Tema 7

El Teorema de Burke y las redes de colas

Eytan Modiano
Instituto Tecnológico de Massachusetts

El Teorema de Burke

- **Una propiedad interesante de las colas M/M/1 que simplifica enormemente su combinación dentro de una red es el hecho de que la salida de una cola M/M/1 con una tasa de llegada λ es un proceso de Poisson de tasa λ:**
  - **Esto forma parte del Teorema de Burke, que continúa a partir de esta reversibilidad**
- **Una cadena de Markov posee la siguiente propiedad:**
  - **P[futuro | presente, pasado] = P[futuro | presente]**

    Condicional en el estado actual (presente); los estados pasados y futuros son independientes

    P[pasado | presente, futuro] = P[pasado | presente]

    => $P[X_n=j \mid X_{n+1}=i, X_{n+2}=i_2,\ldots] = P[X_n=j \mid X_{n+1}=i] = P^*_{ij}$

El Teorema de Burke (continuación)

- **La secuencia de estados recorrida hacia atrás en el tiempo, en el estado estacionario es, una vez más, una cadena de Markov y se puede demostrar fácilmente que:**

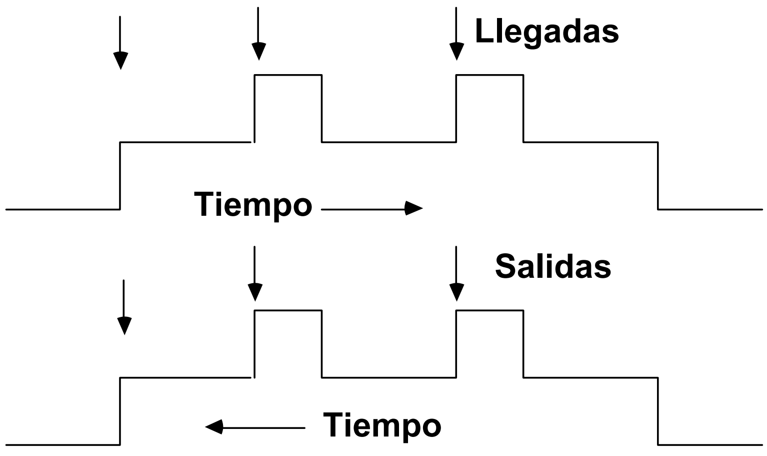
  $$p_i P^*_{ij} = p_j P_{ji} \qquad \text{(Ej.: M/M/1} \quad (p_n)\lambda=(p_{n+1})\mu)$$

- **Una cadena de Markov es reversible si P*ij = Pij:**
  - **Las probabilidades de transición en un sentido son las mismas que en sentido contrario**
  - **En caso de ser reversible, es imposible distinguir estadísticamente la secuencia de estados recorrida hacia atrás en el tiempo de la secuencia recorrida hacia adelante**

- **Una cadena es reversible si $p_i P_{ij} = p_j P_{ji}$**

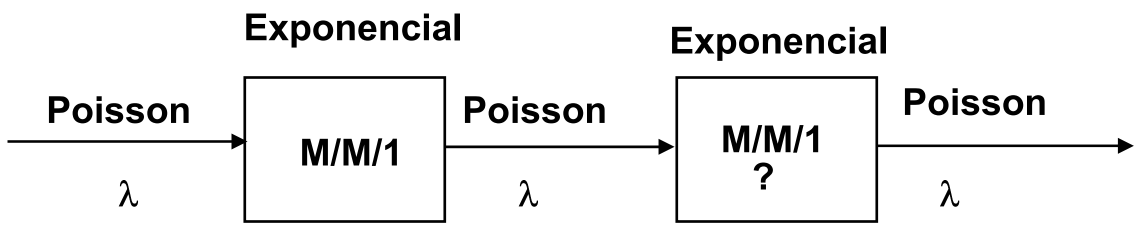
- **Todos los procesos de nacimiento y muerte son reversibles:**
  - **Se deben cumplir las ecuaciones de equilibrio detalladas**

Implicaciones del Teorema de Burke



- Dado que las llegadas en el sentido del tiempo dan lugar a un proceso de Poisson, las salidas en sentido inverso formarán también un proceso de Poisson
- Dado que el proceso inverso es estadísticamente el mismo que el proceso hacia adelante en el tiempo, el proceso de salida (en el sentido del tiempo) es un proceso de Poisson
- Por el mismo motivo, el estado (paquetes que hay en el sistema) tras una salida (en el sentido del tiempo) es independiente de las salidas anteriores
  – En el proceso inverso el estado es independiente de las futuras llegadas

REDES DE COLAS

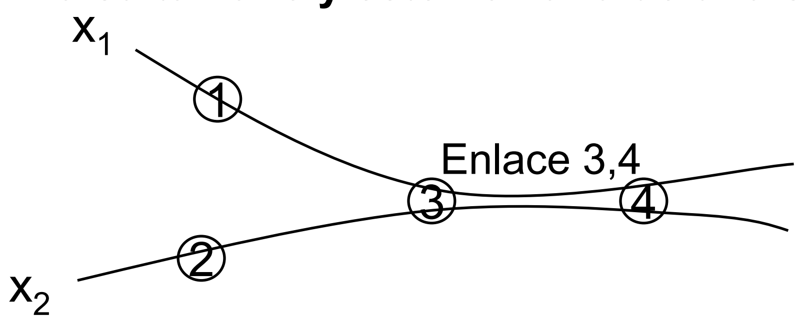


- El proceso de salida de una cola M/M/1 es un proceso de Poisson con la misma tasa λ que el de entrada

- ¿Es la segunda cola de tipo M/M/1?

Suposición de independencia (Kleinrock)

- **Presupone que los tiempos de servicio son independientes de una cola a otra:**
  - **No es una premisa realista: el tiempo de servicio de un paquete lo determina su tamaño y éste no varía de una cola a otra**



- **X_p = tasa de llegada de los paquetes por la ruta p**
- **Let λ_{ij} = tasa de llegada de los paquetes al enlace (i,j)**

$$\lambda_{ij} = \sum_{\text{P recorre el enlace (i,j)}} X_p$$

- **μ_{ij} = tasa de servicio en el enlace (i,j)**

Aproximación de Kleinrock

- **Presupone que todas las colas se comportan como colas M/M/1 independientes:**

$$N_{ij} = \frac{\lambda_{ij}}{\mu_{ij} - \lambda_{ij}}$$

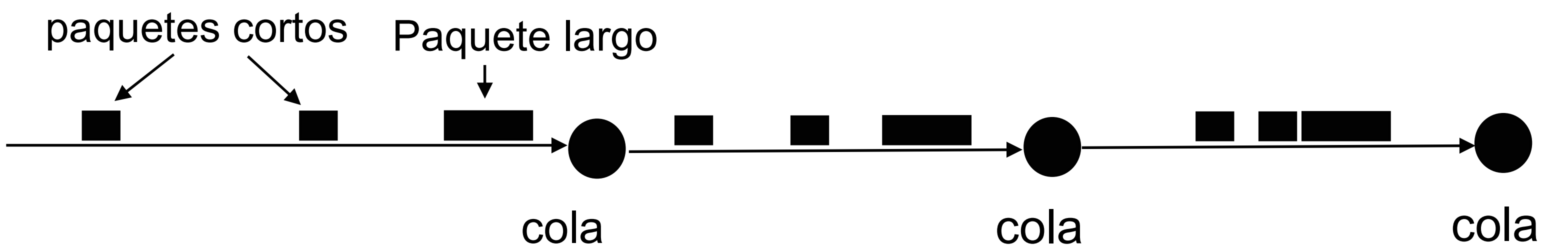
- **N = Promedio de paquetes presentes en la red; T = Promedio de espera de los paquetes en la red:**

$$N = \sum_{i,j} N_{ij} = \frac{\lambda_{ij}}{\mu_{ij} - \lambda_{ij}}, \qquad T = \frac{N}{\lambda}$$

$$\lambda = \sum_{todos\ los\ caminos\ p} X_P = \text{tasa total de llegadas externas}$$

- **La aproximación no siempre es exacta, pero resulta útil cuando la precisión en la predicción no constituye un factor crítico:**
  - **Importa el rendimiento relativo, no el real**
  - **Ej.: diseño de la topología**

Efecto de intercambio lento



- **Ejemplo de acumulación por el efecto de intercambio lento:**
  - **Los paquetes largos requieren más tiempo de servicio en cada nodo**
  - **Los paquetes más cortos alcanzan a los largos**
- **Es similar a lo que sucede en carretera:**
  - **Un vehículo lento seguido de muchos vehículos más rápidos que él debido a que lo alcanzan sin poder adelantarlo**

Redes de Jackson

- **Llegadas externas independientes de Poisson**
- **Tiempos de servicio exponenciales independientes:**
  - **La misma tarea tiene distintos tiempos de servicio en diferentes colas**
- **Enrutamiento independiente de paquetes:**
  - **Cuando un paquete abandona el nodo i, se dirige al nodo j con probabilidad P_{ij}**
  - **El paquete abandona el sistema con probabilidad** $1 - \sum_j P_{ij}$
  - **Los paquetes pueden volver a entrar en la red**
- **Tasa de llegada en el nodo i:**

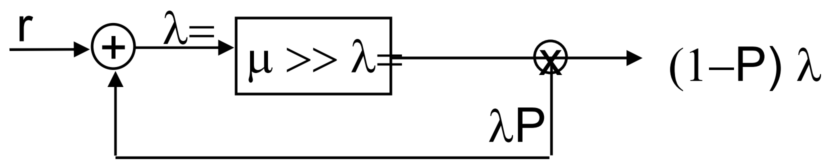
$$\lambda_i = r_i + \sum_k \lambda_k P_{ki}$$

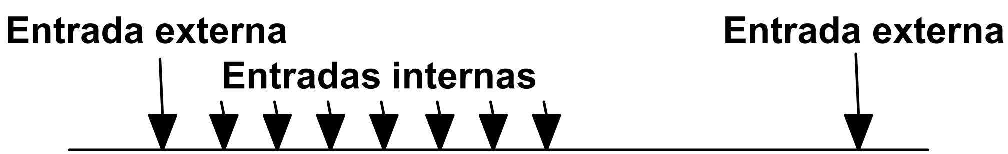
Llegadas externas

Llegadas internas desde otros nodos

  - **Se puede resolver el conjunto de ecuaciones para obtener un único λ_i**
  - **Tasa de servicio en el nodo i = μ_i**

Redes de Jackson (continuación)





- Los clientes son atendidos con rapidez $(\mu >> \lambda)$
- Los clientes salen con probabilidad (1-P)
  - Los clientes vuelven a la cola con probabilidad P
  - $\lambda = r + P\lambda \Rightarrow \lambda = r/(1-P)$
- Cuando P es grande, cada llegada externa va seguida de un aluvión de llegadas internas
  - Las llegadas a las colas no son llegadas de Poisson

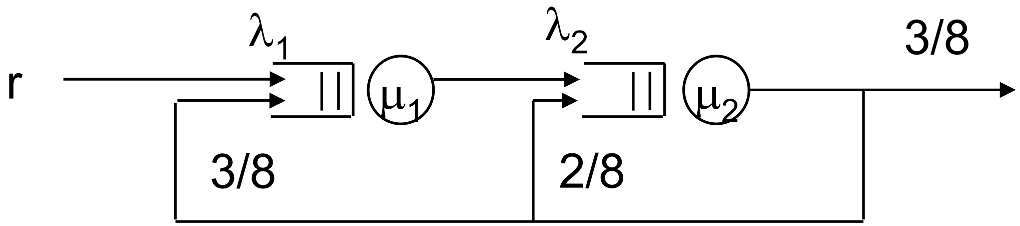
Teorema de Jackson

- **Definimos el estado del sistema como** $\vec{n} = (n_1, n_2 \ldots n_k)$
  donde n_i **es el número de clientes presentes en el nodo i**
- **Teorema de Jackson:**

$$P(\vec{n}) = \prod_{i=1}^{i=k} P_i(n_i) = \prod_{i=1}^{i=k} \rho_i^{n_i} (1-\rho_i), \qquad donde\ \rho_i = \frac{\lambda_i}{\mu_i}$$

- **Es decir, en estado estacionario, el estado del nodo i (n_i) es independiente de los estados de los nodos restantes (en un tiempo dado):**
  - **Colas M/M/1 independientes**
  - **Sorprendente resultado que indica que las llegadas a cada una de las colas no son ni llegadas de Poisson ni independientes**
  - **Similar a la suposición de independencia de Kleinrock**
  - **Reversibilidad:**
    - **Las salidas exógenas son independientes y de Poisson**
    - **El estado de todo el sistema es independiente de las salidas exógenas anteriores**

Ejemplo



$\lambda_1 = ?$
$\lambda_2 = ?$

$P(n_1,n_2) = ?$