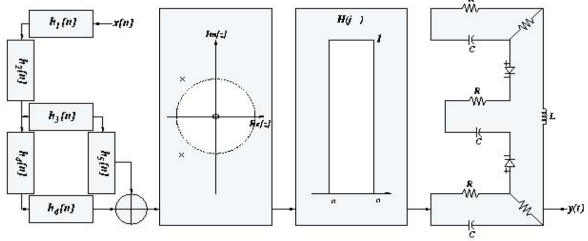


Señales y sistemas

Otoño 2003

Clase 7

25 de septiembre de 2003

1. Series de Fourier y sistemas LTI.
2. Respuesta de frecuencia y filtrado.
3. Ejemplos y demostraciones.

La propiedad de función propia de exponenciales complejos

TC: $$e^{st} \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow H(s)e^{st}$$

TC
"Función del sistema"

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-st} dt$$

TD: $$z^{n} \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow H(z)z^{n}$$

TD
"Función del sistema"

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] z^{-n}$$

Series de Fourier: señales periódicas y sistemas LTI

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H(jk\omega_0) a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$a_k \longrightarrow \underbrace{H(jk\omega_0)}_{\text{“gain” ("ganancia")}} a_k$$

[Por tanto (...) o las potencias de las señales se modifican a través del filtro/sistema]

So $|a_k| \longrightarrow |H(jk\omega_0)||a_k|$ or powers of signals get modified through filter/system

$$H(jk\omega_0) = |H(jk\omega_0)| e^{j\angle H(jk\omega_0)}$$

includes both amplitude & phase
(incluye la amplitud y la fase)

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\omega_0 n} \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n] = \sum_{k=<N>} H(e^{jk\omega_0}) a_k e^{jk\omega_0 n}$$

$$a_k \longrightarrow \underbrace{H(e^{jk\omega_0})}_{\text{“gain” ("ganancia")}} a_k$$

$$H(e^{jk\omega_0}) = |H(e^{jk\omega_0})| e^{j\angle H(e^{jk\omega_0})}$$

includes both amplitude & phase
(incluye la amplitud y la fase)

La respuesta de frecuencia de un sistema LTI

$$e^{j\omega t} \longrightarrow \boxed{H(j\omega)} \longrightarrow H(j\omega)e^{j\omega t}$$

$$(s = j\omega)$$

CT Frequency response:
(Respuesta de frecuencia de tiempo continuo)

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$e^{j\omega n} \longrightarrow \boxed{H(e^{j\omega})} \longrightarrow H(e^{j\omega})e^{j\omega n}$$

$$(z = e^{j\omega})$$

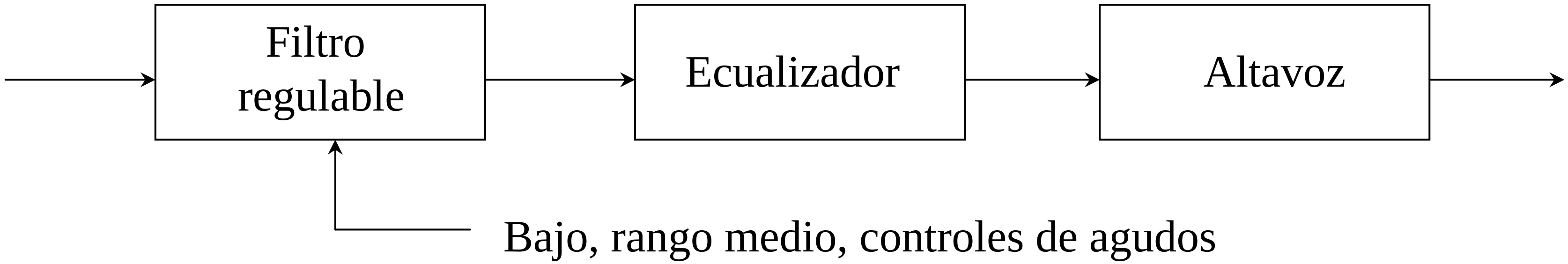
DT Frequency response:
(Respuesta de frecuencia de tiempo discreto)

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n}$$

Modelado y filtrado de la frecuencia

- Seleccionando $H(j\omega)$ (o $H(e^{j\omega})$) como función de ω, podemos *modelar* la composición de la frecuencia de la salida:
  - Amplificación preferencial.
  - Filtrado selectivo de algunas frecuencias.

Ejemplo 1: sistema de audio

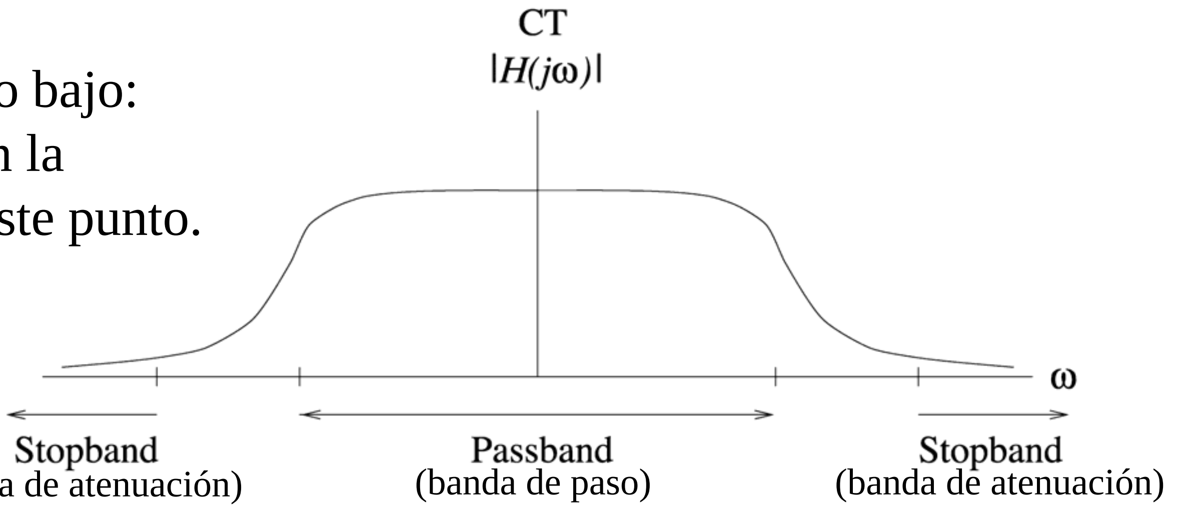


En las señales de audio, la amplitud tiene mayor importancia que la fase.

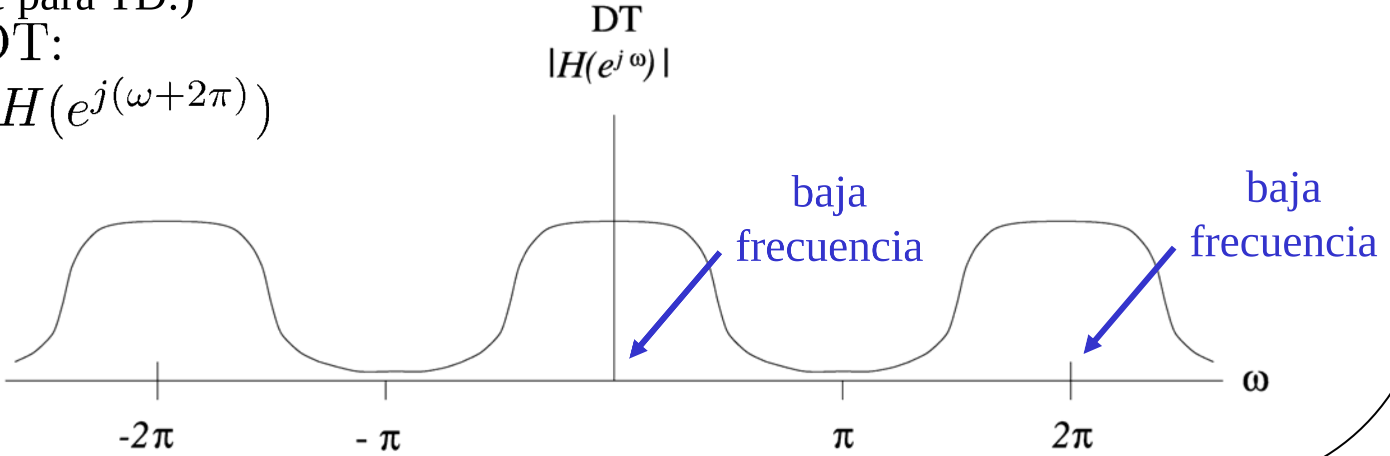
Ejemplo 2: filtros selectivos de frecuencia

— Filtrar las señales fuera del alcance de frecuencia que nos interesa

Filtros de paso bajo:
Sólo muestran la
amplitud en este punto.

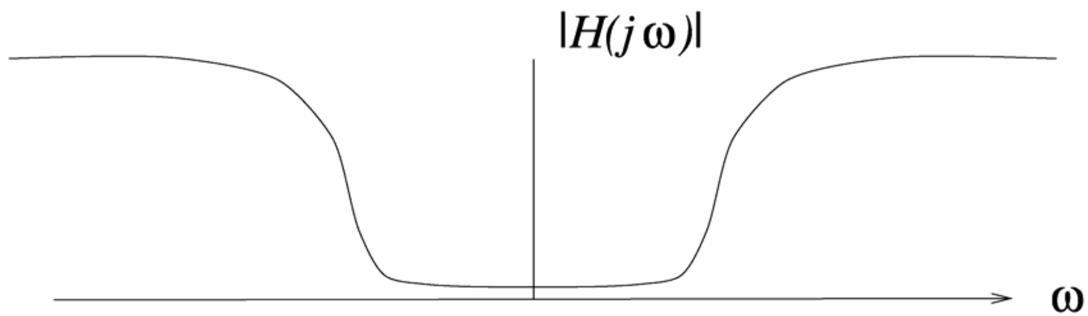


(Observe que para TD:)
Note for DT:
$H(e^{j\omega}) = H(e^{j(\omega+2\pi)})$



Filtros de paso alto

CT (TC)

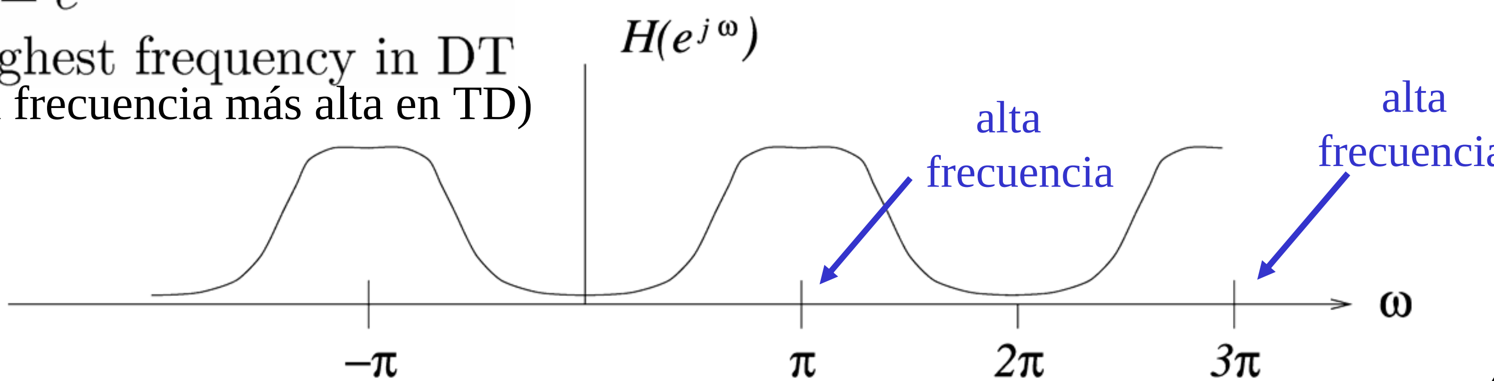


Recuerde:

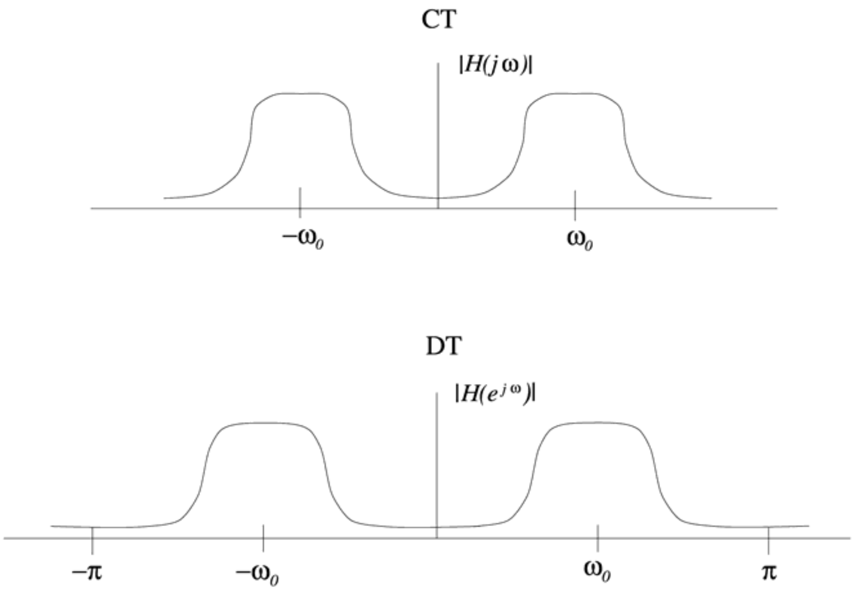
$(-1)^n = e^{j\pi n}$

π = highest frequency in DT
(la frecuencia más alta en TD)

DT (TD)



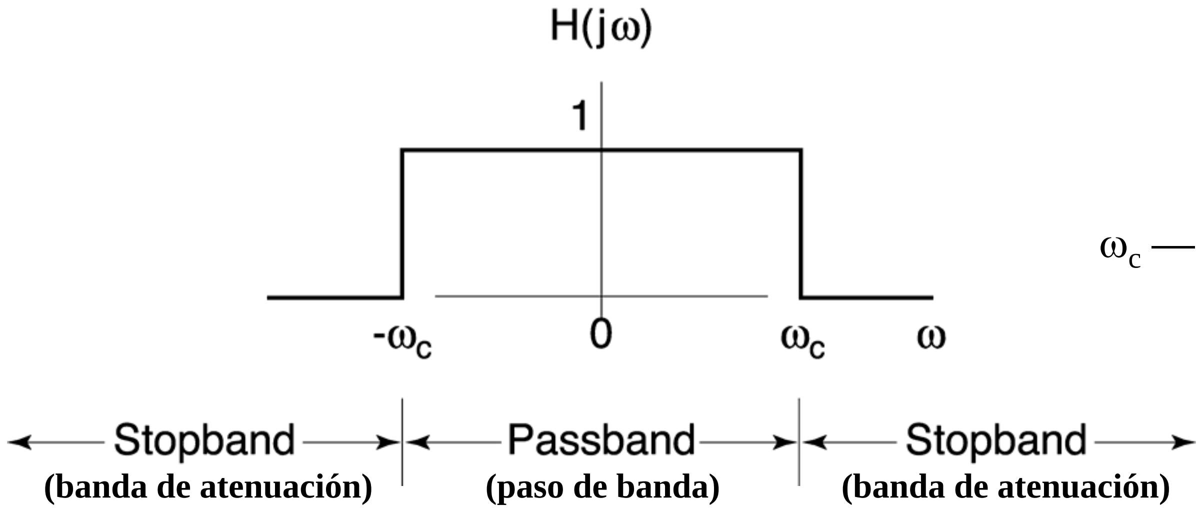
Filtros de paso de banda



Demo: efectos de filtrado en señales de audio.

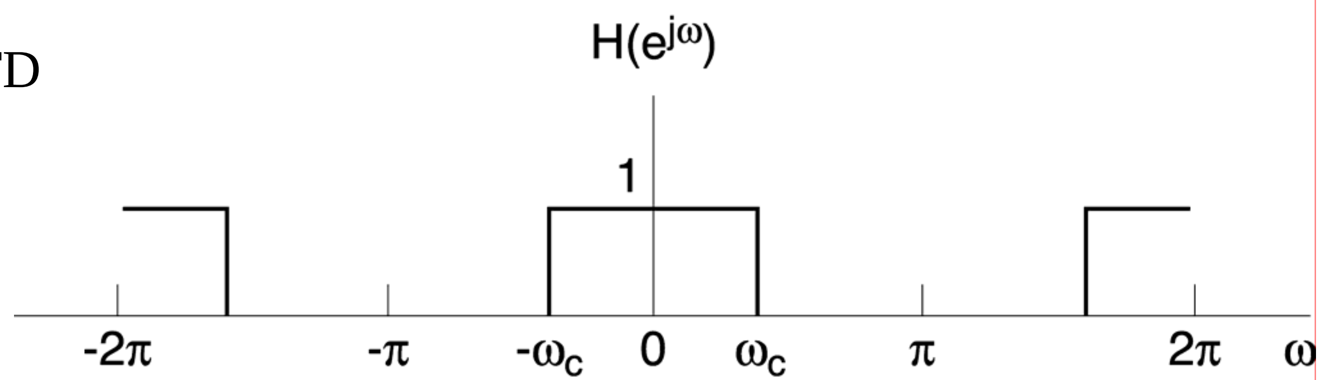
Filtros ideal*izados*

TC



ω_c — Frecuencia de corte

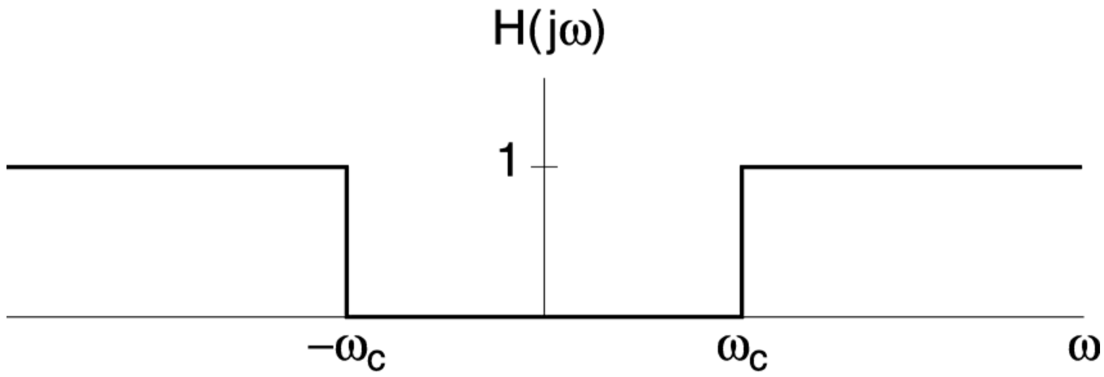
TD



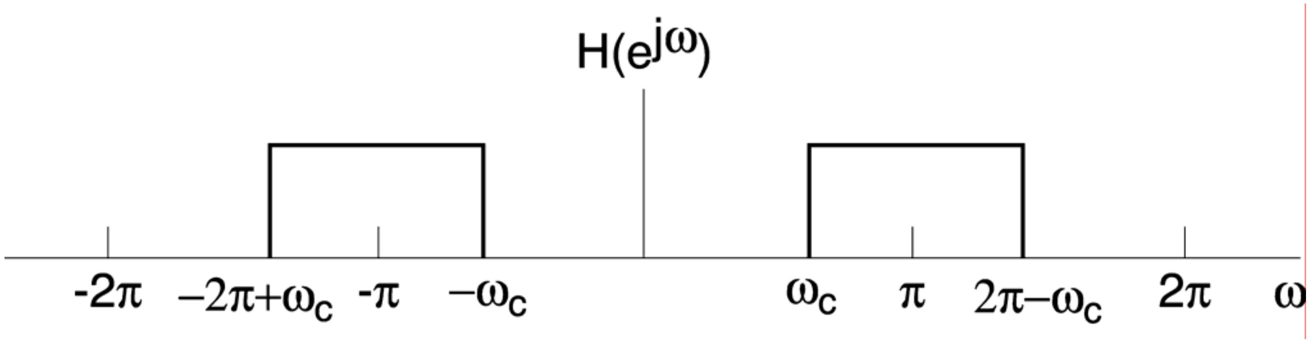
Nota: $|H| = 1$ y $\angle H = 0$ para los filtros ideales en los pasos de banda, no es necesario el diagrama de fase.

Paso alto

TC

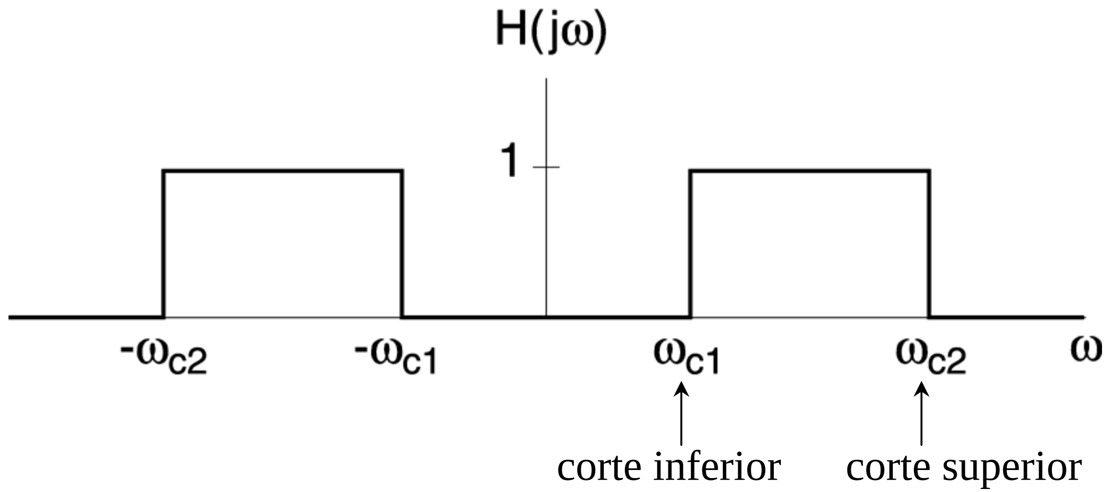


TD

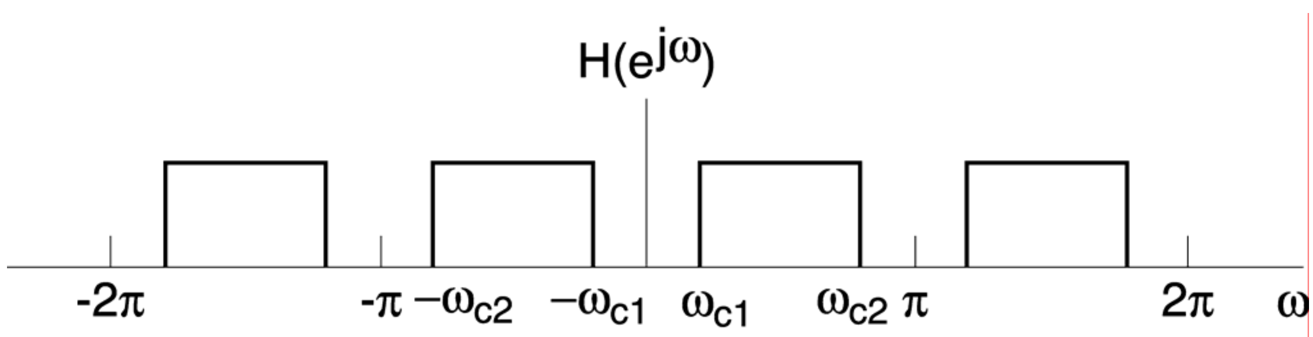


Paso de banda

TC



TD

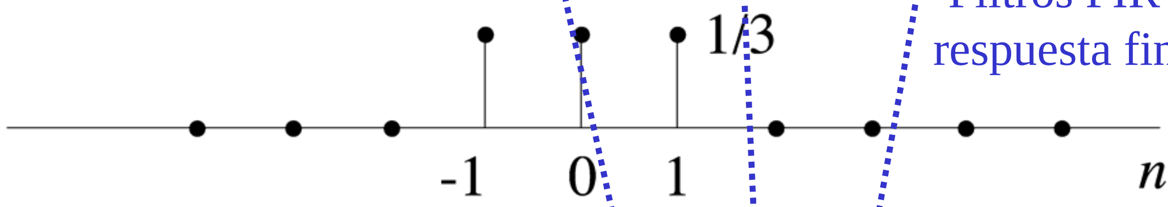


Ejemplo 3: promediador / pulidor en tiempo discreto

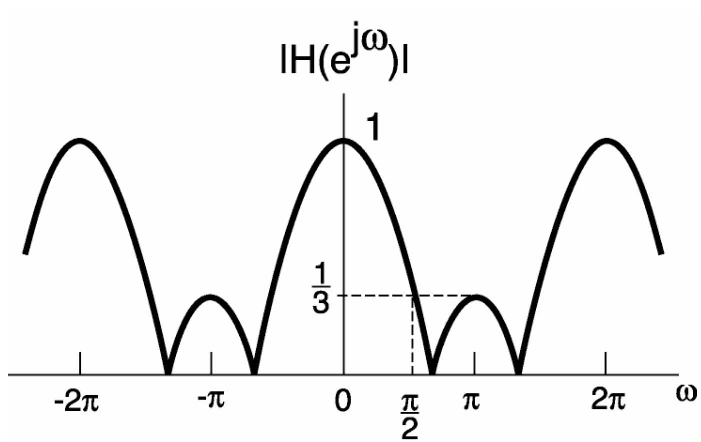
$$y[n] = \frac{1}{3}\{x[n-1] + x[n] + x[n+1]\}$$

$$h[n] = \frac{1}{3}\{\delta[n-1] + \delta[n] + \delta[n+1]\}$$

Filtros FIR (Filtro de respuesta finita a impulso)



$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n} = \frac{1}{3}\left[e^{-j\omega} + 1 + e^{j\omega}\right] = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cos\omega$$

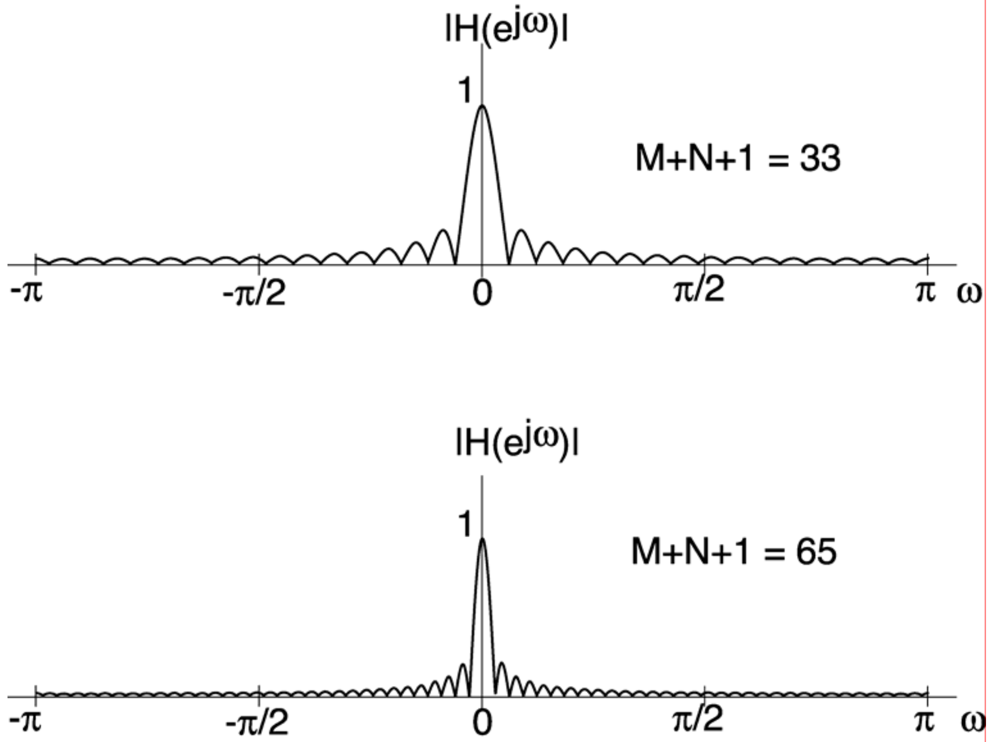


LPF (Filtro de paso bajo)

Ejemplo 4: Filtros FIR no recursivos en tiempo discreto

$$y[n] = \frac{1}{N+M+1}\sum_{k=-N}^{M} x[n-k] \longrightarrow h[n] = \frac{1}{N+M+1}\sum_{k=-N}^{M} \delta[n-k]$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{N+M+1}\sum_{k=-N}^{M} e^{-jk\omega} = \frac{1}{N+M+1} e^{j\omega[(N-M)/2]} \frac{\sin[\omega(M+N+1)/2]}{\sin(\omega/2)}$$



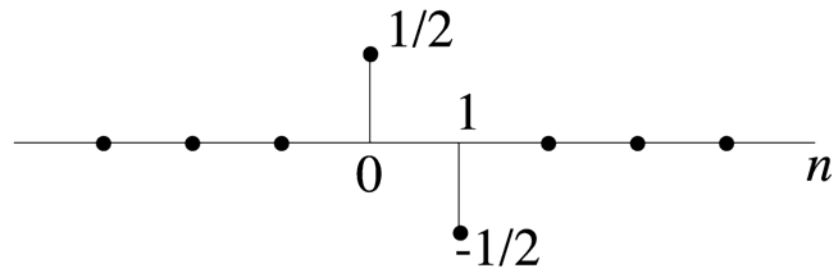
Cae a un ω inferior cuando aumenta M+N+1

Ejemplo 5: detector de "bordes" sencillo en tiempo discreto

— "diferenciador" de 2 puntos en tiempo discreto

$$y[n] = \frac{1}{2}\{x[n] - x[n-1]\}$$

$$h[n] = \frac{1}{2}\{\delta[n] - \delta[n-1]\}$$

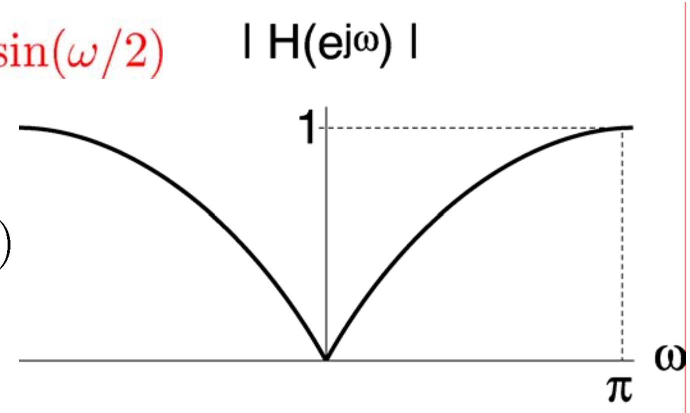


$$\frac{j}{2j}e^{-j\omega/2}(e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}) = je^{-j\omega/2}\sin(\omega/2)$$

$$\Downarrow$$

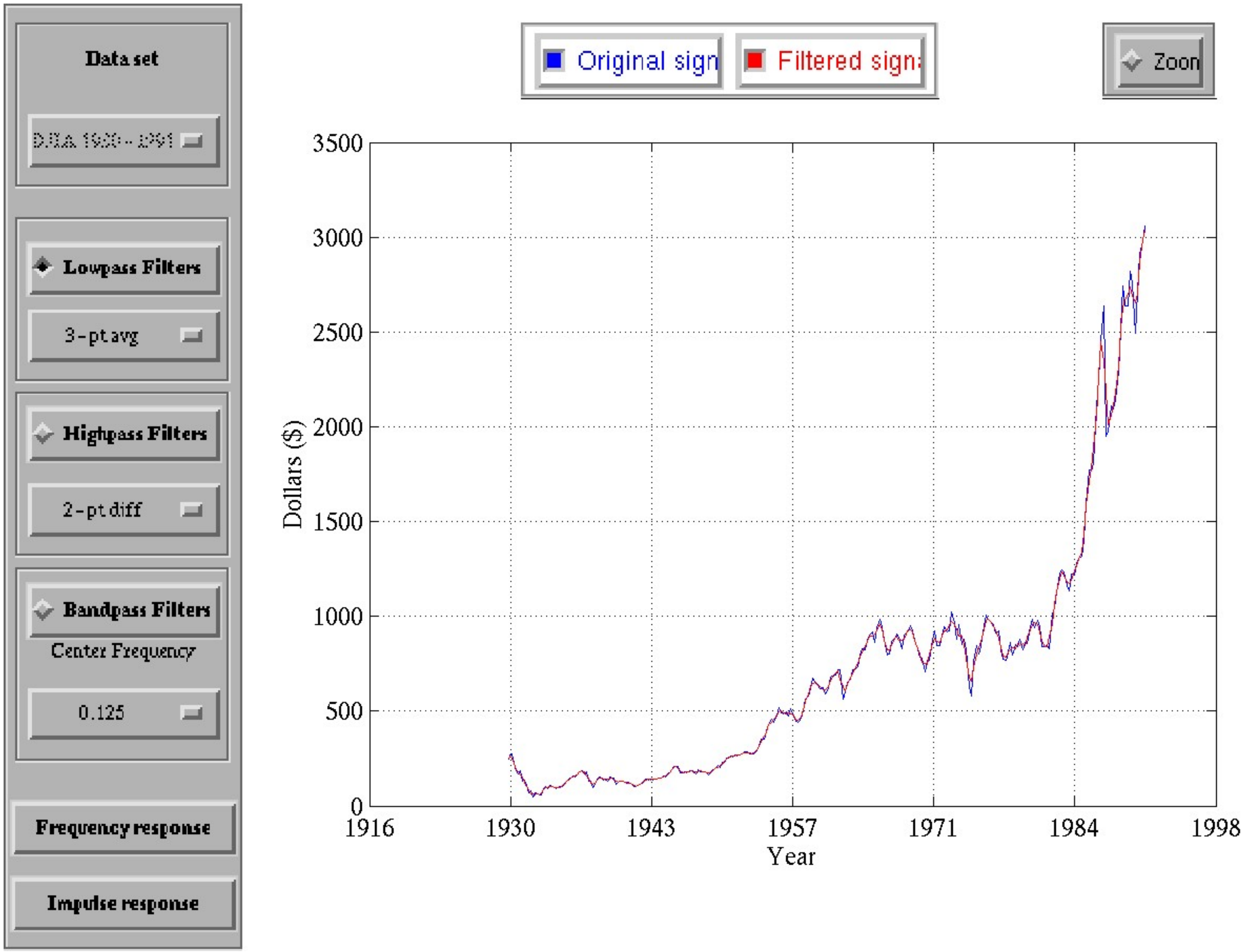
$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}(1 - e^{-j\omega}) = je^{-j\omega/2}\sin(\omega/2)$$

$$|H(e^{j\omega})| = |\sin(\omega/2)|$$



Pasos componentes de alta frecuencia

Demo: filtros de tiempo discreto, filtros LP, HP y BP aplicados al índice de valores industriales de DJ (Dow Jones)

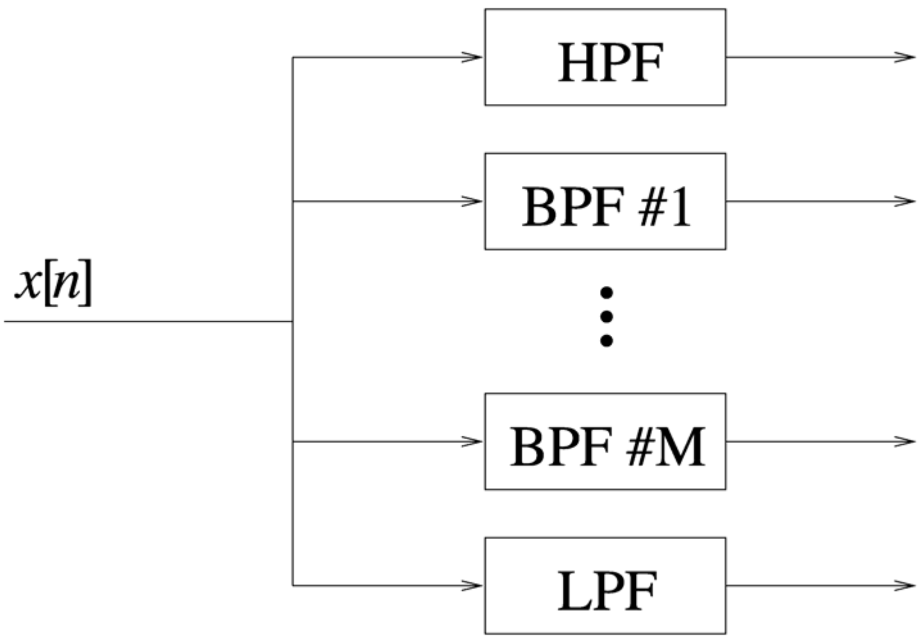


Ejemplo 6: aumento del borde mediante un diferenciador de tiempo discreto

Cortesía de Jason Oppenheim.
Con autorización.

Cortesía de Jason Oppenheim.
Con autorización.

Ejemplo 7: un banco de filtros



Demo: aplicar distintos filtros a señales de imágenes bidimensionales.

Cara de un mono.

Imagen retirada por consideraciones de copyright

HP

LP

LP

HP

BP

BP

Nota: para comprender realmente estos ejemplos, necesitamos entender los contenidos de frecuencia de señales aperiódicas $\Rightarrow$ Transformada de Fourier.