappa$  en el denominador disminuya 1. En lo sucesivo, deberíamos trabajar con tales expresiones de energía por unidad de tiempo en partícula e indicarlo mediante un primo en la potencia:  $P'$ . Aún así, seguimos teniendo un factor  $\kappa^5$  en el denominador de  $dP'/d\Omega_s$ . Este factor es el efecto más importante. Puesto que  $\kappa = 1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{v}/c = 1 - \beta \cos \theta$ , cuando tratamos con partículas que se mueven a casi la velocidad de la luz,  $\kappa$  se vuelve sumamente pequeño cuando  $\theta \approx 0$ , es decir, para una radiación en la dirección a lo largo de la velocidad de la partícula. Como resultado, la radiación aumenta enormemente en este sentido directo, efecto que a menudo se denomina efecto de “iluminación” relativista.

### 4.5.1 Aceleración paralela a $\mathbf{v}$

El caso más simple desde el punto de vista algebraico es cuando  $\mathbf{v}$  y  $\dot{\mathbf{v}}$  son paralelos. Entonces, la radiación es rotacionalmente simétrica alrededor de esta dirección, teniendo como única alteración el factor  $\kappa$ , de la fórmula dipolar:

$$\frac{dP'}{d\Omega_s} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\dot{v}^2}{4\pi c^3} \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5} . \quad (4.87)$$

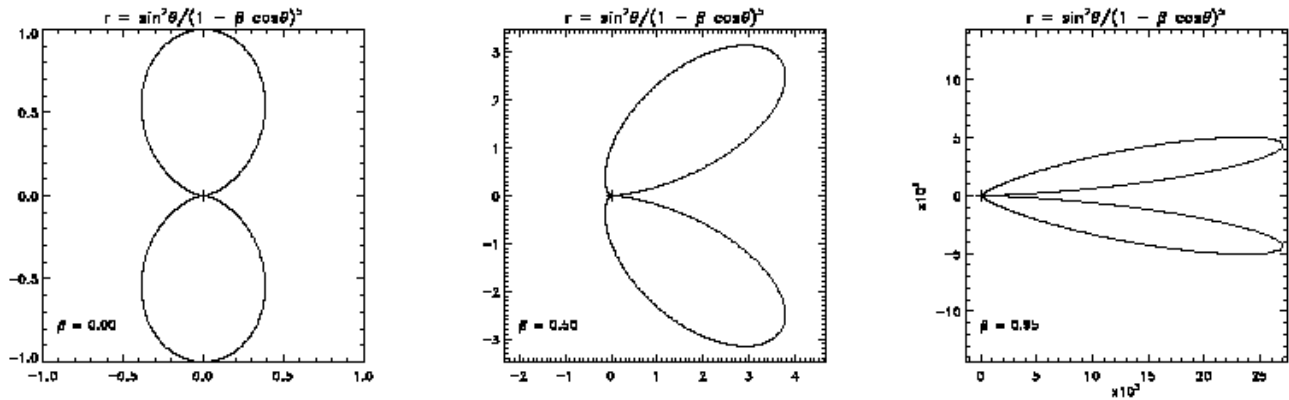


Figura 4.7. Diagramas polares de la intensidad de la radiación como función de la dirección, con aceleración paralela a  $\mathbf{v}$ , para distintos valores de  $\beta=v/c$ . La velocidad se encuentra en la dirección  $x$ .

La radiación exactamente en el sentido directo  $\theta=0$  es cero, debido al término  $\sin^2 \theta$ . La radiación máxima se encuentra en la dirección  $\theta_m \approx 1/(2\gamma)$  cuando  $\beta \sim 1$ . Aquí,  $\gamma$  es el factor relativista  $(1-v^2/c^2)^{-1/2}$ . Además, la intensidad en esta dirección se vuelve demasiado grande a medida que  $\beta$  se aproxima a 1.

#### 4.5.2 Aceleración perpendicular a $\mathbf{v}$

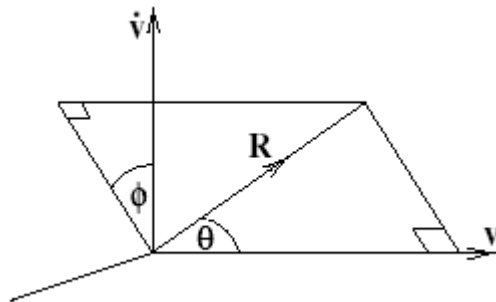


Figura 4.8. Definición de los ángulos para radiación cuando  $\dot{\mathbf{v}}$  es perpendicular a  $\mathbf{v}$ .

Un caso incluso más importante se da cuando  $\mathbf{v}$  y  $\dot{\mathbf{v}}$  son perpendiculares. Entonces, uno puede obtener lo siguiente:

$$\frac{dP'}{d\Omega_s} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\dot{v}^2}{4\pi c^3} \frac{1}{(1 - \beta \cos \theta)^3} \left[ 1 - \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \phi (1 - \beta^2)}{(1 - \beta \cos \theta)^2} \right] \quad (4.88)$$

donde  $\theta$  es el ángulo de  $\hat{\mathbf{R}}$  respecto a  $\mathbf{v}$  y  $\phi$  es el ángulo polar de  $\hat{\mathbf{R}}$  alrededor de  $\mathbf{v}$  medido como cero respecto a  $\dot{\mathbf{v}}$ . Esta distribución es, asimismo, muy puntiaguda en sentido directo para  $\beta \sim 1$ , teniendo una extensión típica de medio ángulo de aproximadamente  $\frac{1}{\gamma}$ .

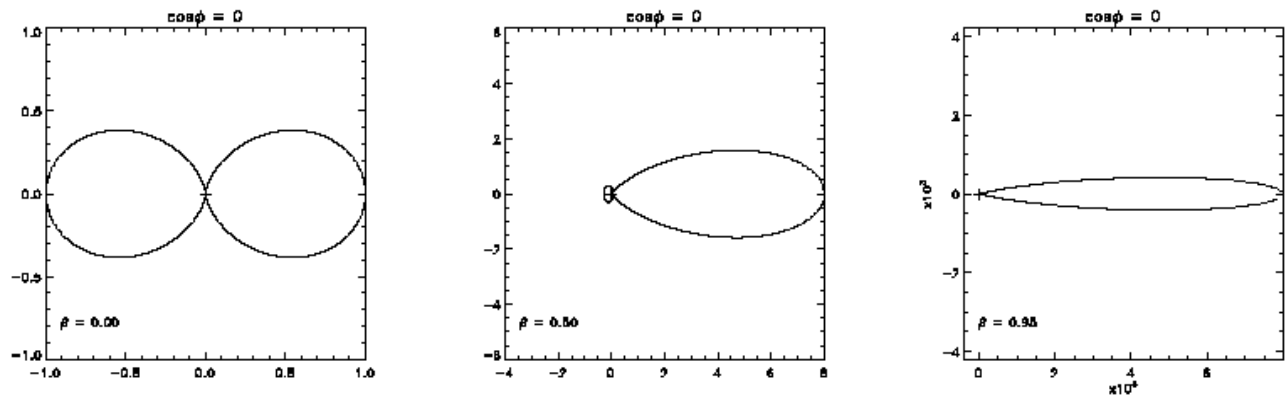


Figura 4.9. Diagramas polares de la intensidad de radiación como función de la dirección, con aceleración perpendicular a  $\mathbf{v}$ , para el caso en el que  $\hat{\mathbf{R}}$  se ubica en el plano de  $\mathbf{v}$  y  $\dot{\mathbf{v}} \perp \mathbf{v}$ .

### 4.5.3 Potencia total radiada

La expresión general (4.81) se puede integrar por ángulos sólidos mediante métodos elementales, aunque tediosos, para obtener:

$$\begin{aligned}
 P' &= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3c} \gamma^6 \left[ \left( \frac{\dot{v}}{c} \right)^2 - \left( \frac{\dot{\mathbf{v}}}{c} \wedge \frac{\mathbf{v}}{c} \right)^2 \right] \\
 &= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3c} \gamma^4 \left[ \left( \frac{\dot{v}}{c} \right)^2 - \left( \frac{\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v}}{c^2} \right)^2 \right], \quad (4.89)
 \end{aligned}$$

cuya primera forma obtuvo Lienard (1898). Estas dos formas alternas son prácticas para obtener la potencia cuando  $\dot{\mathbf{v}}$  es paralelo a  $\mathbf{v}$ :

$$P' = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3c} \frac{\dot{v}^2}{c^2} \gamma^6 \quad (4.90)$$

y  $\dot{\mathbf{v}}$  es perpendicular a  $\mathbf{v}$ :

$$P' = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3c} \frac{\dot{v}^2}{c^2} \gamma^4 \quad (4.91)$$

Estas expresiones proporcionan una importante información cuantitativa acerca de la tasa de pérdida de energía por una carga que experimenta una aceleración. Lo primero que observamos es que una carga nunca podría acelerarse a través de la velocidad  $c$ , ya que  $\gamma \rightarrow \infty \rightarrow 1$  en  $\beta \rightarrow 1$  y, por tanto, se

emitirían infinitas cantidades de radiación. Esta observación es bastante independiente de la teoría de la relatividad de Einstein, que demuestra que la masa se vuelve infinita cuando  $\beta \rightarrow 1$ . Por lo tanto, cuando Lienard obtuvo esta expresión en 1898, ya podría haber deducido que una carga no podía acelerarse más allá de  $v = c$ . En segundo lugar, comparemos la tasa de pérdida de energía radiactiva con la ganancia de energía procedente de una fuerza electrostática de aceleración.

Escriba el campo como equivalente al campo que se encuentra a una distancia  $r$  de una carga  $Zq$ , de tal forma que la aceleración represente el aumento de masa relativista:

$$\dot{v} = \frac{Zq^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2 m_0 \gamma} \quad , \quad (4.92)$$

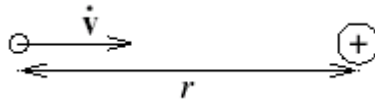


Figura 4.10. Comparación de la pérdida de energía radiactiva con la ganancia de energía a partir de la fuerza durante la aceleración debida a una carga cercana.

Si suponemos que  $\dot{v}$  es paralelo a  $v$ , la tasa de pérdida de radiación es:

$$P' = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3c^3} \frac{Z^2 q^4}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{1}{r^4} \frac{\gamma^4}{m_0^2} \quad . \quad (4.93)$$

Esta será igual a la tasa de ganancia de energía por la aceleración, concretamente:

$$\frac{Zq^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{v}{r^2} \quad ,$$

cuando:

$$\left( \frac{Zq^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right)^2 = Z \frac{3\beta (m_0 c^2)^2}{2\gamma^4} \quad , \quad (4.94)$$

o:

$$\frac{Zq^2}{4\pi\epsilon_0 r} = \left( \frac{3Z\beta}{\gamma^4} \right)^{1/2} m_0 c^2 \quad . \quad (4.95)$$

En este caso, la parte izquierda corresponde a la energía potencial de la carga y la parte derecha es un factor de raíz cuadrada por la masa de reposo de la carga (expresada como energía). Para partículas modestamente relativistas, cuando podemos tomar un factor de raíz cuadrada como unidad de ordeno, vemos, por tanto, que la radiación solamente comenzaría a tener un efecto importante en

relación a la aceleración paralela cuando, por ejemplo, un electrón esté en un pozo potencial a una profundidad  $\sim m_0c^2 = 511$  keV. Si recordamos que la energía de enlace de un átomo de hidrógeno es solamente 13,6 eV, esto únicamente podría tener lugar en la más exótica situación (por ejemplo, armazones internos de elementos pesados). Por supuesto, esas situaciones tendrían que tratarse realmente en la mecánica cuántica. Además, estos campos eléctricos inmensamente fuertes ( $\sim 10^{20}$  V/m) ni siquiera se abordan en los aceleradores actuales. Por lo tanto, la radiación causada por la aceleración paralela a  $\mathbf{v}$ , como por ejemplo en un LINAC, no se suele tener en cuenta. Sin embargo, si  $\mathbf{v}$  es perpendicular a  $\dot{\mathbf{v}}$ , la ganancia de energía de orden inferior mediante aceleración es cero. Comparado con esto, la radiación podría ser muy importante. En el campo de fuerza atómico,

$$P' = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3c^3} \frac{Z^2 q^4}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{1}{r^4} \frac{\gamma^2}{m_0^2} \quad (4.96)$$

y la energía cinética clásica en una órbita circular de radio  $r$  es:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \frac{Zq^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (4.97)$$

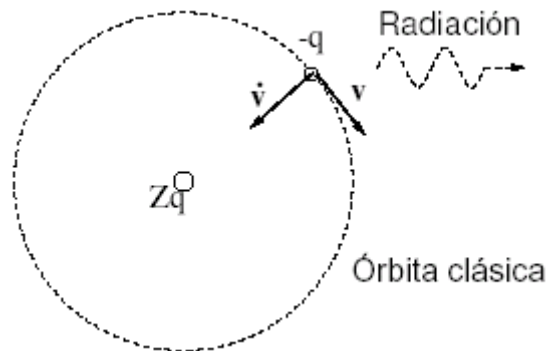


Figura 4.11. La radiación de una partícula que se mueve en una órbita circular surge de su aceleración perpendicular.

De ahí que la energía orbital se irradie con una constante de tiempo característica:

$$\begin{aligned} \tau \sim \frac{\mathcal{E}}{P'} &= \frac{1}{2} \frac{Zq^2}{4\pi\epsilon_0 r} \left[ \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{2c}{3} \left( \frac{Zq^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right)^2 \frac{1}{r^2} \frac{\gamma^2}{m_0^2 c^4} \right]^{-1} \\ &= \frac{(m_0 c^2)^2}{2\gamma^2} \frac{3r}{2c} Z \left( \frac{Zq^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right)^{-2} = \frac{(m_0 c^2)^2}{I^2} Z \frac{r}{c} \quad , \quad (4.98) \end{aligned}$$

donde  $I$  es la energía de enlace de la partícula en esta órbita circular. Para una órbita circular “clásica” de un átomo de hidrógeno,  $I = 13,6\text{eV}$ ,  $Z = 1$  y  $r = a_0 = 5,29 \times 10^{-11}\text{ m}$  (el radio de Bohr) obtenemos  $\tau = 1,5 \times 10^{-9}\text{ s}$ . Por consiguiente, la tasa de pérdida de energía por un electrón en una órbita “clásica” de Bohr es tal que el electrón giraría en espiral entrando en el núcleo en unos pocos nanosegundos. Por supuesto, este era uno de los problemas clave con electrodinámica clásica que la física afrontó a principios de 1900, lo que dio lugar al descubrimiento final de la mecánica cuántica. Podemos preguntarnos también, como una cuestión inmediatamente práctica, a qué velocidad irradia energía una partícula al ser acelerada por un campo magnético, por ejemplo, en la órbita circular de un ciclotrón. En este caso, la aceleración es  $\dot{v} = v^2/d$ , donde  $d$  es el radio de la órbita. Por tanto, la potencia radiada es, a partir de la ecuación (4.91):

$$P' = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3c} \frac{v^4}{c^2 r^2} \gamma^4 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{2c}{3} \frac{\beta^4 \gamma^4}{r^2} \quad (4.99)$$

Por lo tanto, para una partícula relativista ( $\beta \approx 1$ ), la potencia aumenta proporcionalmente a la cuarta potencia de la energía ( $\gamma^4$ ) y la pérdida de energía por órbita para los electrones que se mueven con un radio de curvatura  $r$  se puede escribir numéricamente de la forma siguiente:

$$\delta\mathcal{E}/\text{MeV} = 8.8 \times 10^{-2} \frac{(\mathcal{E}/\text{GeV})^4}{(r/\text{metros})} \quad (4.100)$$

Esto equivale a una limitación muy importante para los anillos de almacenamiento de electrones y los aceleradores por encima de unos pocos GeV de energía. Jackson (pág. 668) menciona que el sincrotrón de electrones de Cornell, con  $r = 100$  metros, tiene una pérdida de 8,8 MeV por vuelta a 10 GeV. El anillo de almacenamiento del acelerador Bates del MIT está diseñado para contener una energía de hasta 1 GeV. Con un radio de curvatura de 9,1 m., la pérdida es de 9,8 keV por vuelta, que se compensa con una etapa de aceleración dentro del anillo.

## 4.6 Dispersión de la radiación electromagnética

### 4.6.1 Dispersión de Thomson

Hemos observado que una carga acelerada no relativista irradia, según la ecuación 4.82:

$$\frac{dP}{d\Omega_s} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{4\pi c} \left(\frac{\dot{v}}{c}\right)^2 \sin^2 \alpha \quad (4.101)$$

donde  $\alpha$  es el ángulo que se ubica entre la dirección de radiación y la dirección de la aceleración,  $\dot{v}$ . Si la aceleración surge de un campo eléctrico  $E_i$ , entonces:

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{q}{m} \mathbf{E}_i \quad , \quad (4.102)$$

Por lo tanto, la potencia irradiada por unidad de ángulo sólido a partir de un único electrón se puede escribir de la forma siguiente:

$$\frac{dP}{d\Omega_s} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{4\pi c} \left( \frac{e}{m_e c} E_i \right)^2 \sin^2 \alpha = \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2} \right)^2 c \epsilon_0 E_i^2 \sin^2 \alpha \quad . \quad (4.103)$$

La combinación de parámetros surgidos en la última forma de esta ecuación tiene las dimensiones de longitud y se denomina el radio clásico de electrón.

$$r_e \equiv \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2} \right) \quad (4.104)$$

Un campo eléctrico estacionario no dará origen a la radiación que es especialmente interesante, pero si por el contrario el campo eléctrico oscila, dará origen a la radiación que está a una frecuencia correspondiente.

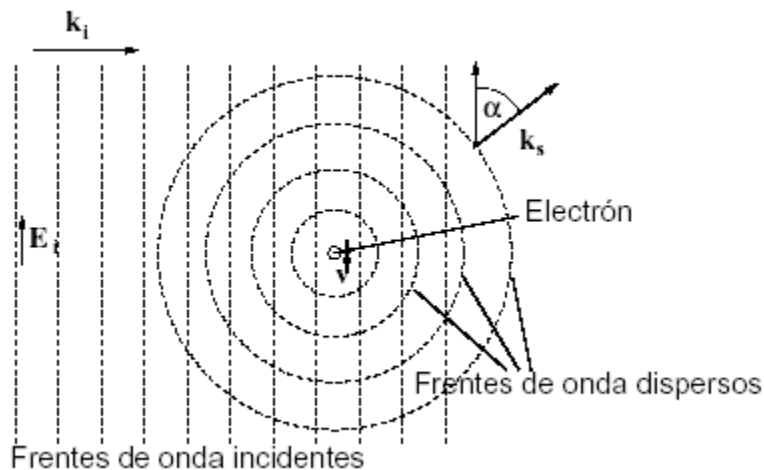


Figura 4.12. Esquema del proceso de dispersión de Thomson.

El caso más elemental que se puede considerar es aquel en el que el campo eléctrico varía de forma sinusoidal con una frecuencia angular  $\omega$ . Esta es exactamente la situación que surge cuando una partícula cargada, como por ejemplo un electrón, experimenta el campo eléctrico oscilante de una onda electromagnética incidente a una frecuencia  $\omega$ . En esta situación, hablamos de “dispersión” de la onda incidente por el electrón. Este proceso de aceleración de un electrón libre por una onda incidente y la reradiación de una onda en otras direcciones se denomina dispersión de Thomson.

A continuación, el vector de Poynting, cuya magnitud indicamos, proporciona la potencia instantánea por unidad de superficie de la onda incidente:

$$s_i = |\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}/\mu_0| = \frac{1}{c\mu_0} E_i^2 = c\epsilon_0 E_i^2 \quad , \quad (4.105)$$

Evaluamos la magnitud en tiempo retardado  $t'$  (es decir, en el tiempo necesario para que se origine la radiación en el punto de campo en un tiempo posterior  $t$ ). Por lo tanto, la potencia dispersada de un electrón por unidad de ángulo sólido se puede escribir de la forma siguiente:

$$\frac{dP}{d\Omega_s} = r_e^2 \sin^2 \alpha s_i \quad . \quad (4.106)$$

La sección transversal diferencial de dispersión (de energía) es el ratio de  $dP/d\Omega_s$  hasta la densidad de potencia incidente  $s_i$ . Se puede verificar rápidamente que esta definición concuerda con la definición estándar de una sección transversal, que debería indicar que el número de colisiones por unidad de longitud es igual al producto de la sección transversal y la densidad de los objetivos. En este caso, los “proyectiles” está representados por la energía incidente de la onda. Se puede considerar que los proyectiles tienen una densidad de flujo proporcional a la densidad de flujo de la potencia de onda,  $s_i$ . Una opinión alternativa sería considerar esta sección cruzada como el área a través de la cual la densidad de flujo de una potencia incidente tendría que fluir para poder originar la potencia dispersa. La sección transversal es:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_s} = r_e^2 \sin^2 \alpha \quad , \quad (4.107)$$

donde  $\alpha$  es el ángulo ubicado entre la dirección de dispersión y el campo eléctrico (es decir, la dirección de polarización) de la onda incidente.

Al integrarse esta expresión sobre todos los ángulos dispersos se obtiene la sección transversal total de la dispersión de Thomson:

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_e^2 \quad . \quad (4.108)$$

Si el electrón es estacionario, aparte de la oscilación que la onda le transmite, la radiación dispersa tendrá exactamente la misma frecuencia (en esta aproximación clásica) que la onda incidente. Sin embargo, si el electrón está en movimiento anteriormente a su perturbación causada por la onda incidente, habrá un corrimiento doppler de la frecuencia dispersa por dos razones: la primera porque el electrón en movimiento experimentará la onda incidente a una frecuencia distinta y, la segunda porque su radiación tendrá el efecto de corrimiento de doppler en el observador. Estos dos efectos proporcionan una frecuencia dispersa  $\omega_s$  relacionada con la frecuencia incidente  $\omega_i$  mediante:

$$\omega_s = \omega_i + (\mathbf{k}_s - \mathbf{k}_i) \cdot \mathbf{v}_0 = \omega_i \frac{1 - \hat{\mathbf{k}}_i \cdot \mathbf{v}_0 / c}{1 - \hat{\mathbf{k}}_s \cdot \mathbf{v}_0 / c} \quad , \quad (4.109)$$

donde  $\mathbf{k}_i$  y  $\mathbf{k}_s$  son los vectores de onda de las ondas incidente y dispersa respectivamente, cuyas magnitudes son:  $k_i = \omega_i / c$  y  $k_s = \omega_s / c$ , y los sombreros indican los vectores unitarios. El numerador y el denominador de la forma fraccional para  $\omega_s$  representa los dos corrimientos de doppler a los que acabamos de referirnos. Esta relación de uno a uno entre la frecuencia dispersa y el componente de la velocidad del electrón a lo largo de la dirección  $\mathbf{k}_s - \mathbf{k}_i$  es de gran ayuda en las aplicaciones de diagnóstico del plasma. La distribución de la velocidad de los electrones se revela directamente en el espectro de la luz dispersa de Thomson.

### 4.6.2 Dispersión de Compton

Una aproximación implícita en nuestro tratamiento de la dispersión de Thomson es que todo lo que hace la onda incidente es provocar que el electrón oscile y que este movimiento oscilatorio se añada a un movimiento anterior, que de lo contrario quedaría imperturbable. En otras palabras, una vez que ocurre la dispersión, el electrón permanece o estacionario o en movimiento a la misma velocidad que antes. [En lo sucesivo en esta sección consideraremos que el electrón es estacionario antes de la dispersión para simplificar]. Pero, realmente esto no puede ser cierto, ni siquiera en una imagen clásica ya que sabemos que los campos electromagnéticos transportan momento. Por lo tanto, si la onda es dispersa, modificando su momento, el momento del electrón también debe modificarse para así conservar el momento total.

El efecto clásico se puede calcular fácilmente. La radiación dispersa tiene momento cero de media por la simetría de la simetría angular de dispersión del  $\sin^2 \alpha$ . Por lo tanto, el momento que se imparte al electrón es exactamente el de la radiación incidente. En la sección [3.2.3](#) vimos que la densidad de momento de los campos electromagnéticos era igual a  $1/c^2$  veces la densidad de flujo de energía. La fuerza que la radiación incidente ejerce en el electrón es igual a la sección transversal multiplicada por la densidad de flujo de momento, que es  $c$  veces la densidad de momento. Por lo tanto, esta fuerza es:

$$m_e \dot{v}_0 = \sigma s_i / c = \frac{8\pi}{3} r_e^2 \epsilon_0 E_i^2 \frac{1}{c} \quad . \quad (4.110)$$

En esta imagen clásica existe una presión de radiación que se aplica sobre una superficie igual a la sección cruzada de Thomson del electrón, que, de forma constante, la empuja en la dirección de la radiación incidente.

Sin embargo, la mecánica cuántica nos enseña que la radiación electromagnética no es regular ni infinitamente divisible. En su lugar, toma la forma de fotones cuya energía es  $\hbar\omega$  cuando la frecuencia angular de la radiación es  $\omega$ . Si el tamaño del fotón, la energía cuántica, es muy inferior a las escalas de la otra energía del problema, entonces se puede aplicar el límite clásico que se discutió anteriormente, a menos que la energía del fotón sea grande con lo cual no se podría aplicar. De hecho, aquí la cuestión crucial es el *momento* del fotón, pero éste se puede relacionar con la energía y compararse con el resto de la energía del electrón ( $m_0 c^2 = 511$  keV), como veremos. Por tanto, la imagen cuántica, es que cada fotón individual al encontrarse con un electrón libre, puede rebotar en un evento de dispersión. Cuando sucede así, al momento de fotón se modifica, así como

también el momento de electrón para satisfacer la conservación. Como consecuencia, para fotones energéticos (momento grande), incluso un electrón inicialmente estacionario retrocede de un evento de dispersión con momento sustancial. Este retroceso conduce a una reducción de la energía, y por tanto de la frecuencia, del fotón disperso, que dependerá de la dirección en la que se disperse.

Todo lo que se necesita para relacionar el desplazamiento de energía con el ángulo de dispersión es la cinemática del problema, la conservación de la energía y del momento. La dispersión tiene lugar en un plano de dispersión. Supondremos que el fotón se dispersa a través de un ángulo  $\theta$  y que el electrón retrocede en una dirección en un ángulo  $\phi$  con la dirección inicial del fotón. Tenemos que realizar el problema de manera relativista y para ello recurrimos a la relación relativista general que relaciona la energía con el momento:

$$\mathcal{E} = \sqrt{p^2 c^2 + (m_0 c^2)^2} \quad (4.111)$$

Indicamos el momento final del electrón mediante  $p$ , la energía del fotón antes y después de la colisión de dispersión mediante  $\mathcal{E}$  y  $\mathcal{E}'$ , respectivamente. Por lo tanto, el momento del fotón es  $\mathcal{E}/c$  (a partir de la relación de energía anterior o de nuestro conocimiento acerca de la relación entre el flujo de energía y el momento de los campo electromagnéticos).

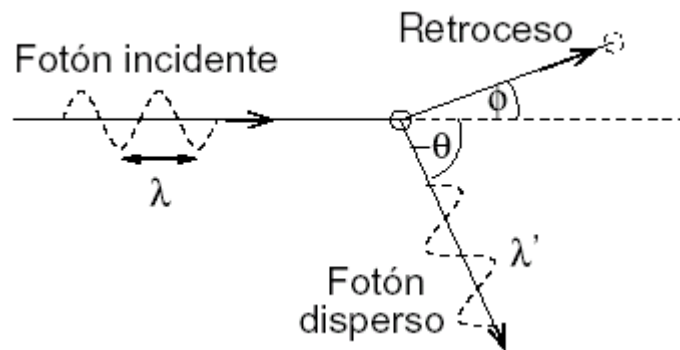


Figura 4.13. Geometría de dispersión de Compton en el plano de dispersión.

Por tanto, escribimos los dos componentes de la conservación de momento paralelos:

$$\frac{\mathcal{E}}{c} = \frac{\mathcal{E}'}{c} \cos \theta + p \cos \phi \quad (4.112)$$

y perpendiculares:

$$0 = \frac{\mathcal{E}'}{c} \sin \theta + p \sin \phi \quad (4.113)$$

al fotón incidente, y la energía de conservación:

$$\mathcal{E} + m_0c^2 = \mathcal{E}' + \sqrt{p^2c^2 + (m_0c^2)^2} \quad . \quad (4.114)$$

Suprimimos  $\phi$  separando los términos  $\phi$  en las ecuaciones 4.112 y 4.113 elevando al cuadrado y sumando para obtener:

$$p^2 = \left(\frac{\mathcal{E}}{c}\right)^2 + \left(\frac{\mathcal{E}'}{c}\right)^2 - 2\frac{\mathcal{E}\mathcal{E}'}{c^2} \cos \theta \quad . \quad (4.115)$$

A continuación, suprimimos el momento  $p$  elevando al cuadrado el término de la raíz cuadrada de la ecuación 4.114 para obtener:

$$p^2c^2 = 2m_0c^2(\mathcal{E} - \mathcal{E}') + (\mathcal{E} - \mathcal{E}')^2 \quad (4.116)$$

y restando de  $c^2$  por la ecuación anterior, obtenemos:

$$0 = \mathcal{E}\mathcal{E}'(1 - \cos \theta) - m_0c^2(\mathcal{E} - \mathcal{E}') \quad . \quad (4.117)$$

Esta es la ecuación que relaciona la reducción de energía del fotón con el ángulo de la dispersión del fotón. Es más corriente escribirlo en una forma que gobierne la longitud de onda del fotón  $\lambda = 2\pi c/\omega = hc/\mathcal{E}$  y utilizando  $1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \theta/2$ ,

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0c} 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad , \quad (4.118)$$

que expresa el “corrimiento de Compton” de una longitud de onda en término de la “longitud de onda de Compton” del electrón,  $\lambda_c \equiv h/m_0c = 2,426 \times 10^{-12} \text{ m}$ . La longitud de onda de un fotón es igual a la longitud de onda de Compton cuando su energía es igual al resto de la masa del electrón,  $m_0c^2 = 511 \text{ keV}$ . Por lo tanto, el corrimiento de Compton solamente es importante para rayo-X muy energéticos y para rayos- $\gamma$ .

La energía del fotón disperso es:

$$\mathcal{E}' = \frac{m_0c^2}{1 - \cos \theta + m_0c^2/\mathcal{E}} \quad (4.119)$$

y la energía que pierde el fotón y, por tanto, la ganada como energía cinética es:

$$\varepsilon \frac{1 - \cos \theta}{1 - \cos \theta + m_0 c^2 / \varepsilon} \quad (4.120)$$

Figura 4.14. Variación angular transversal de la dispersión de Compton  $[\alpha \equiv \varepsilon / m_e c^2]$ .

La sección transversal para esta dispersión debe reducirse a la sección transversal de Thomson a baja energía fotónica. En primer lugar, se calculó utilizando la mecánica cuántica relativista (1928) de Klein y Nishina, poco después de la formulación de las ecuaciones cuánticas relativistas para el electrón de Dirac, prediciendo el giro y los estados de energía negativa. Uno de los primeros triunfos de la teoría de Dirac fue el acuerdo de la sección transversal de Klein-Nishina con los experimentos. Para una radiación no polarizada, la sección transversal diferencial para la dispersión de fotones (que es distinta de la sección transversal de dispersión de energía en virtud del desplazamiento de la energía de fotones) por unidad de ángulo sólido es:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_s} = \frac{r_e^2}{2} \left( \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right)^2 \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} + \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} - \sin^2 \theta \right) . \quad (4.121)$$

De esta forma, se puede verificar la reducción de la sección transversal de Thomson a baja energía fotónica, tal que  $\varepsilon'/\varepsilon \rightarrow 1$ , mediante integración de la fórmula de Thomson formula sobre todas las direcciones de polarización posibles de radiación incidente. A alta energía fotónica,  $\varepsilon > m_e c^2$ , la prodifusión o dispersión a bajo ángulo tiende a dominar la sección transversal, ya que el término  $(\varepsilon'/\varepsilon)^2$  se vuelve pequeño a ángulos más grandes; aunque para esos protones que retrodispersados  $\theta \approx 180^\circ$ , pierden prácticamente toda sus energía contra los electrones y retienen únicamente  $\varepsilon' \rightarrow m_e c^2 / 2$ . La figura [4.14](#) muestra los diagramas polares de la sección transversal a distintas energías.

El proceso de dispersión de Compton es un mecanismo de atenuación dominante en el ámbito de energía de fotones de 1 a 4 MeV. A veces resulta útil distinguir entre la sección transversal para la dispersión de un fotón, indicada anteriormente, y la aquella para la supresión de energía de un haz de fotones, que es igual al producto de la sección transversal de dispersión y el radio de pérdida de energía para la energía fotónica inicial. En ocasiones, este último se denomina la sección transversal

de “absorción” de Compton, ya que representa la tasa de transferencia de energía desde los protones hasta los electrones dispersos de Compton. En cualquier caso, la atenuación de una corriente de fotones de intensidad  $I$  está gobernada por la ecuación diferencial siguiente:

$$\frac{dI}{d\ell} = -n_e\sigma I = -Zn_i\sigma I \quad , \quad (4.122)$$

donde  $\sigma$  es la sección transversal por electrón y se ignora el hecho de que  $Z$  electrones estén unidos a cada átomo, ya que la energía fotónica es bastante superior a la energía de enlace del electrón. Las soluciones a esta ecuación son exponenciales ( $\propto \exp(-n_e\sigma\ell)$ ) con longitud inversa de decaimiento, denominada el “coeficiente de atenuación”:

Figura 4.15. Coeficientes de atenuación de fotón para el plomo. [Evans]

Puesto que la proporción de masa en relación a la carga de la mayoría de los núcleos es muy similar, entre 2 y 2,8, la mayor atenuación surge de la mayor densidad de electrones, que corresponde a la mayor densidad de masa. De ahí que, por ejemplo, el plomo tenga uno de los mayores coeficientes de atenuación.

La figura 4.15 muestra todos los coeficientes de atenuación (angle-integrated) de Compton y los coeficientes de absorción fotoeléctrica y de producción de pares. Analizaremos estos últimos procesos más adelante. Dado que la atenuación de Compton es simplemente el producto  $n_e\sigma$  se puede realizar a escala en cualquier otro material multiplicando por la proporción de densidades de los electrones, es decir, (para los elementos) por la cantidad siguiente:

$$\frac{A_{\text{plomo}}}{\rho_{\text{plomo}} Z_{\text{plomo}}} \frac{\rho_{\text{otro}} Z_{\text{otro}}}{A_{\text{otro}}} \quad , \quad (4.123)$$

donde  $\rho$  es la densidad de masa,  $A$  es el peso atómico y  $Z$  el número atómico.