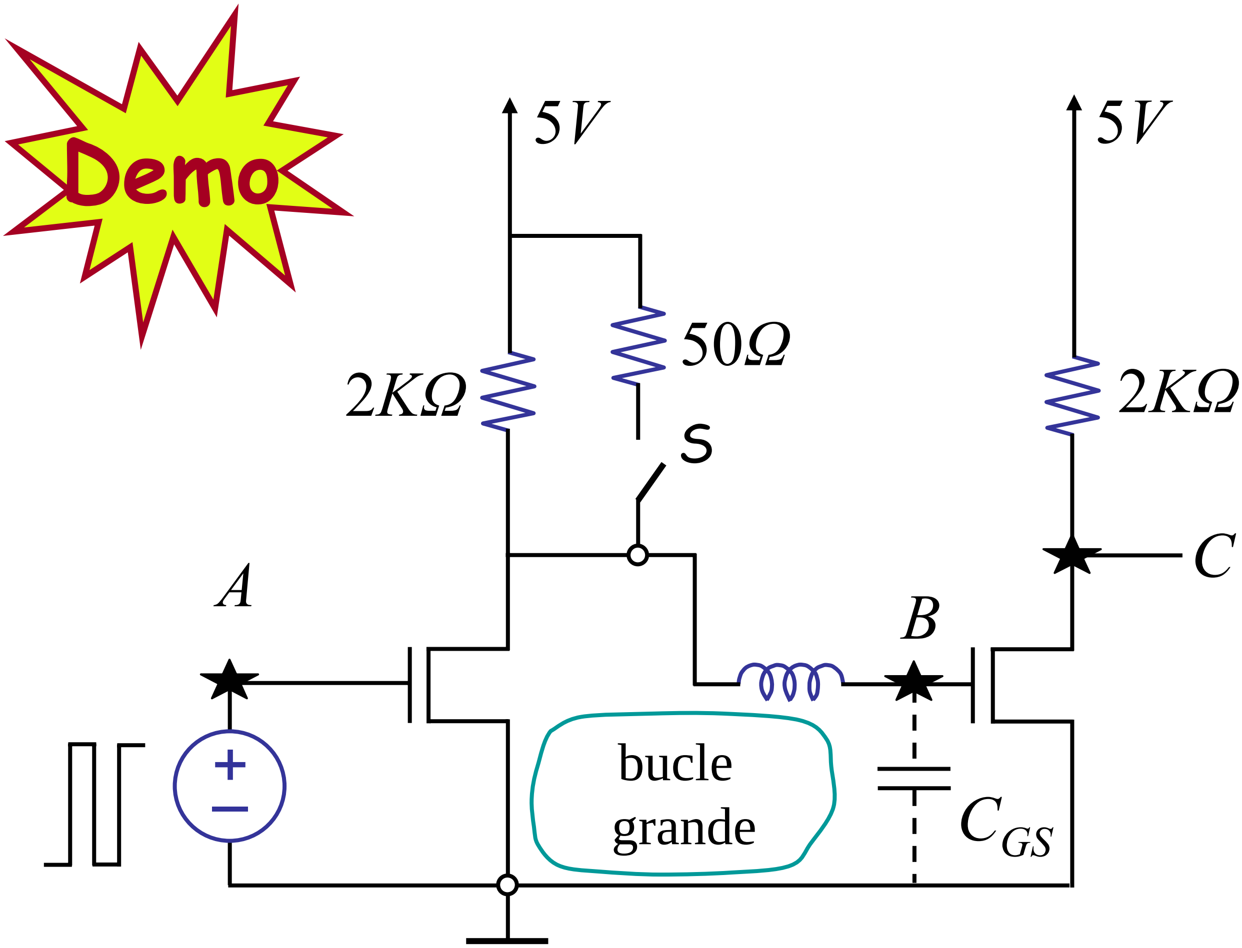
Sistemas de segundo orden

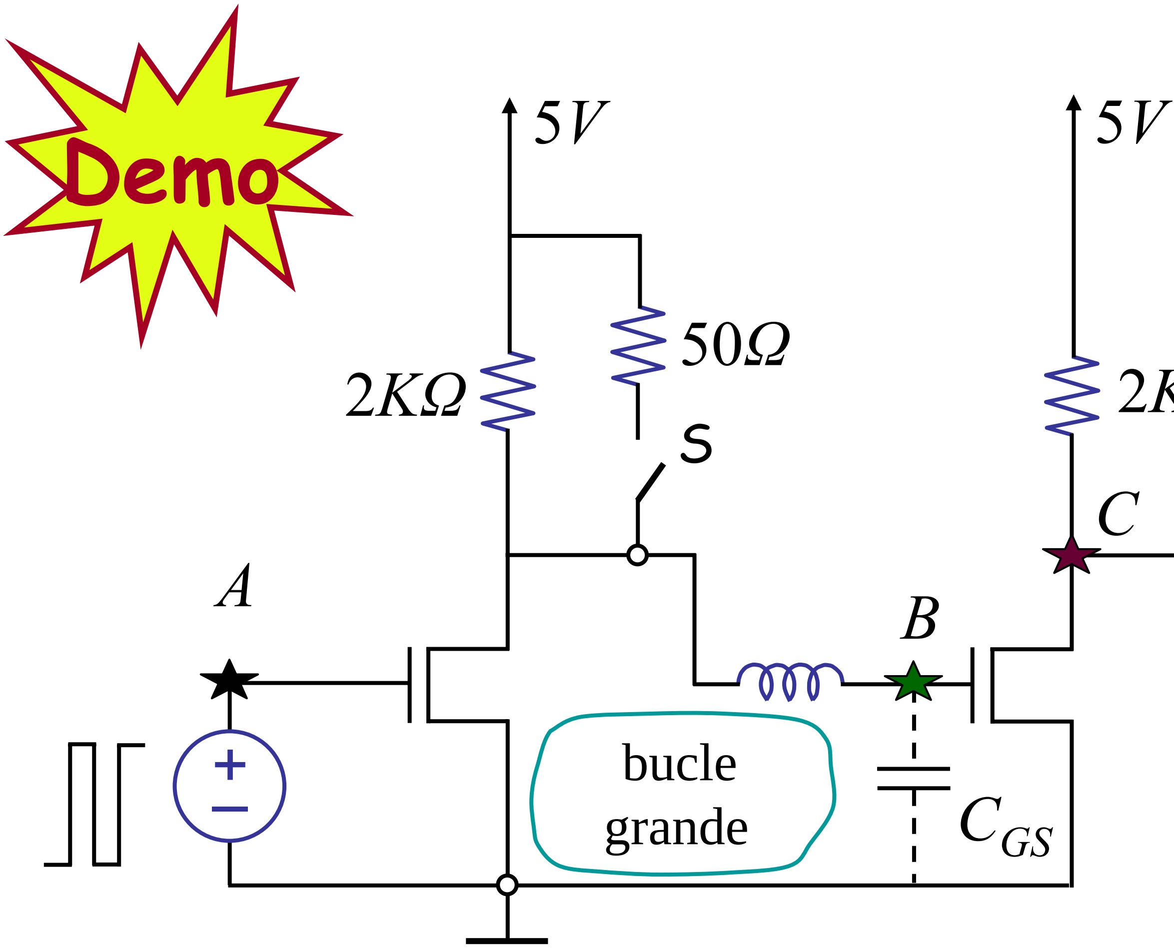
Sistemas de segundo orden



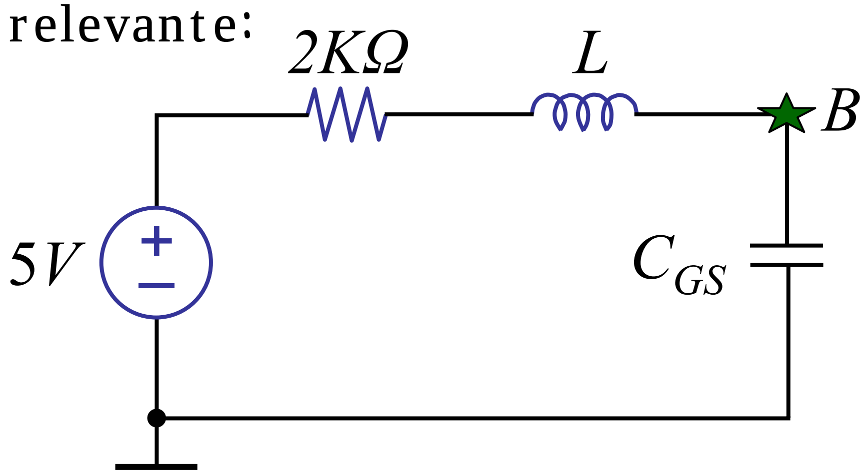
Nuestro amigo, el inversor, accionando otro inversor. Se muestran la inductancia parásita del cable y la capacitancia puerta a fuente del MOSFET.

[Repase el apéndice de álgebra compleja para la clase siguiente]

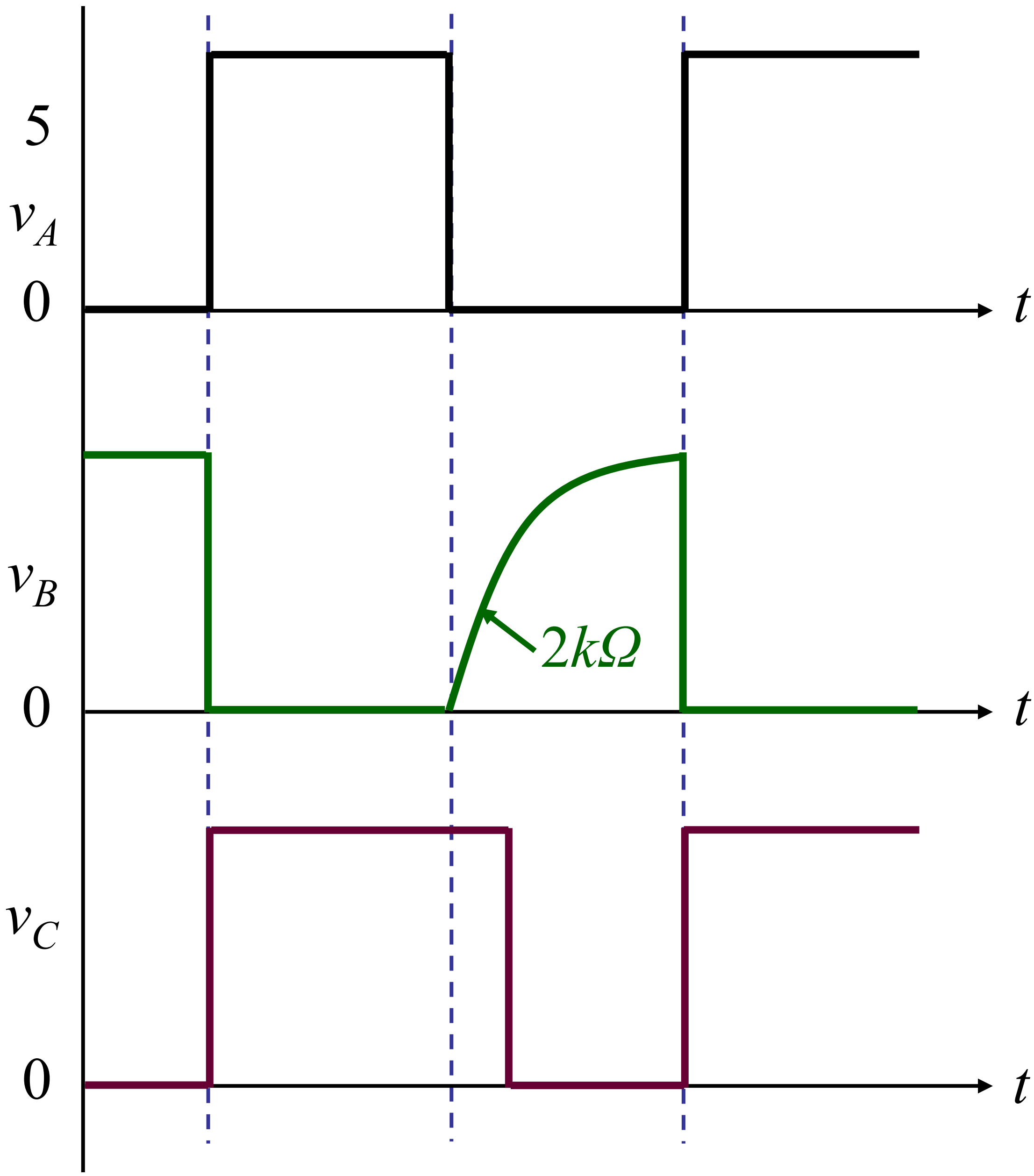
Sistemas de segundo orden



Circuito relevante:

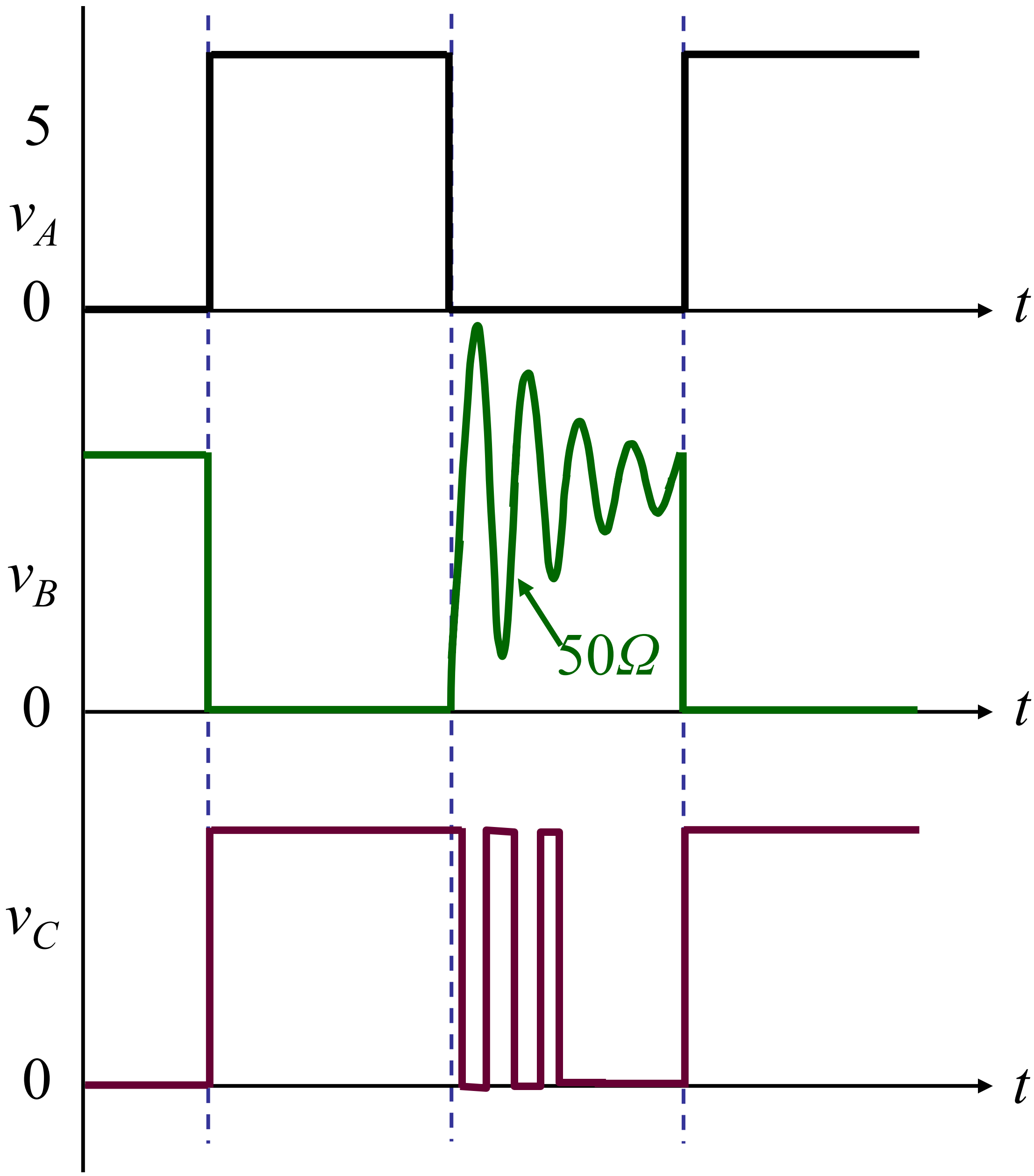


Salida observada $2k\Omega$



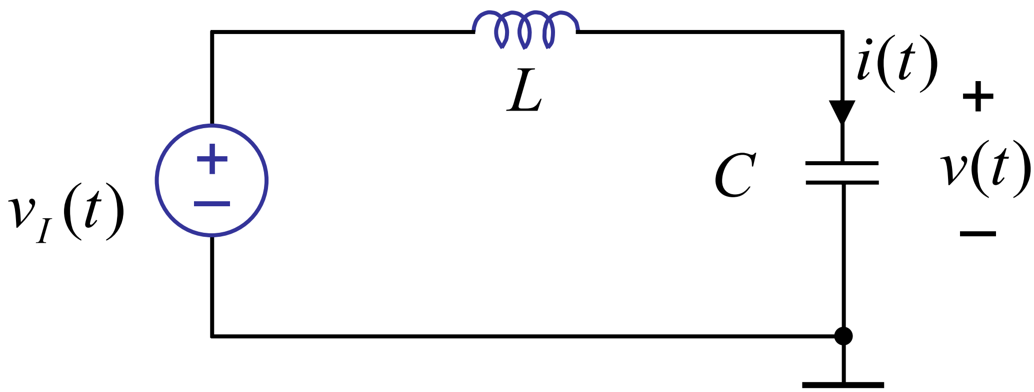
A continuación, tratemos de acelerar nuestro inversor cerrando el conmutador *S* para disminuir la resistencia efectiva.

Salida observada ~50Ω



¡eh!

Primero, analicemos la red *LC*



Método de nodos:

$$i(t) = C\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t}(v_I - v)\,dt = C\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{1}{L}(v_I - v) \qquad = C\frac{d^2v}{dt^2}$$

Recuerde

$$v_I - v = L\frac{di}{dt}$$

$$\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t}(v_I - v)\,dt = i$$

$$\boxed{\underbrace{LC}_{\text{tiempo}^2}\frac{d^2v}{dt^2} + v = v_I}$$

v, i variables de estado

Resolver

Recuerde, el método de soluciones homogéneas y particulares:

① Halle la solución particular.

② Halle la solución homogénea.

↓

4 pasos

③ La solución total es la suma de las soluciones particular y homogénea.

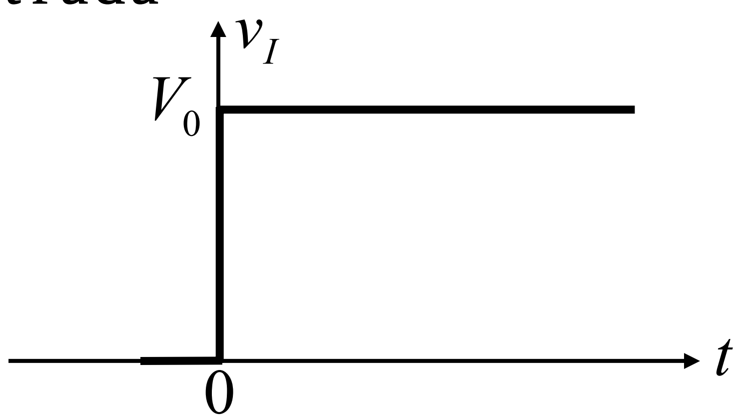
Utilice las condiciones iniciales para resolver las constantes restantes.

$$v = v_P(t) + v_H(t)$$

Resolvamos

$$LC\frac{d^2v}{dt^2}+v=v_I$$

Para la entrada



Y para las condiciones iniciales

$v(0)=0 \qquad i(0)=0 \qquad$ [ZSR]

1 Solución particular,

$$LC\frac{d^2v_P}{dt^2}+v_P=V_0$$

$v_P=V_0$ es una solución.

② Solución homogénea,

Solución para:

$$LC\frac{d^2 v_H}{dt^2} + v_H = 0$$

Recuerde v_H : solución de la ecuación homogénea (drive ajustado a cero)

Método de cuatro pasos:

Ⓐ Suponga una solución de la forma*:

$$v_H = Ae^{st} \qquad , \; A, \; s = ?$$

por lo tanto, $LC\cancel{A}s^2\cancel{e^{st}} + \cancel{Ae^{st}} = 0$

Ⓑ $$s^2 = -\frac{1}{LC}$$ ecuación característica

$$s = \pm j\sqrt{\frac{1}{LC}}$$

$$j = \sqrt{-1}$$

Ⓒ Raíces $s = \pm j\omega_o$

$$\omega_o = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Solución general,

Ⓓ $$v_H = A_1 e^{j\omega_o t} + A_2 e^{-j\omega_o t}$$

*Generalmente, las ecuaciones diferenciales se resuelven adivinando las soluciones.

③ Solución total,

$$v(t) = v_P(t) + v_H(t)$$

$$v(t) = V_0 + A_1 e^{j\omega_o t} + A_2 e^{-j\omega_o t}$$

Halle incógnitas a partir de las soluciones iniciales.

$$v(0) = 0$$

$$0 = V_0 + A_1 + A_2$$

$$i(0) = 0$$

$$i(t) = C\frac{dv}{dt}$$

$$i(t) = CA_1 j\omega_o e^{j\omega_o t} - CA_2 j\omega_o e^{-j\omega_o t}$$

por lo tanto, $0 = CA_1 j\omega_o - CA_2 j\omega_o$

o, $A_1 = A_2$

$$-V_0 = 2A$$

$$A_1 = -\frac{V_0}{2}$$

por tanto, $v(t) = V_0 - \frac{V_0}{2}\left(e^{j\omega_o t} + e^{-j\omega_o t}\right)$

③ Solución total,

Recuerde la relación de Euler:

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x$$

(verifique mediante la expansión de Taylor)

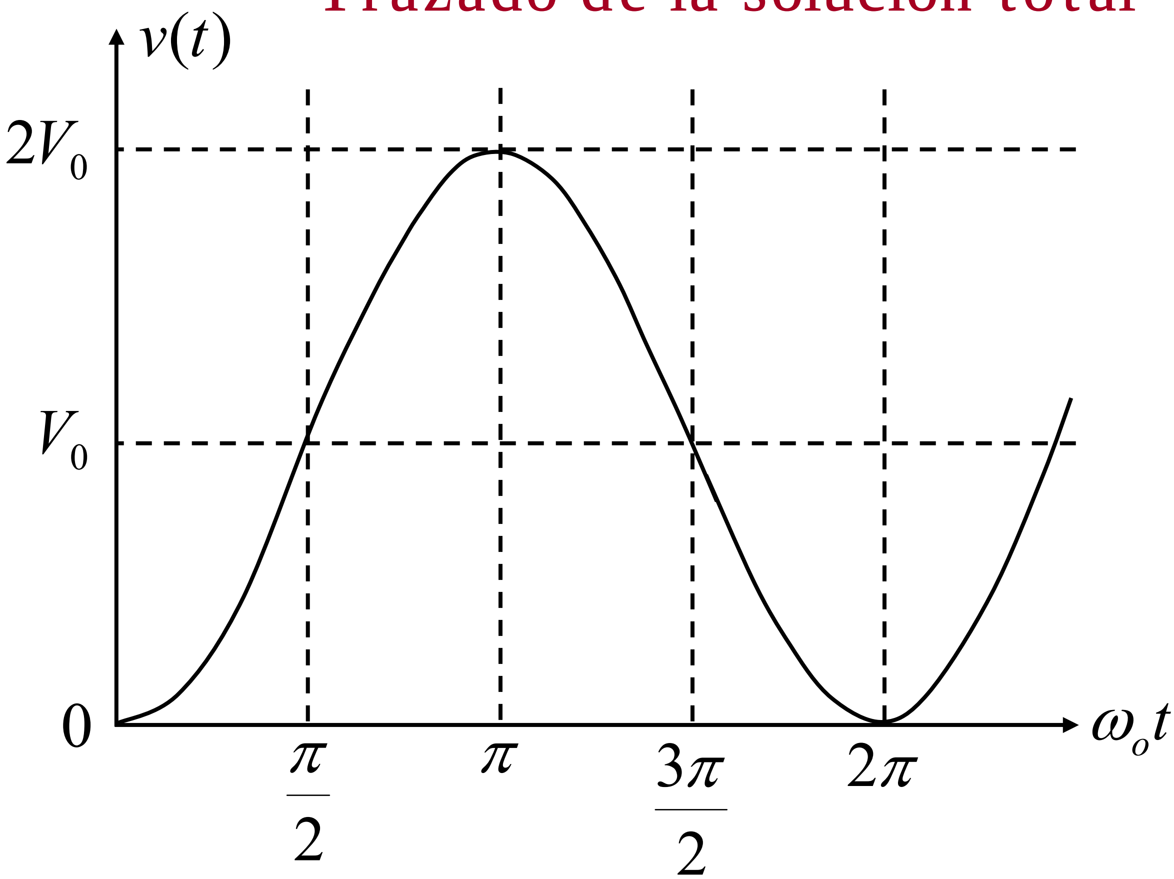
$$\frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} = \cos x$$

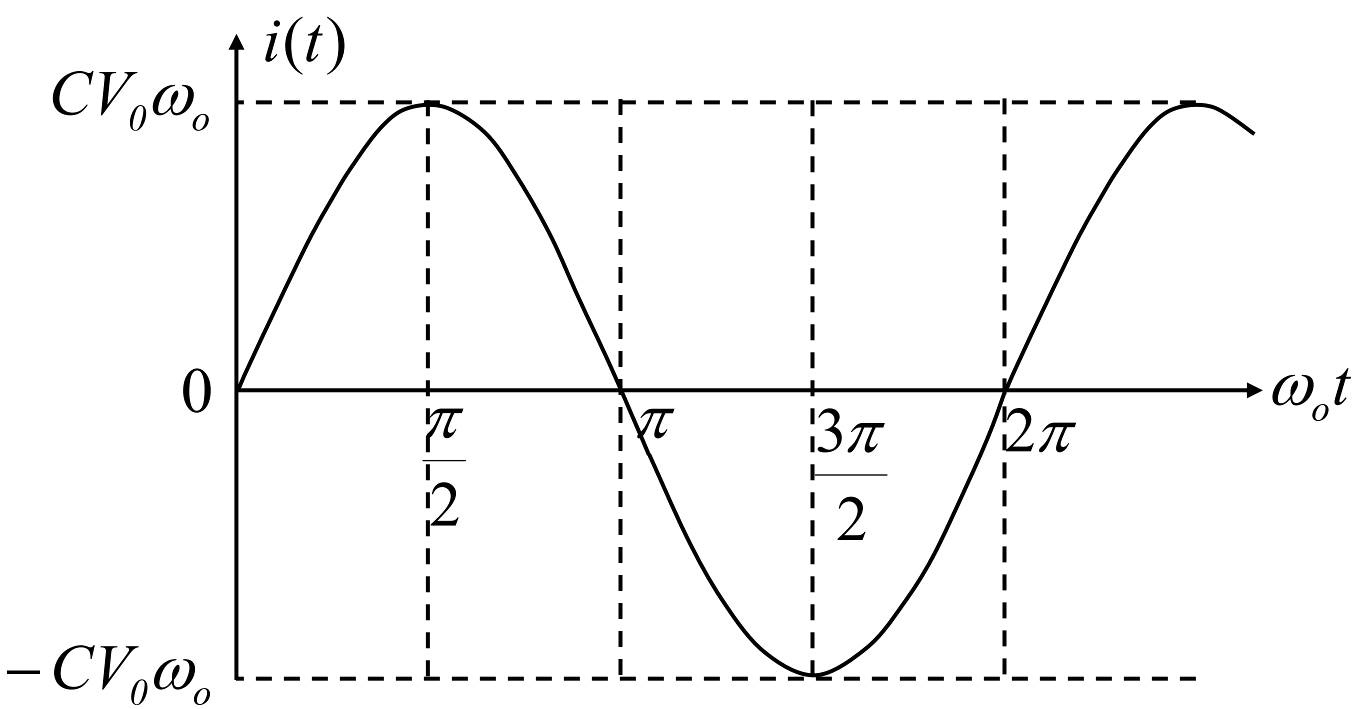
por tanto, $\boxed{v(t) = V_0 - V_0 \cos \omega_o t}$ donde

$$\boxed{i(t) = CV_0 \omega_o \sin \omega_o t} \qquad \omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

La salida parece sinusoidal

Trazado de la solución total





Resumen del método

1. Escriba *DE* para el circuito aplicando el método de nodos.

2. Halle una solución particular v_P mediante suposición, y ensayo y prueba.

3. Halle la solución homogénea v_H

   A. Suponga una solución de la forma Ae^{st}.

   B. Obtenga la ecuación característica.

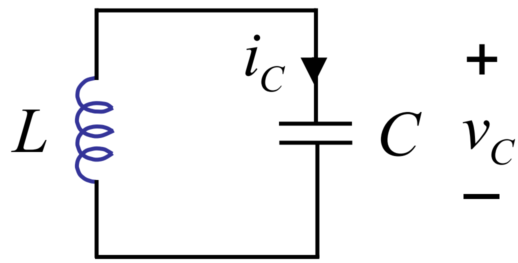
   C. Resuelva la ecuación característica para las raíces s_i.

   D. Forme v_H sumando los términos $A_i e^{s_i t}$

4. La solución total es $v_P + v_H$, resuelva para las restantes constantes utilizando las condiciones iniciales.

Ejemplo

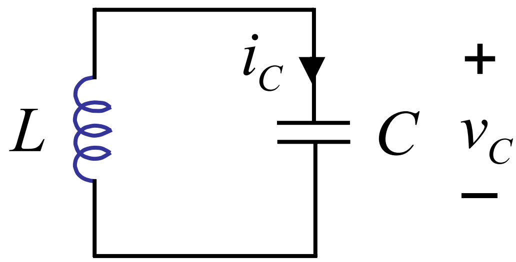
Qué sucedería si tenemos:



$$v_C(0) = V$$
$$i_C(0) = 0$$

Podemos obtener directamente la respuesta de la solución homogénea $(V_0 = 0)$.

Ejemplo



$v_C(0) = V$

$i_C(0) = 0$

Podemos obtener directamente la respuesta de la solución homogénea $(V_0 = 0)$.

$$v_C(t) = A_1 e^{j\omega_o t} + A_2 e^{-j\omega_o t}$$

$v_C(0) = V$

$$V = A_1 + A_2$$

$i_C(0) = 0$

$$0 = CA_1 j\omega_o - CA_2 j\omega_o$$

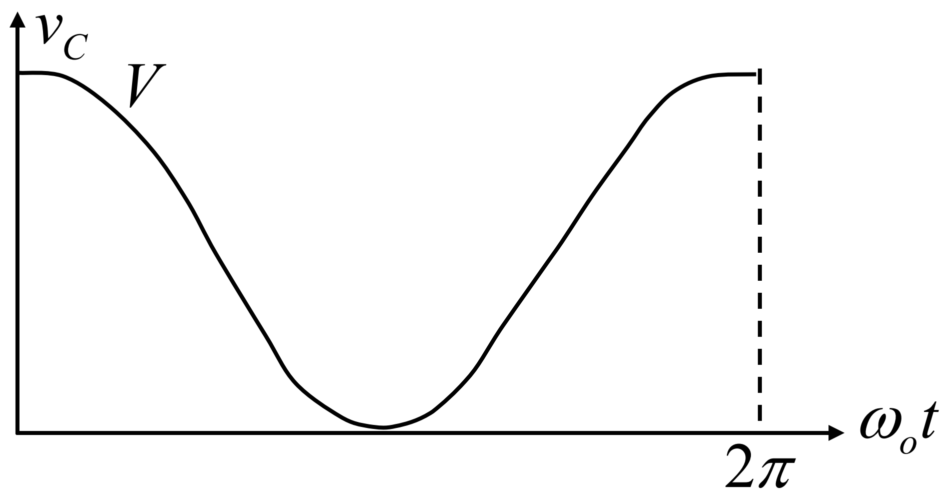
o, $$A_1 = A_2 = \frac{V}{2}$$

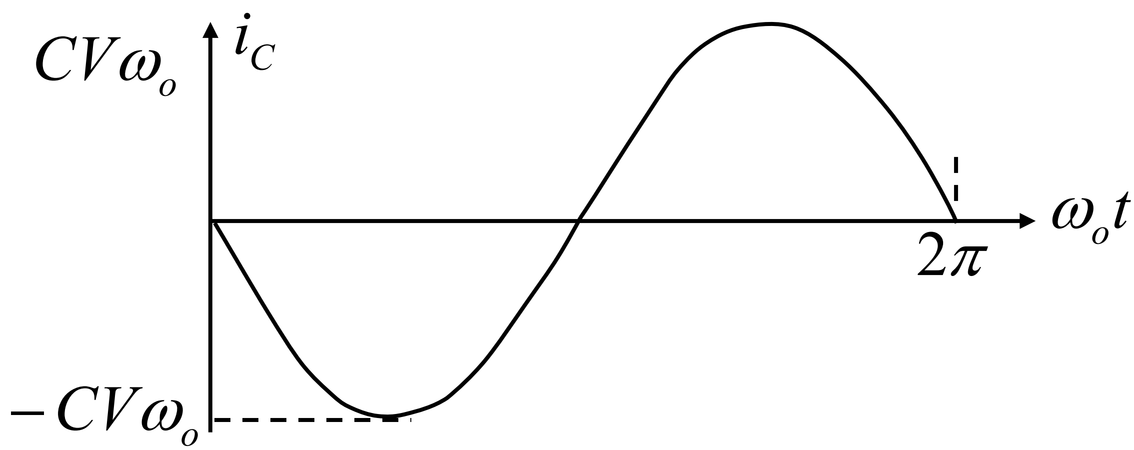
o $$v_C = \frac{V}{2}\left(e^{j\omega_o t} + e^{-j\omega_o t}\right)$$

$$v_C = V \cos \omega_o t$$

$$i_C = -CV\,\omega_o \sin \omega_o t$$

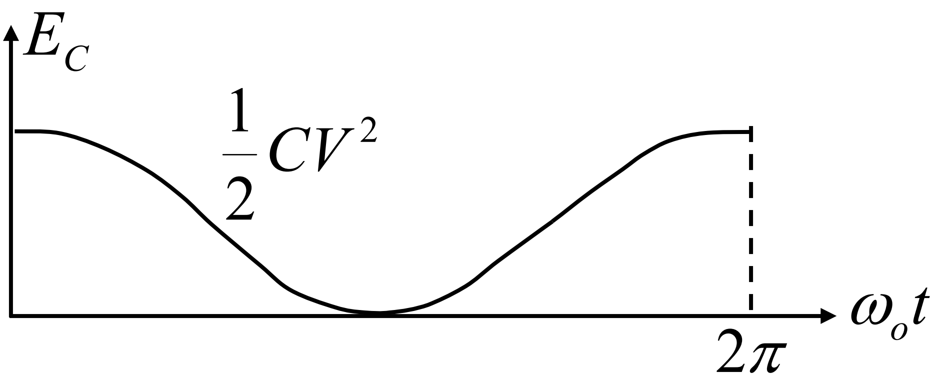
Ejemplo



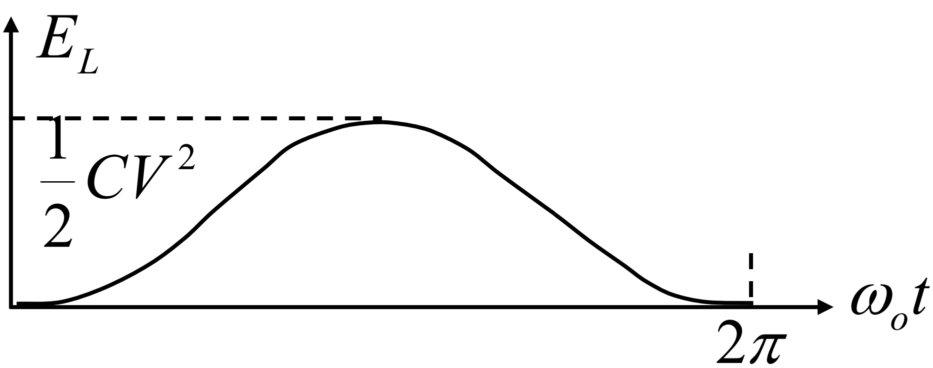


Energía

$C: \ \frac{1}{2} C {v_C}^2$



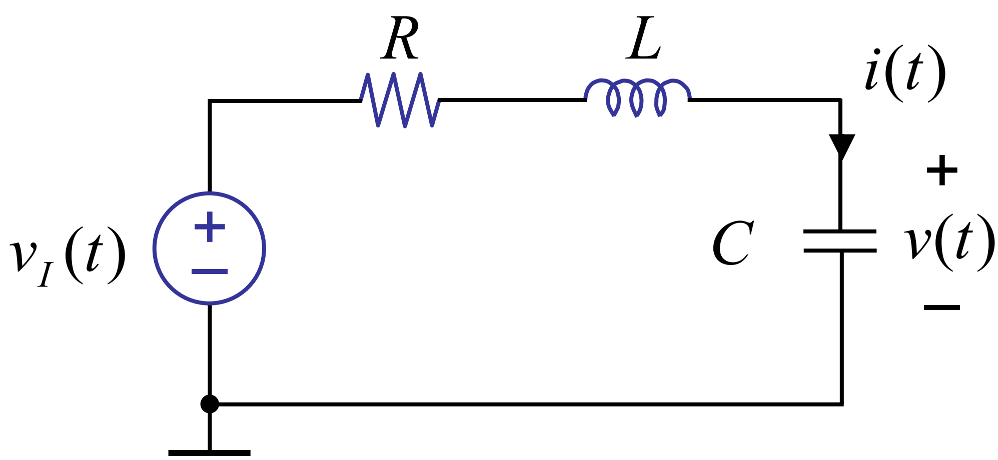
$L: \ \frac{1}{2} L {i_C}^2$

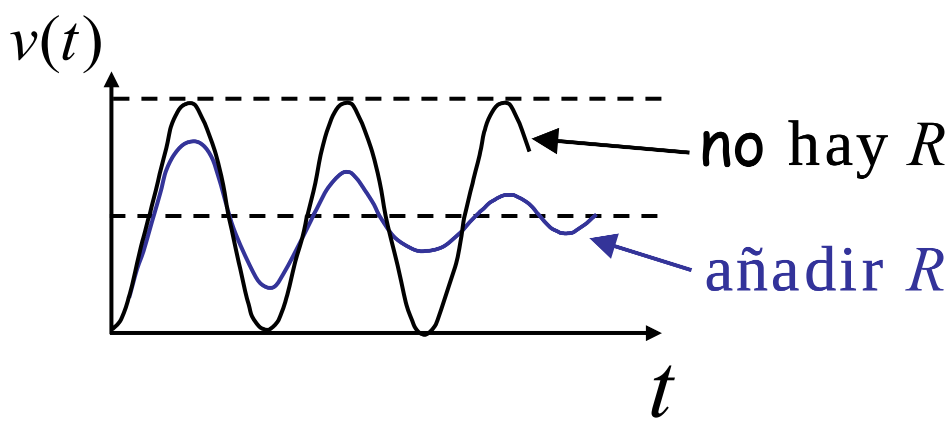


Observe, $\frac{1}{2} C {v_C}^2 + \frac{1}{2} L {i_C}^2 = \frac{1}{2} CV^2$

La energía total en el sistema es una constante, pero se desplaza de un lado al otro entre el condensador y la bobina de inductancia.

Circuitos RLC





Sinusoides amortiguados con R - recuerde la demo.

Véase la sección 13.2 de A&L