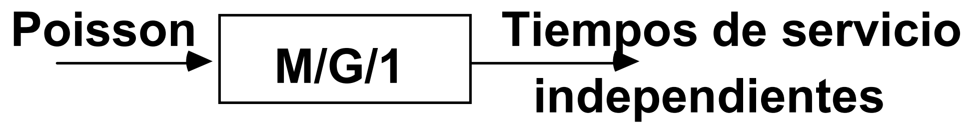
Temas 8 y 9

Colas M/G/1

Eytan Modiano
MIT

Colas M/G/1



- **Llegadas de Poisson con tasa λ**

- **El tiempo de servicio tiene una distribución arbitraria con E[X] y E[X^2] dados:**
  - **Los tiempos de servicio son independientes e idénticamente distribuidos (IID)**
  - **Independiente de los tiempos de llegada**
  - **E[tiempo de servicio] = $1/\mu$**
  - **Cola con un solo servidor**

Fórmula de Pollaczek-Khinchin (P-K)

$$W = \frac{\lambda E[X^2]}{2(1-\rho)}$$

donde $\rho = \lambda/\mu = \lambda E[X]$ = utilización de la línea

Según la fórmula de Little:

$$N_Q = \lambda W$$

$$T = E[X] + W$$

$$N = \lambda T = N_Q + \rho$$

EJEMPLOS DE M/G/1

- **Ejemplo 1: M/M/1**

  $E[X] = 1/\mu$; $E[X^2] = 2/\mu^2$

$$\boxed{W = \frac{\lambda}{\mu^2(1-\rho)} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}}$$

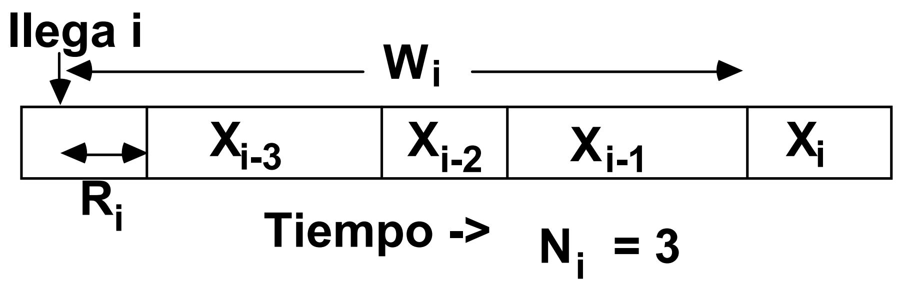
- **Ejemplo 2: M/D/1 (tiempo de servicio constante $1/\mu$)**

  $E[X] = 1/\mu$; $E[X^2] = 1/\mu^2$

$$\boxed{W = \frac{\lambda}{2\mu^2(1-\rho)} = \frac{\rho}{2\mu(1-\rho)}}$$

Demostración de Pollaczek-Khinchin

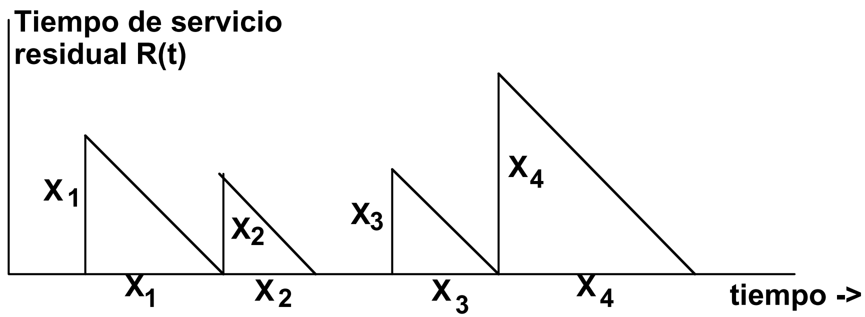
- **Supongamos:** W_i = tiempo de espera en cola de la llegada i
  R_i = tiempo de servicio residual experimentado por I (es decir, tiempo que pasa hasta que se completa el servicio del cliente que está siendo servido cuando llega i)
  N_i = Número de clientes que i encuentra en la cola



$$W_i = R_i + \sum_{j=i-N_i}^{i-1} X_j$$

- $E[W_i] = E[R_i] + E[X]E[N_i] = R + N_Q/\mu$
  - Aquí hemos utilizado la propiedad PASTA más la propiedad del tiempo de servicio independiente
- $W = R + \lambda W/\mu \Rightarrow W = R/(1-\rho)$
  - Utilizando la fórmula de Little

¿Qué es R?
(Promedio del tiempo de servicio residual)



Sea M(t) = número de clientes servidos en el tiempo t

E[R(t)] = 1/t (suma del área de los triángulos)

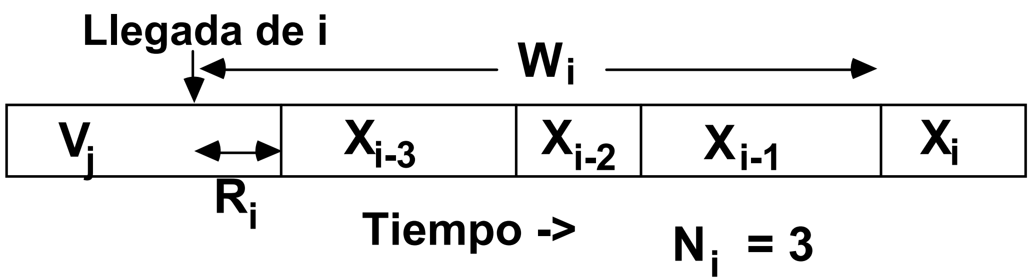
$$\mathbf{R}_t = \frac{1}{t}\int_0^t R(\tau)\,d\tau = \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{M(t)} X_i^2 = \frac{1}{2}\,\frac{M(t)}{t}\sum_{i=1}^{M(t)}\frac{X_i^2}{M(t)}$$

Cuando t tiende a infinito $\dfrac{M(t)}{t}$ **= tasa media de salida = tasa media de llegada**

$$\frac{M(t)}{t}\sum_{i=1}^{M(t)}\frac{X_i^2}{M(t)} \quad \mathbf{= E[X^2] \quad => R = \lambda E[X^2]/2}$$

Cola M/G/1 con vacaciones

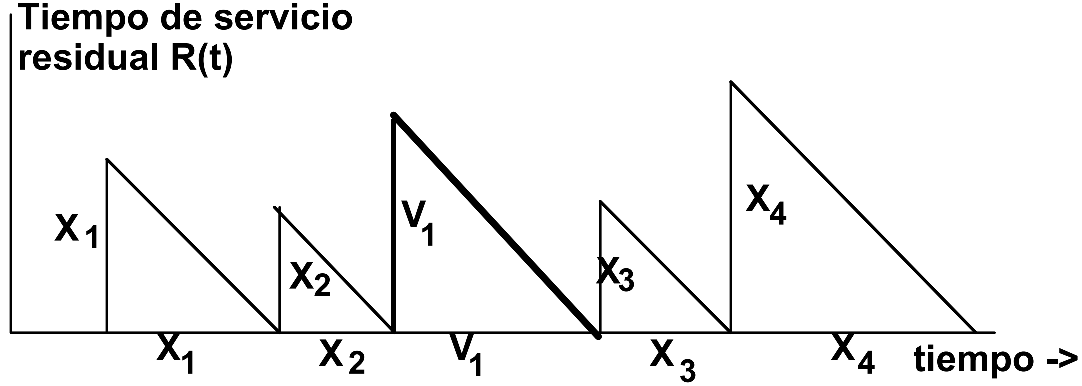
- Útil para los sistemas de reservas y sondeos (Ej.: *Token rings*)
- Cuando la cola está vacía, el servidor se toma un período de vacaciones
- Los tiempos de vacaciones son IID e independientes de los tiempos de servicio y de llegadas:
  - Si el sistema está vacío tras un período de vacaciones, el servidor se toma otro más
  - El único impacto en el análisis es que un paquete que llega a un sistema vacío ha de esperar a que termine el período de vacaciones



$$\boxed{W_i = R_i + \sum_{j=i-N_i}^{i-1} X_j}$$

$$E[W_i] = E[R_i] + E[X]E[N_i] = R + N_Q/\mu = R/(1-\rho)$$

Promedio de tiempo de servicio residual (con vacaciones)



$$R = [R(t)] = \frac{1}{t}\int_0^t R(\tau)\,d\tau = \frac{1}{t}\left(\sum_{i=1}^{M(t)} \frac{X_i^2}{2} + \sum_{j=1}^{L(t)} \frac{V_j^2}{2}\right)$$

$$R = \lim_{t \to \infty} \frac{E[M(t)]}{t}\,\frac{E[X^2]}{2} + \frac{L(t)}{t}\,\frac{E[V^2]}{2}$$

- **Donde L(t) es el número de períodos vacacionales tomados hasta el tiempo t**
- **M(t) es el número de clientes que se han servido hasta el tiempo t**

Promedio de tiempo de servicio residual (con vacaciones)

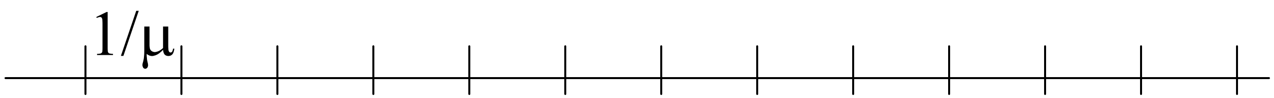
- **Cuando $t \to \infty$, $M(t)/t \to \lambda$ y $L(t)/t \to \lambda_v$ = tasa de vacaciones**
- **A continuación, establecemos $I = 1$ si el sistema está de vacaciones y $I = 0$ si el sistema está ocupado**
- **Según el teorema de Little, tenemos que:**
  - **$E[I] = E[\#\text{vacaciones}] = P(\text{sistema desocupado}) = 1-\rho = \lambda_v E[V]$**
  - **$\Rightarrow \lambda_v = (1-\rho)/E[V]$**
- **De este modo:**

Recordemos que $W = R/(1-\rho)$

$$\boxed{R = \lambda \frac{E[X^2]}{2} + \frac{(1-\rho)E[V^2]}{2E[V]}}$$

$$\boxed{W = \lambda \frac{E[X^2]}{2(1-\rho)} + \frac{E[V^2]}{2E[V]}}$$

Ejemplo: sistema M/D/1 con intervalos de longitud fija o *slots*



Cada intervalo = tiempo de transmisión de un paquete = $1/\mu$

- **La transmisión sólo puede empezar al inicio de un intervalo**
- **Si al inicio de un intervalo el sistema está vacío, el servidor no estará disponible mientras no haya finalizado dicho intervalo (vacaciones)**

- **E[X] = E[v] =** $1/\mu$
- **E[X²] = E[v²] =** $1/\mu^2$

$$W = \frac{\lambda/\mu^2}{2(1-\lambda/\mu)} + \frac{1/\mu^2}{2/\mu} = \frac{\lambda/\mu}{2(\mu-\lambda)} + \frac{1/\mu}{2}$$

$$= W_{M/D/1} + E[X]/2$$

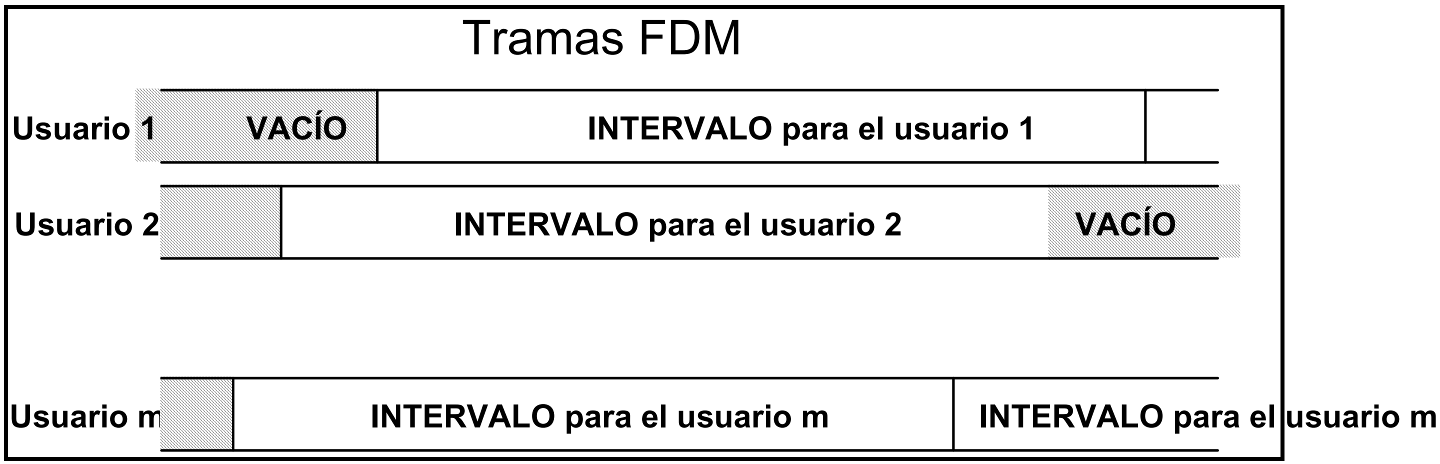
- **Obsérvese que transcurre un promedio de 1/2 intervalo mientras se espera el inicio de un intervalo**

Ejemplo de FDM

- **Sean m cadenas de Poisson de paquetes de longitud fija con una tasa de llegada de λ/m, cada una de ellas multiplexada por FDM (multiplexación por división en frecuencias) en m subcanales. Tráfico total = λ**

  Supongamos que lleva m unidades de tiempo transmitir un paquete, entonces μ=1/m

  La carga total del sistema será: $\rho = \lambda$

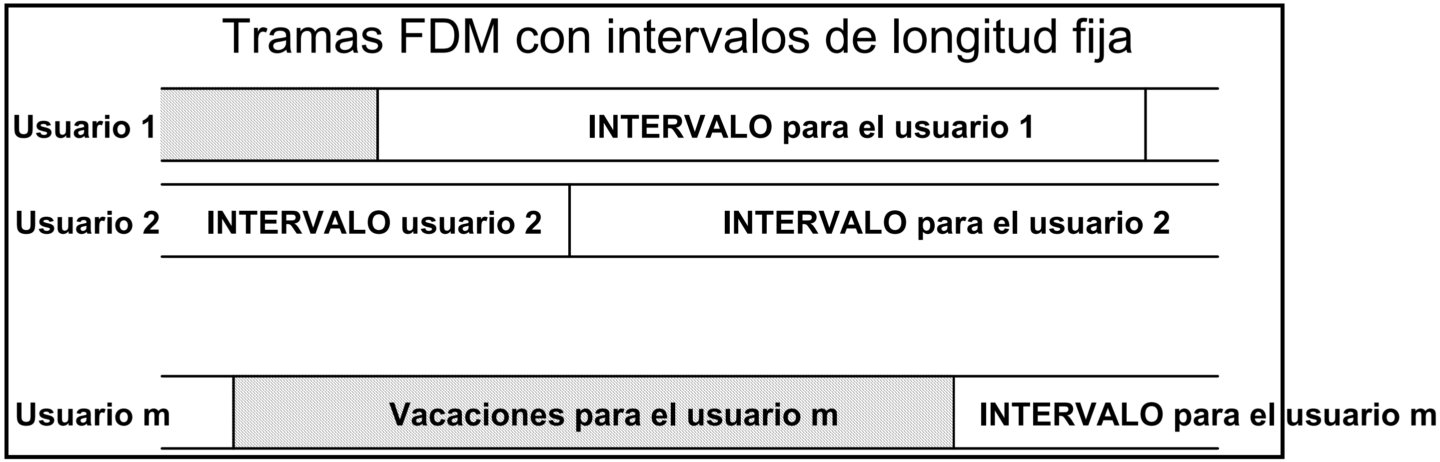
- 

- **Tenemos un sistema M/D/1 { W=λE[x2]/2(1-ρ) }**

$$\boxed{W_{FDM} = \frac{(\lambda/m)\, m^2}{2\,(1-\rho\,)} = \frac{\rho \quad m}{2\,(1-\rho\,)}}$$

FDM con intervalos de longitud fija

- **Supongamos ahora que el sistema está dividido en intervalos de longitud fija y que las transmisiones empiezan únicamente en las m fronteras que delimitan las unidades de tiempo**



- **Es una cola M/D/1 con <u>vacaciones</u>:**
  - **El servidor se toma unas vacaciones de m unidades de tiempo cuando no hay nada que transmitir**

    $E[V] = m;\ E[V_2] = m_2.$

$$W_{SFDM} = W_{FDM} + E[V^2]/2E[V]$$

$$= W_{FDM} + m/2$$

EJEMPLO DE TDM

Trama TDM				
slot m	*slot* 1	*slot* 2	. . .	*slot* m

- **Lo mismo sucede en la TDM con intervalos de un paquete (cada sesión tiene que esperar por su propio límite de intervalo). Así:**

  W = R/(1-ρ)

$$\boxed{R = \lambda\frac{E[X^2]}{2} + \frac{(1-\rho)E[V^2]}{2E[V]}}$$

$$\boxed{W = \lambda\frac{E[X^2]}{2(1-\rho)} + \frac{E[V^2]}{2E[V]}}$$

EJEMPLO DE TDM

- **Por lo tanto,** $W_{TDM} = W_{FDM} + m/2$

  Al añadir el tiempo de transmisión del paquete, la TDM es mejor ya que el tiempo de transmisión es = 1 en lugar de m.

$$T_{FDM} = [W_{FDM}] + m$$

$$T_{SFDM} = [W_{FDM} + m/2] + m$$

$$T_{TDM} = [W_{FDM} + m/2] + 1$$

$$= T_{FDM} - [m/2 - 1]$$