Capítulo 3

Dinámica de los campos electromagnéticos

3.1 Corriente de desplazamiento de Maxwell

A principios de 1860, durante la guerra civil americana, la electricidad que incluía la inducción estaba bien establecida desde el punto de vista experimental. Existía una gran disputa acerca de la teoría. Los campos enfrentados estaban divididos en dos:

- Los partidarios de la acción a distancia.
- Los partidarios de la teoría de campo.

James Clerk Maxwell, que apoyaba firmemente la teoría de campo, inventó las analogías mecánicas para el comportamiento de los campos a nivel local en el espacio y como eran transportadas las influencias magnéticas y eléctricas a través del espacio por dientes invisibles de circulación. Al ser un matemático consumado, formuló también ecuaciones diferenciales para describir los campos. Siguiendo la notación moderna, en 1860 se habrían leído de la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
\nabla .\mathrm{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \text{Ley de Coulomb} \\
\nabla \wedge \mathrm{E} &= -\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial t} \qquad \text{Ley de Faraday} \\
\nabla .\mathrm{B} &= 0 \\
\nabla \wedge \mathrm{B} &= \mu_0 \mathbf{j} \qquad \text{Ley de Ampere.} \quad \text{(Casi estático)}
\end{aligned} \tag{3.1}$$

La genial ocurrencia de Maxwell fue darse cuenta de que este conjunto de ecuaciones era <u>inconsistente</u> con la conservación de la carga. En concreto, el problema radica en la forma casi estática de la ley de Ampere. Si tomamos su divergencia:

$$\mu_0 \nabla .\mathbf{j} = \nabla .\left(\nabla \wedge \mathbf{B}\right) = 0 \tag{3.2}$$

(dado que la divergencia de un bucle es <u>cero</u>). Esto es correcto en el caos de una situación estática, pero no funciona para una situación de variación del tiempo. La conservación de una carga en casos dependientes del tiempo es la siguiente:

$$\nabla .\mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \qquad \underline{\text{ no cero }}. \tag{3.3}$$

El problema se puede solucionar añadiendo un término extra a la ley de Ampere, ya que:

$$\nabla.\mathbf{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = \nabla.\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t}\epsilon_0\nabla.\mathbf{E} = \nabla.\left(\mathbf{j} + \epsilon_0\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) \tag{3.4}$$

Por lo tanto, la ley de Ampere solamente es consistente con la conservación de la carga si realmente se va a escribir con la cantidad ($\mathbf{j} + \varepsilon_0\partial\mathbf{E}/\partial t$) reemplazando a **j**, es decir:

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0\left(\mathbf{j} + \epsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}\right) = \mu_0\mathbf{j} + \epsilon_0\mu_0\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{3.5}$$

El término $\varepsilon_0\partial\mathbf{E}/\partial t$ se denomina corriente de desplazamiento de Maxwell. En aquella época no existían pruebas experimentales de este término. Aún así, como observó Maxwell, las ecuaciones lo requerían. La suma hace que las formas sin fuente (donde ρ y **j** son iguales a cero) sean perfectamente simétricas:

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad ; \quad \nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad . \tag{3.6}$$

Esto significa que un campo cambiante **B** induce a un campo **E** (inducción), pero, a su vez, un campo cambiante **E** induce a un campo **B**. El término extra también es responsable de las ondas electromagnéticas, como veremos en breve. A pesar de la elegancia de las ecuaciones de Maxwell, éstas no disiparon la polémica. Las ecuaciones se pueden escribir en la forma integral, parecido a lo que deseaban los partidarios de la acción a distancia. Sin embargo, lo que ahora se ha hecho más evidente es que la acción no podía considerarse instantánea. Además, las ondas electromagnéticas no se detectaron de manera inequívoca hasta 23 años más tarde.

3.2 Dinámica de campo, energía y momento

3.2.1 Introducción

Suponga que tomamos un condensador y lo cargamos utilizando una alimentación eléctrica.

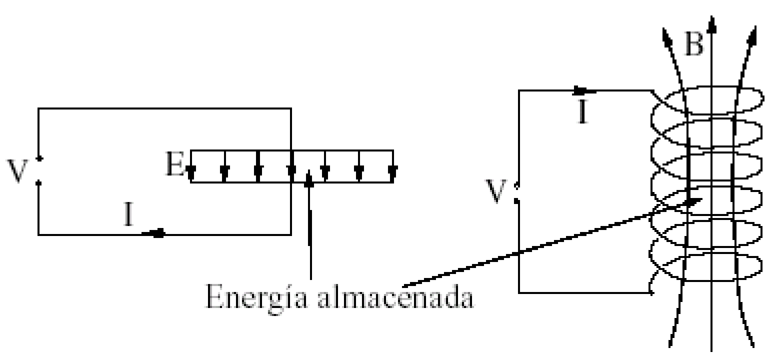

Figura 3.1. La energía obtenida de la alimentación eléctrica durante la "carga" de un condensador o una bobina de inductancia se almacena en el campo electromagnético.

Durante el proceso de carga fluye una corriente I que es $V = \frac{Q}{C}$ a cualquier potencial instantáneo:

$$Q = \int I dt \qquad , \qquad I = \frac{dQ}{dt} \quad . \tag{3.7}$$

Por lo tanto, la alimentación eléctrica no funciona a una velocidad IV (por segundo) y el trabajo total realizado es:

$$\int IV dt \;=\; \int V \frac{dQ}{dt} dt = \int V dQ \tag{3.8}$$

$$= \int \frac{Q}{C} dQ = \frac{Q^2}{2C} \qquad \text{Comenzando en Q} = 0) \tag{3.9}$$

¿Dónde ha ido a parar toda esta energía? Respuesta: al campo eléctrico. El campo E dentro del condensador almacena energía con una densidad de energía volumétrica que debemos calcular. A continuación, considere la carga de una bobina de inductancia con una autoinductancia L.

$$V = L\frac{dI}{dt}. \quad \text{Trabajo realizado} \;\int VIdt = \int LIdI = \frac{LI^2}{2} \tag{3.10}$$

¿Dónde ha ido esta energía? Al campo magnético.

3.2.2 El teorema de Poynting: conservación de energía

¿Cómo podemos saber, o demostrar, que los campos electromagnéticos almacenan y transportan energía? Formalmente, a partir de un teorema derivado de las ecuaciones de Maxwell. La disipación de energía es la velocidad de realización del trabajo de los campos en las partículas. La energía se transfiere de los campos a las partículas (y, después, es a menudo transformada en "calor" mediante algún proceso aleatorio). El campo magnético no funciona en las partículas debido a que $\mathbf{F} \perp \mathbf{v}$. La velocidad con la que el campo magnético realiza un trabajo en una única partícula es:

$$\mathbf{F}.\mathbf{v} = q\mathbf{E}.\mathbf{v} \tag{3.11}$$

La velocidad media de realización del trabajo en todas las partículas en un volumen V es:

$$\sum_{j \ in \ V} q_j \mathbf{E}(\mathbf{x}_j).\mathbf{v}_j \tag{3.12}$$

por lo que la velocidad de trabajo para un volumen elemental dV, tal que $\mathbf{E}$ se puede tomar como uniforme a través del volumen es:

$$\mathbf{E}.\sum_j q_j\mathbf{v}_j = \mathbf{E}.\langle qn\mathbf{v}\rangle dV \tag{3.13}$$

donde *n* es el número/volumen unitario = densidad. La media $\langle qn\mathrm{v}\rangle$ es simplemente la densidad de corriente, **j**. De ahí, que la velocidad (es decir, la potencia) de disipación de energía (= trabajo realizado en partículas) por volumen unitario sea:

$$\mathbf{E}.\mathbf{j} \tag{3.14}$$

[Por supuesto, esta es una forma localizada de la ecuación del circuito *P* = *VI*]. Tenemos la densidad de la velocidad de disipación de la energía, **E.j**, pero, a continuación, podemos expresarla en cuanto a los campos utilizando la ley de Ampere:

$$\mathbf{E}.\mathbf{j} = \mathbf{E}.\frac{1}{\mu_0}\left[\nabla\wedge\mathbf{B} - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right] \tag{3.15}$$

A continuación, convertimos la forma del primer término, **E.**(∇ Λ**B**), utilizando una identidad vectorial:

$$\nabla.\left(\mathbf{E}\wedge\mathbf{B}\right) = \mathbf{B}.\left(\nabla\wedge\mathbf{E}\right) - \mathbf{E}.\left(\nabla\wedge\mathbf{B}\right) \tag{3.16}$$

Por lo tanto:

$$\mathbf{E}.\mathbf{j} = \frac{1}{\mu_0}\left\{-\nabla.\left(\mathbf{E}\wedge\mathbf{B}\right) + \mathbf{B}.\left(\nabla\wedge\mathbf{E}\right) - \mu_0\epsilon_0\mathbf{E}.\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right\} \tag{3.17}$$

Posteriormente, utilizando la ley de Faraday ∇ Λ **E** = $-\partial\mathbf{B}/\partial t$, tenemos:

$$\mathbf{E}.\mathbf{j} = -\frac{1}{\mu_0}\left\{\nabla.\left(\mathbf{E}\wedge\mathbf{B}\right) + \mathbf{B}.\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} + \mu_0\epsilon_0\mathbf{E}.\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right\} \tag{3.18}$$

Observe que si hubiésemos utilizado los campos auxiliares **D** y **H** (que en vacío son **D** = ϵ_0**E** y **H** = **B**/μ_0), habríamos obtenido:

$$\mathbf{E}.\mathbf{j} = -\left\{\nabla.\left(\mathbf{E}\wedge\mathbf{H}\right) + \mathbf{H}.\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E}.\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\right\} \tag{3.19}$$

que es totalmente equivalente en el vacío, pero ligeramente distinto para los medios magnético y dieléctrico, ya que la contabilidad de la energía está hecha. Observe que esto se puede escribir (para el vacío) de la forma siguiente:

$$\mathbf{E}.\mathbf{j} = -\left\{\nabla.\left(\mathbf{E}\wedge\mathbf{B}/\mu_0\right) + \frac{\partial}{\partial t}\tfrac{1}{2}\left(\mathbf{B}.\mathbf{B}/\mu_0 + \epsilon_0\mathbf{E}.\mathbf{E}\right)\right\} \tag{3.20}$$

Aunque puede no resultar obvio, esto se presenta ahora en la forma de una ley de conservación de la energía. El significado físico puede ser obvio si se considera un volumen arbitrario *V*, con una superficie *A*:

$$\int_V \mathbf{E}.\mathbf{j}d^3x = -\int_V \nabla.\left(\mathbf{E}\wedge\mathbf{B}/\mu_0\right) + \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\left[\mathbf{B}.\mathbf{B}/\mu_0 + \epsilon_0\mathbf{E}.\mathbf{E}\right]d^3x \tag{3.21}$$

$$= -\int_A \left(\mathbf{E}\wedge\mathbf{B}/\mu_0\right).d\mathbf{A} - \frac{\partial}{\partial t}\int_V \frac{1}{2}\left[B^2/\mu_0 + \epsilon_0 E^2\right]d^3x \tag{3.22}$$

Esto indica que la tasa total de trabajo en las partículas en *V* es igual a menos la velocidad de cambio de la integral sobre *V* de:

$$\frac{1}{2}\left[B^2/\mu_0 + \epsilon_0 E^2\right] \tag{3.23}$$

menos el flujo del vector $\mathbf{E}\wedge\mathbf{B}/\mu_0$ a través de la superficie *A*.

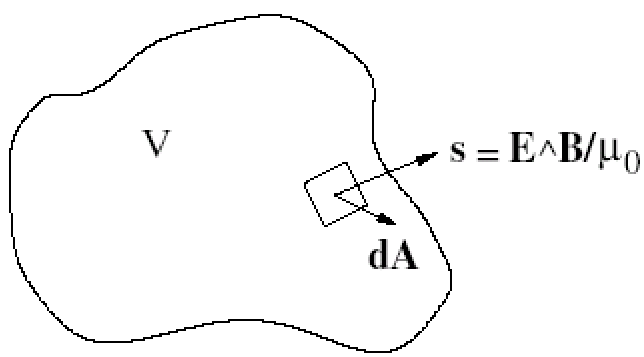

Figura 3.2. Integral del flujo de Poynting sobre la superficie de *V*.

Físicamente, esto indica que $\frac{1}{2}\left[B^2/\mu_0 + \varepsilon_0 E^2\right]$ debe ser considerada la densidad de energía electromagnética en el volumen *V* y la cantidad $\mathbf{E}\wedge\mathbf{B}/\mu_0$ debe ser considerada a su vez la densidad del flujo de energía (a través de cualquier superficie). s = $\mathbf{E}\wedge\mathbf{B}/\mu_0 = \mathbf{E}\wedge\mathbf{H}$ se denomina “el vector de Poynting”. Si escribimos la densidad de energía $w \equiv \frac{1}{2}\left[B^2/\mu_0 + \varepsilon_0 E^2\right]$, el teorema de Poynting sería:

$$\mathbf{E}.\mathbf{j} = -\nabla.\mathbf{s} - \frac{\partial w}{\partial t}. \tag{3.24}$$

La identificación de la densidad de energía de campo y de la densidad de flujo de energía es de gran importancia. Incluso hoy en día, solemos pensar en la potencia eléctrica como algo que transportan, de algún modo, los cables conductores. Pero si entendemos el teorema de Poynting y la teoría electromagnética, nos damos cuenta de que la potencia es transportada por los campos, tal y como se representa en $\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}/\mu_0$, y no por los electrones del conductor, aunque éstos si son portadores de corriente.

3.2.3 Conservación de momento

La velocidad a la que los campos transfieren momento a las partículas es igual a la fuerza electromagnética $q\,(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B})$ y la densidad de fuerza es:

$$\mathbf{f} = \rho\mathbf{E} + \mathbf{j} \wedge \mathbf{B} \quad . \tag{3.25}$$

Utilice las ecuaciones de Maxwell para eliminar ρ y $\mathbf{j}$ a favor de los campos siguientes:

$$\rho = \epsilon_0 \nabla.\mathbf{E} \qquad ; \qquad \mathbf{j} = \frac{1}{\mu_0}\left(\nabla \wedge \mathbf{B} - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) \quad . \tag{3.26}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\mathbf{f} &= \epsilon_0 \left[\mathbf{E}\,(\nabla.\mathbf{E}) + \mathbf{B} \wedge \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \frac{1}{\epsilon_0\mu_0}\mathbf{B} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{B})\right] \\
&= -\frac{\partial}{\partial t}(\epsilon_0 \mathbf{E} \wedge \mathbf{B}) + \epsilon_0 \left[-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \wedge \mathbf{E} + \mathbf{E}\,(\nabla.\mathbf{E}) - \frac{1}{\epsilon_0\mu_0}\left\{\frac{1}{2}\nabla.(\mathbf{B}.\mathbf{B}) - (\mathbf{B}.\nabla)\,\mathbf{B}\right\}\right] \\
&= -\frac{\partial}{\partial t}(\epsilon_0 \mathbf{E} \wedge \mathbf{B}) + \epsilon_0 \left[(\nabla \wedge \mathbf{E}) \wedge \mathbf{E} + \mathbf{E}\,(\nabla.\mathbf{E})\right] - \frac{1}{\mu_0}\left[\frac{1}{2}\nabla B^2 - (\mathbf{B}.\nabla)\,\mathbf{B}\right] \\
&= -\frac{\partial}{\partial t}(\epsilon_0 \mathbf{E} \wedge \mathbf{B}) + \epsilon_0 \left[(\mathbf{E}.\nabla)\,\mathbf{E} - \frac{1}{2}\nabla\,(\mathbf{E}.\mathbf{E}) + \mathbf{E}\,(\nabla.\mathbf{E})\right] \\
&\qquad + \frac{1}{\mu_0}\left[(\mathbf{B}.\nabla)\,\mathbf{B} - \frac{1}{2}\nabla\,(\mathbf{B}.\mathbf{B}) + \mathbf{B}\,(\nabla.\mathbf{B})\right]
\end{aligned} \tag{3.27}$$

A continuación, los dos últimos términos se pueden escribir como la divergencia $\nabla.\mathbf{T}$ de la cantidad de un tensor:

$$\mathbf{T} \equiv \epsilon_0 \left[\mathbf{E}\mathbf{E} - \frac{1}{2}E^2\mathbf{I}\right] + \frac{1}{\mu_0}\left[\mathbf{B}\mathbf{B} - \frac{1}{2}B^2\mathbf{I}\right] \tag{3.28}$$

donde **I** indica el tensor unitario. En notación por sufijos:

$$T_{ij} = \epsilon_0 \left[E_i E_j - \frac{1}{2} E^2 \delta_{ij} \right] + \frac{1}{\mu_0} \left[B_i B_j - \frac{1}{2} B \delta_{ij} \right] \quad . \tag{3.29}$$

T se denomina el "tensor de tensión de Maxwell". Así, la ecuación de fuerza (conservación de momento) se transforma en:

$$\mathbf{f} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon_0 \mathbf{E} \wedge \mathbf{B} \right) + \nabla . \mathbf{T} \tag{3.30}$$

que se encuentra, como el teorema de Poynting, en forma de conservación. Al igual que anteriormente, el significado físico se observa mediante la integración sobre un volumen, hallando que:

$$\epsilon_0 \mathbf{E} \wedge \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \mathbf{E} \wedge \mathbf{B} / \mu_0 = \frac{1}{c^2} \mathbf{s} \tag{3.31}$$

es la densidad volumétrica del momento de campo, y **T** la fuerza por unidad de superficie en un área, es decir, la <u>tensión</u>. Por consiguiente, los campos electromagnéticos transportan una densidad de momento equivalente a $\frac{1}{c^2}$ veces su densidad de flujo de energía, donde hemos utilizado el hecho de que $\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$.

Si nos concentramos en **E** y **B** y dejamos todas las cargas y corrientes explícitas en ρ y **j**, excluimos toda la energía "mecánica" y el momento asociados, por ejemplo, con el movimiento o la polarización de átomos o de sus partes constituyentes. (Aunque esa energía o momento deben ser electromagnéticos si tratamos **E** y **B** promediados a través de todos los átomos). La mayor parte de la confusión con la energía y el momento en los problemas de electromagnetismo surge de la poca claridad sobre lo que hay que considerar en la energía electromagnética / momento electromagnético frente al momento de partículas / la energía de partículas.

3.3 Inductancia, energía y tensiones de imanes

El teorema de Poynting formaliza la observación ya realizada en la que indicábamos que la energía necesaria para "cargar" una inductancia (es decir, incrementar la corriente de ésta) se almacena en el campo magnético. Ahora sabemos que la densidad de energía es $B^2 / 2\mu_0$ (en vacío) o $\frac{1}{2}$ **B.H** en un medio lineal magnético (pero la mayoría de los materiales magnéticos no son lineales). Igualmente, la densidad de energía almacenada en el campo eléctrico de un condensador es $\varepsilon_0 E^2 / 2$ ó $\frac{1}{2}$ **ED**. También hallamos que la densidad de fuerza asociada con B estaba gobernada por un tensor $\frac{1}{\mu_0}$ [**BB** $-\frac{1}{2} B^2$**I**] cuyo segundo término tiene la misma forma que la densidad de energía $B^2 / 2\mu_0$. Existe una razón fundamental para esta relación que podemos demostrar pensando en las fuerzas sobre los imanes.

3.3.1 Relación entre la densidad de energía y la presión magnética en un solenoide

Considere un solenoide formado por una corriente que fluye acimutalmente. Resulta sencillo demostrar que la fuerza electromagnética **j** Λ **B** es siempre hacia delante. De hecho, no podemos tomar la corriente total y multiplicarla por un campo interno para conseguir la fuerza, ya que **j** y **B** varían a través del imán. $B = 0$ fuera. En lugar de realizar la integral de jB, calculemos la fuerza por el método del "trabajo virtual". Este implica la figuración de un pequeño movimiento gradual, calculando los cambios de energía e igualándolos al trabajo realizado $F.dx$. Por tanto, ignore el grosor del conductor y considere una expansión del radio inicial a por un pequeño incremento da. La energía magnética almacenada (por unidad de longitud axial) $\int_o^a \frac{B^2}{2\mu_0} 2\pi r dr$ cambia, ya que B cambia (posiblemente). En realidad, el hecho de que B cambie o no depende del circuito externo acoplado al solenoide, a través del cual fluye la corriente. Supongamos que ese circuito actúa para mantener la corriente constante, de forma que B es constante.

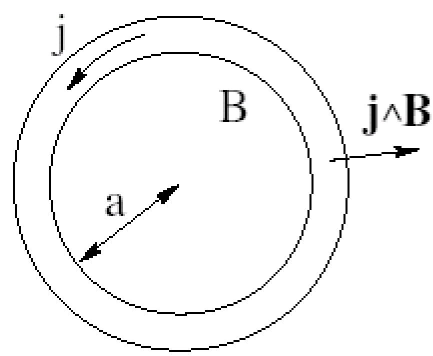

Figura 3.3. Fuerza en el imán de un solenoide.

Necesitamos calcular la cantidad de energía que proporciona el circuito a la inductancia. Esto requiere la tensión durante la expansión. Si recordamos la ley de Faraday,

$$V = \oint \mathbf{E}.\mathbf{dl} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} \qquad (3.32)$$

Si B es constante, $\Phi = \pi a^2 B$, por lo que:

$$\frac{d\Phi}{dt} = B 2\pi a \frac{da}{dt} \qquad (3.33)$$

De ahí que la tensión inducida en una sola vuelta sea:

$$V = -B 2\pi a \frac{da}{dt} \quad . \tag{3.34}$$

La corriente por unidad de longitud que es necesario proporcionar a B es $\mu_0 J = B$. Por lo tanto, el trabajo realizado por el circuito externo es, por unidad de longitud, (para un pequeño incremento *da*):

$$\int -VJdt = \int \frac{B}{\mu_0} B 2\pi a \frac{da}{dt} dt \tag{3.35}$$

$$dW_{circuito} = \frac{B^2}{\mu_0} 2\pi a da \tag{3.36}$$

El cambio en la energía magnética almacenada es:

$$\frac{B^2}{2\mu_0} d^3x = \frac{B^2}{2\mu_0} 2\pi a da = dW_{magnético} \tag{3.37}$$

Entonces, la conservación de energía es:

$$dW_{circuito} = dW_{magnético} + dW_{mecánico} \tag{3.38}$$

donde $dW_{mecánico} = 2\pi a da.P$ y P es la fuerza por unidad de longitud axialmente y por unidad de longitud acimutalmente, es decir, la fuerza por unidad de superficie o <u>presión</u>. Si sustituimos tenemos:

$$\frac{B^2}{\mu_0} 2\pi a da = \frac{B^2}{2\mu_0} 2\pi a da + P\, 2\pi a da \tag{3.39}$$

Por lo tanto,

$$P = \frac{B^2}{2\mu_0} \tag{3.40}$$

es la presión exterior que el campo B ejerce sobre el imán. Observe que nunca recurrimos a ninguna ley de fuerza como el tensor de tensión de Maxwell, sino que únicamente utilizamos nuestro conocimiento de la densidad de energía magnética. Además, el resultado final no depende de nuestra suposición sobre el circuito externo. Podíamos haber supuesto cualquier cosa que deseáramos. Si realizamos correctamente el recuento de energía, conseguiríamos el mismo resultado de fuerza. Además, si suponemos que la distribución del campo B en el conductor no cambia, no necesitamos saber lo que es obtener este resultado. Por lo tanto, la fuerza / el área total en el imán no depende de la distribución de corriente / campo del imán, a condición de que el imán sea fino, de forma que la energía almacenada en el campo magnético *en el grosor del imán* sea pequeña. La presión magnética es grande para campos altos.

$$P = \frac{B^2}{2\mu_0} = 4.0 \times 10^5 B^2 \text{ Pa} \qquad = 4B^2 \text{ bar.} \tag{3.41}$$

La presión del campo magnético 1T es 4 bares ($\sim$atmósferas). La presión del campo *B* 10T es 40MPa (compare la resistencia del rendimiento del cobre duro $\sim 300MPa$). Para un cilindro delgado, la tensión (tensión circular) inducida por una presión *P* es:

$$\frac{a}{t}P \tag{3.42}$$

a = radio, *t* = grosor. Los imanes de alta energía tiene que ser "gruesos", e incluso entonces alcanzan pronto límites de tensión.

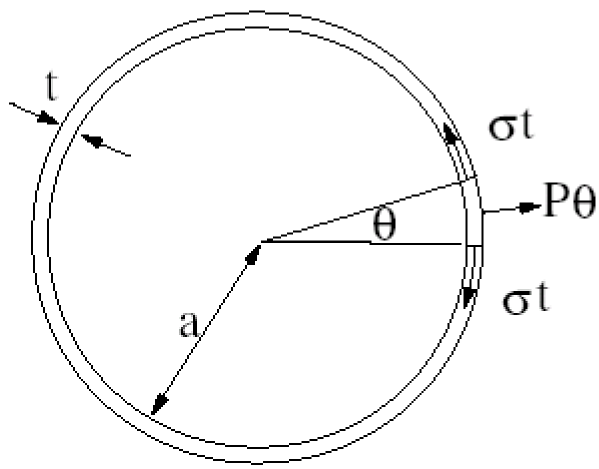

Figura 3.4. La tensión circular, σ en un cilindro delgado equilibra la presión exterior, *P*.

3.4 Potenciales para campos de variación de tiempo

Los problemas electroestáticos y electromagnéticos se resuelven más fácilmente utilizando los potenciales ϕ y **A**. Estos potenciales son también críticos en situaciones de variación de tiempo y se pueden hallar ecuaciones generales para todas las ecuaciones de Maxwell, como se indica a continuación:

$$\nabla.\mathrm{B} = 0 \qquad \text{quiere decir que } \mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A} \tag{3.43}$$

sigue siendo una representación válida. Entonces:

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\nabla \wedge \mathbf{A} = -\nabla \wedge \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \tag{3.44}$$

Por lo tanto:

$$\nabla \wedge \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad . \tag{3.45}$$

Por consiguiente:

$$\mathbf{E} + \dot{\mathbf{A}} \tag{3.46}$$

se puede escribir como el gradiente:

$$\mathbf{E} + \dot{\mathbf{A}} = -\nabla\phi \qquad \text{o} \qquad \mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad . \tag{3.47}$$

de esta forma, la ley de Coulomb se transforma en:

$$\frac{\rho}{\epsilon_0} = \nabla.\mathbf{E} = -\nabla.\left(\nabla\phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = -\nabla^2\phi - \frac{\partial}{\partial t}(\nabla.\mathbf{A}) \tag{3.48}$$

y la ley de Ampere en:

$$\begin{aligned} \mu_0 \mathbf{j} &= \nabla \wedge \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\frac{1}{c^2} = \nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A}) + \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial \nabla\phi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}\right) \\ &= \nabla\left(\nabla.\mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) - \nabla^2\mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \end{aligned} \tag{3.49}$$

A continuación, recuerde que existe una arbitrariedad en nuestra elección de **A**, ya que sólo su bucle es igual a **B**. En realidad, podemos elegir que $\nabla.\mathbf{A}$ sea lo que queramos. Una elección, el gauge de Coulomb, era $\nabla.\mathbf{A} = 0$. "El gauge de Lorentz":

$$\nabla.\mathbf{A} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} \quad . \tag{3.50}$$

Entonces:

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{3.51}$$

$$\nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\mathbf{j} \tag{3.52}$$

Las ecuaciones de Maxwell son totalmente equivalentes a estas ecuaciones de onda con fuentes. (Además de la condición de gauge de Lorentz). Considerado en este gauge, vemos que la influencia electromagnética de ρ o $\mathbf{j}$ no actúa de forma instantánea a distancia. En su lugar, la influencia tiene que propagarse desde las fuentes a la velocidad de la luz, c.

3.4.1 Soluciones generales

Queremos hallar la solución general a estas ecuaciones. Trabajamos solamente en la ecuación ϕ porque es escalar. Su solución se generalizará inmediatamente. En primer lugar, analicemos la ecuación homogénea:

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0 \qquad (3.53)$$

que se cumple dondequiera que $\rho = 0$ (en vacío). Además, recuerde que podemos añadir cualquier solución de esta ecuación a una solución de la ecuación no homogénea. Un tipo de solución son la sondas planas, es decir, cosas que varían en una única dirección. Si elegimos ejes como $\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} = 0$, la ecuación es unidimensional:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0 \qquad (3.54)$$

Las soluciones generales de esta ecuación son:

$$\phi(x,t) = f(x \pm ct) \quad . \qquad (3.55)$$

Es decir, las funciones con formas arbitrarias que se mueven hacia el aumento o la disminución de x, preservando su forma. En el caso de nuestro problema, lo más importante son las ondas esféricamente simétricas.

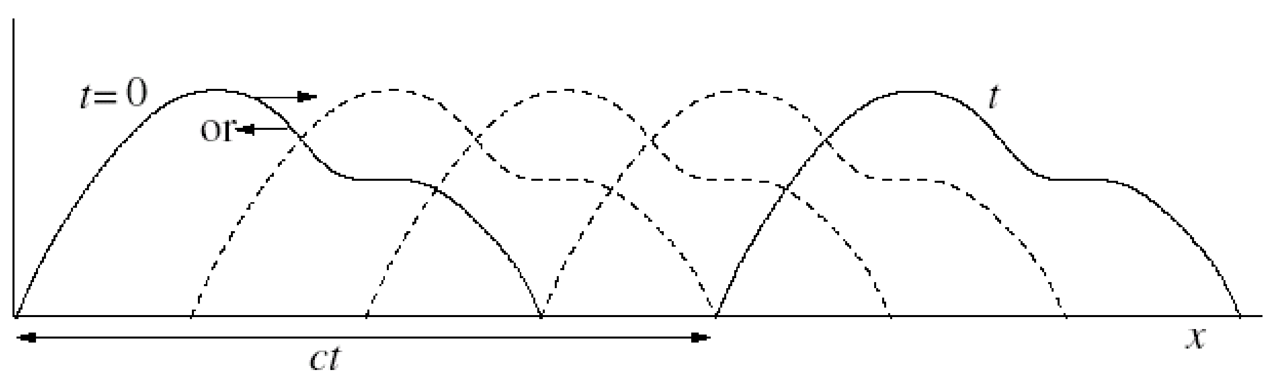

Figura 3.5. Solución arbitraria de la ecuación unidimensional de onda.

Es decir, en coordenadas esféricas (r, θ, χ), las soluciones tales como $\frac{\partial}{\partial\theta} = \frac{\partial}{\partial\chi} = 0$. Entonces:

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial\phi}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} \tag{3.56}$$

Realice la sustitución siguiente:

$$\phi = \frac{u}{r} \tag{3.57}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial\phi}{\partial r} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\left(\frac{\partial u}{\partial r}\frac{1}{r} - \frac{u}{r^2}\right) = \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r} - u\right)\right] \\ &= \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial u}{\partial r} + r\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{\partial u}{\partial r}\right] = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \end{aligned} \tag{3.58}$$

Por lo que:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \tag{3.59}$$

Por tanto, u satisface la ecuación unidimensional (planar) de onda, con una solución general $f(r \pm ct)$.

$$\phi = \frac{f\left(r \pm ct\right)}{r} \tag{3.60}$$

De ahí que la ecuación anterior sea la solución general de la ecuación homogénea de onda que es esféricamente simétrica. Expandiendo (signo –) o convergiendo (signo +) ondas radiales. En realidad, esta solución esféricamente simétrica <u>no</u> satisface la ecuación homogénea en $r = 0$, debido a la irregularidad que se da allí. De hecho, ya conocemos eso a partir del problema estático (tomando **x´** como el centro del espacio de coordenadas).

$$\nabla^2\frac{1}{r} = -4\pi\delta\left(\mathbf{r}\right) = -4\pi\delta\left(\mathbf{x} - \mathbf{x}'\right) \tag{3.61}$$

Por lo tanto, si f no es singular en todos los lugares, entonces:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\frac{f(r \pm ct)}{r} = -4\pi f(\pm ct)\delta\left(\mathbf{x} - \mathbf{x}'\right) \tag{3.62}$$

Nuestra solución es, en realidad, la solución del problema (matemático) del cálculo del potencial de una *carga puntual de variación de tiempo* en la posición **x**′, es decir, de una densidad de carga $\rho = q(t)\delta(x - x')$, donde la carga está relacionada con *f* mediante:

$$f\left(\pm ct\right) = \frac{q\left(t\right)}{4\pi\epsilon_0} \qquad \text{y por lo tanto} \quad f\left(r \pm ct\right) = \frac{q\left(t \pm r/c\right)}{4\pi\epsilon_0} \quad . \tag{3.63}$$

En resumen, el potencial en la posición x, debido a una carga de variación de tiempo de magnitud $q(t)$ en **x**′ es:

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{q(t \pm |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c)}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \tag{3.64}$$

Si se considera el caso en el que la carga es una función delta en el tiempo y en el espacio, $q(t) = \delta(t - t')$, observamos que la función de Green $G(\mathrm{x}, t|\mathrm{x}', t')$ (en el tiempo y el espacio) para el operador:

$$\mathcal{L} \equiv \nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad , \tag{3.65}$$

concretamente, la función que resuelve $G(\mathrm{x}, t|\mathrm{x}', t') = \delta(\mathrm{x} - \mathrm{x}') \times \delta(t - t')$ es:

$$G\left(\mathbf{x}, t|\mathbf{x}', t'\right) = \frac{-\delta\left(t \pm \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c} - t'\right)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \tag{3.66}$$

y la solución general de la ecuación potencial electroestática:

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{3.67}$$

es, por tanto:

$$\phi\left(\mathbf{x}, t\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho\left(\mathbf{x}', t \pm \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}\right)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}d^3x' \quad . \tag{3.68}$$

3.5 Soluciones avanzadas y relacionadas

Observe que todavía tenemos el signo ± en nuestra solución potencial. Si tomamos el signo –, la integral sería:

$$\frac{\rho\left(\mathbf{x}', t - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{c}\right)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \quad . \tag{3.69}$$

Esto indica que la contribución a nuestro potencial t en x, desde una densidad de carga en x´, depende solamente del valor de esa carga en el momento:

$$t' = t - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{c} \tag{3.70}$$

Esto sucede antes, en el momento que recibe la influencia electromagnética para propagarse desde **x´** hasta **x**, es decir, mediante $\frac{|\mathrm{x}-\mathrm{x}'|}{\mathrm{c}}$. Un potencial basado en este signo se denomina el potencial "retardado", ya que la influencia llega después de la carga: retardada. El tiempo t' se denomina, muy a menudo, "tiempo retardado", a pesar de suceder antes. [En inglés retardado ≡ retrasado]. Si tomásemos la señal +, tendríamos un resultado muy peculiar, ya que la influencia (es decir, el potencial) dependería de la densidad de carga en un tiempo posterior. Por lo tanto, la siguiente solución "avanzada" no cumple nuestras ideas de causalidad:

$$\frac{\rho\left(\mathbf{x}', t + \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{c}\right)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \tag{3.71}$$

Normalmente, sostenemos que únicamente puede surgir un efecto (potencial) de una causa (carga) si ésta es anterior en el tiempo. Por esa razón, se descarta el potencial avanzado como "no físico", pero no se conoce bien la justificación de esta elección, vinculada con debates filosóficos del tiempo como flecha.

Habiendo obtenido la solución general para la ecuación escalar de onda con fuentes, podemos aplicarla de inmediato a cada componente vectorial de la ecuación para **A**; por lo que, en resumen, tenemos:

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\mathbf{x}', t')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} d^3x \tag{3.72}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}', t')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} d^3x' \tag{3.73}$$

con $t' = t - |\mathrm{x} - \mathrm{x}'|/c$.

A menudo, la notación [[*f*]] se utiliza para indicar la evaluación de cualquier función *f* en tiempo retardado. Debe se extremadamente cuidadoso a la hora de tomar diferenciales de cantidades retardadas, ya que existe una dependencia en x, no sólo en el espacio si no también en el argumento de tiempo. Por lo tanto, por ejemplo:

$$\nabla' f\left(\mathbf{x}', t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}\right) = \nabla' [\![f]\!] \neq [\![\nabla' f]\!] \tag{3.74}$$

El valor retardado de un gradiente es distinto al gradiente del valor retardado.

En general:

$$\nabla' \left\{ f\left(\mathbf{x}', t - \frac{|x - x'|}{c}\right)\right\} = [\![\nabla' f]\!] + \nabla' \left(t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c}\right) \left[\!\!\left[\frac{\partial f}{\partial t}\right]\!\!\right] \tag{3.75}$$

$$= [\![\nabla' f]\!] + \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{c|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \left[\!\!\left[\frac{\partial f}{\partial t}\right]\!\!\right] = \nabla' [\![f]\!] \tag{3.76}$$

$$\text{y} \qquad \nabla' \wedge [\![\mathbf{v}]\!] = [\![\nabla' \wedge \mathbf{v}]\!] + \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{c|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \wedge \left[\!\!\left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\right]\!\!\right] \quad . \tag{3.77}$$