INSTITUO TECNOLÓGICO DE MASSACHUSETTS
Departmento de Ingeniería Eléctrica e Informática

6.003: Señales y sistemas |Otoño 2003

Soluciones del boletín de problemas 11

Problema 1 (O&W , 10.29 (d))
En este problema se nos pide que dibujemos la magnitud de la transformada de Fourier relacionada con el diagrama polo-cero, Figura P10.29 (d). Para ello, es necesario plantear unas suposiciones:

(a) La ROC incluye el círculo unitario para asegurar la existencia de la transformada de Fourier.

(b) El factor de ganancia es uno, de manera que el sistema en cuestión tiene la forma siguiente:

$$H(z) = \frac{1}{(z - z_1)(z + z_1)},$$

donde z_1 es un número real positivo cuya magnitud es inferior a 1.

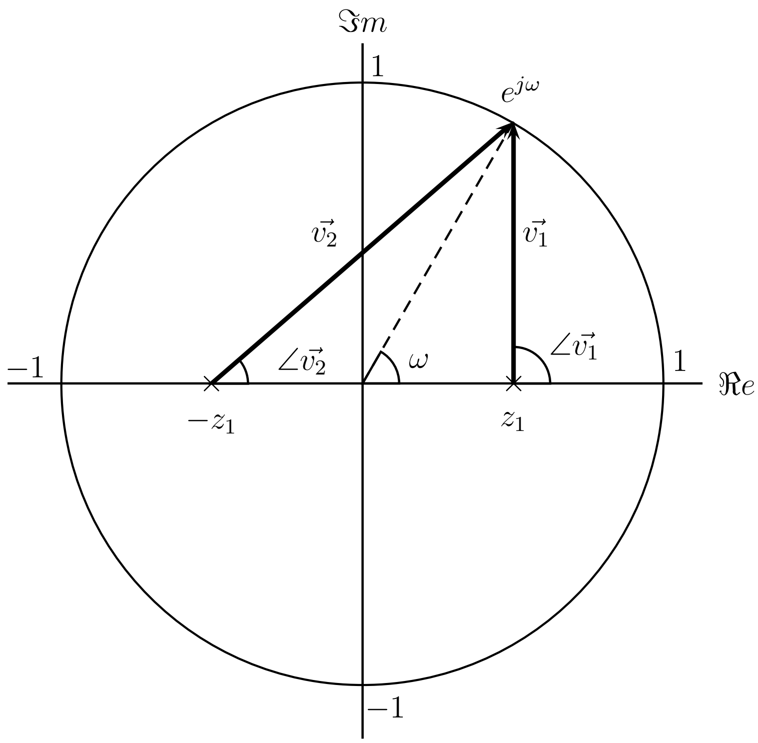
Para obtener la respuesta de frecuencia de un sistema DT, tenemos que evaluar la magnitud y la fase de $H(z)$ junto con el círculo unitario en el plano z, *es decir*, $z = e^{j\omega}$ para $0 \leq \omega < 2\pi$. En primer lugar, estudiamos el diagrama de magnitud. En general, para un valor fijo de ω podemos pensar en $|H(e^{j\omega})|$ como:

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{\Pi_{i=1}^{\text{núm. de ceros}}(\text{longitud de un vector que conecta el cero } i \text{ con } e^{j\omega})}{\Pi_{j=1}^{\text{núm. de polos}}(\text{longitud de un vector que conecta el polo } j \text{ con } e^{j\omega})}$$

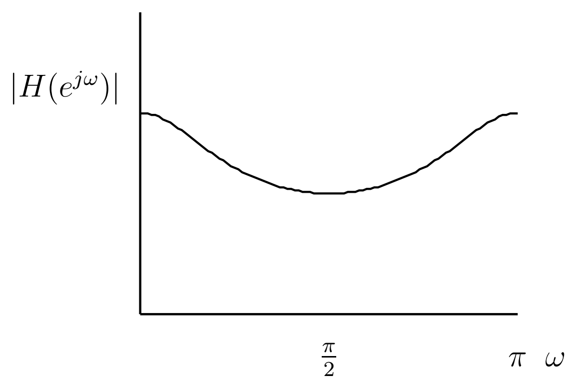
Si el número de ceros o polos es cero, definimos el producto anterior como 1. En nuestro caso, existen dos polos y ningún cero. De este modo, podemos simplificar la expresión anterior de la forma siguiente:

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{1}{|v_1||v_2|},$$

donde v_1 y v_2 son los vectores que se indican en la siguiente figura:



A partir del diagrama, observamos que cuando $\omega = \frac{\pi}{2}$, el producto de $|v_1|$ y $|v_2|$ se vuelve máximo. Por lo tanto, esperamos tener la magnitud mínima en la frecuencia. Además, cuando $\omega = 0$ o π, el el producto de las longitudes o los dos vectores se vuelve mínimo, de forma que la magnitud de $H(e^{j\omega})$ se vuelve máxima. El diagrama de magnitud de $H(e^{j\omega})$ para $0 \leq \omega < \pi$ es el siguiente:



Aunque no se le pide que dibuje la fase, le proporcionamos unas breves indicaciones de cómo hacerlo.

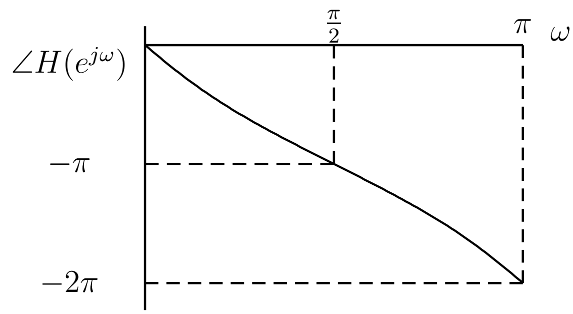
La fase $\angle H(e^{j\omega})$ se puede describir de la forma siguiente:

$$\angle H(e^{j\omega}) = \sum_{i=1}^{\text{núm. de ceros}} (\text{ángulo de vector que conecta el cero } i \text{ con } e^{j\omega})$$
$$- \sum_{j=1}^{\text{núm. de polos}} (\text{ángulo del vector que conecta el polo } j \text{ con } e^{j\omega}).$$

De nuevo, en nuestro caso específico, si utilizamos los vectores v_1 y v_2 definidos anteriormente, tenemos:

$$\angle H(e^{j\omega}) = -(\angle v_1 + \angle v_2),$$

La fase comienza en 0 cuando $\omega = 0$ y disminuye a $-\pi$ cuando $\omega = \frac{\pi}{2}$. Debido a los polos simétricos, la fase sigue decreciendo hasta -2π en $\omega = \pi$. A continuación, indicamos el diagrama de la fase:



Problema 2 (O&W , 10.34)

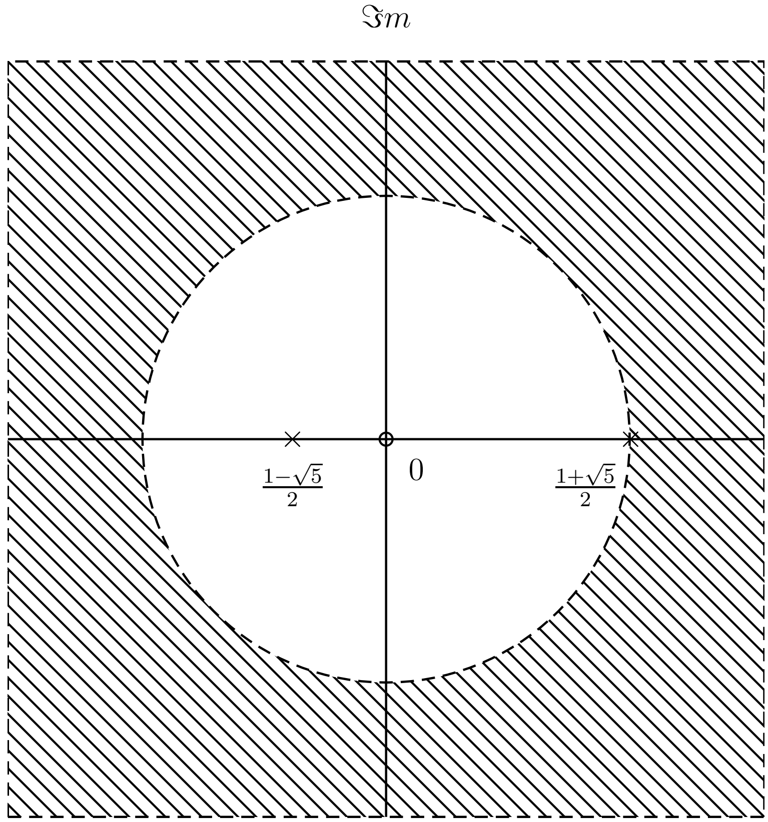
(a)

$$y[n] = y[n-1] + y[n-2] + x[n-1]$$

Si tomamos la transformada z de esta ecuación:

$$\begin{aligned} Y(z) &= z^{-1}Y(z) + z^{-2}Y(z) + z^{-1}X(z) \\ H(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1} - z^{-2}} = \frac{z}{z^2 - z - 1} \\ &= \frac{z}{\left(z - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(z - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)} \end{aligned}$$

$H(z)$ tiene un cero en $z = 0$ y polos en $z_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $z_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
Puesto que el sistema es causal, la ROC de $H(z)$ se ubicará fuera del círculo que contiene su polo más exterior: $|z| > |z_1|$. A continuación, se indican el mapa pz y la ROC:



(b)

$$
\begin{aligned}
H(z) &= \frac{-z^{-1}}{\left(z^{-1}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(z^{-1}+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)} \\
&= \frac{A}{z^{-1}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}} + \frac{B}{z^{-1}+\frac{1-\sqrt{5}}{2}} \\
A &= \left(z^{-1}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) H(z)\Big|_{z^{-1}=-\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = -\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\
B &= \left(z^{-1}+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) H(z)\Big|_{z^{-1}=-\frac{1-\sqrt{5}}{2}} = \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\
H(z) &= \frac{-\frac{1}{\sqrt{5}}}{1+\frac{2}{1+\sqrt{5}}z^{-1}} + \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{1+\frac{2}{1-\sqrt{5}}z^{-1}}, \qquad |z| > \frac{1+\sqrt{5}}{2}
\end{aligned}
$$

Si tomamos la transformada z inversa:

$$h[n] = -\frac{1}{\sqrt{5}}\left(-\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right)^n u[n] + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(-\frac{2}{1-\sqrt{5}}\right)^n u[n]$$

(c) El sistema es inestable, ya que su ROC no contiene el círculo unitario. La inestabilidad es además aparente en $h[n]$, ya que el término $\left(-\frac{2}{1-\sqrt{5}}\right)^n$ crecerá indefinidamente como $n \to \infty$.

Para que el sistema sea estable, la ROC debe contener el círculo unitario. Para la estabilidad, la ROC debería ser: $\frac{2}{-1-\sqrt{5}} < |z| < \frac{2}{-1+\sqrt{5}}$.

La transformada z inversa de $H(z)$ con esta ROC es:

$$h[n] = -\frac{1}{\sqrt{5}}\left(-\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right)^n u[n] - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(-\frac{2}{1-\sqrt{5}}\right)^n u[-n-1]$$

Problema 3 (O&W , 10.42)

Puesto que estamos tratando un sistema con condiciones iniciales, es posible que queramos utilizar la transformada unilateral z. A partir de las propiedades de la transformada unilateral z, obtenemos siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} y[n] &\longleftrightarrow Y(z) \\ y[n-1] &\longleftrightarrow z^{-1}Y(z) + y[-1] \end{aligned}$$

En cada apartado de este problema, el primer paso es tomar la transformada unilateral z de ambos lados de la ecuación de diferencias. Para hallar la respuesta de entrada cero (ZIR), establezca la entrada en 0 y resuelva para $Y(z)$. Para hallar la respuesta de estado cero (ZSR), establezca las condiciones iniciales en cero y resuelva para $Y(z)$.

(a)

$$y[n] + 3y[n-1] = x[n], \qquad y[-1] = 1, \qquad x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

Si tomamos la transformada unilateral z de ambos lados de la ecuación de diferencias, tenemos:

$$Y(z) + 3z^{-1}Y(z) + 3y[-1] \;=\; X(z).$$

Si resolvemos para $Y(z)$, obtenemos,

$$Y(z) \;=\; \underbrace{\frac{X(z)}{1+3z^{-1}}}_{ZSR} + \underbrace{\frac{-3y[-1]}{1+3z^{-1}}}_{ZIR}.$$

Para hallar ZIR, fije $X(z) = 0$ y utilice el hecho de que $y[-1] = 1$,

$$\begin{aligned} Y_{ZIR}(z) &= \frac{-3}{1+3z^{-1}} \\ y_{ZIR}[n] &= -3(-3)^n u[n] \;=\; (-3)^{n+1} u[n]. \end{aligned}$$

Para hallar ZSR, fije $y[-1] = 0$ y utilice $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ como se indica en el problema,

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \\ Y_{ZSR}(z) &= \frac{1}{(1+3z^{-1})\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)} \;=\; \frac{\frac{6}{7}}{1+3z^{-1}} + \frac{\frac{1}{7}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \\ y_{ZSR}[n] &= \frac{6}{7}(-3)^n u[n] + \frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]. \end{aligned}$$

(b)

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] \;=\; x[n] - \frac{1}{2}x[n-1], \qquad y[-1] = 0, \qquad x[n] = u[n]$$

Si tomamos la transformada unilateral *z* de ambos lados de la ecuación de diferencias, tenemos:

$$Y(z) - \frac{1}{2}z^{-1}Y(z) - \frac{1}{2}y[-1] \;=\; X(z) - \frac{1}{2}z^{-1}X(z) - \frac{1}{2}x[-1].$$

Si resolvemos para $Y(z)$ obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{(1-\frac{1}{2}z^{-1})X(z)}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{-\frac{1}{2}x[-1] + \frac{1}{2}y[-1]}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \\ &= \underbrace{X(z)}_{ZSR} + \underbrace{\frac{-\frac{1}{2}x[-1] + \frac{1}{2}y[-1]}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}}_{ZIR}. \end{aligned}$$

Para hallar ZIR, fije $X(z) = 0$ (observe que esto significa que $x[-1] = 0$), y utilice el hecho de que $y[-1] = 0$,

$$Y_{ZIR}(z) \;=\; 0 \;\Longrightarrow\; y_{ZIR}[n] \;=\; 0.$$

Para hallar ZSR, fije $y[-1] = 0$ y utilice $x[n] = u[n]$ como se indica en el problema,

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{1}{1-z^{-1}} \\ Y_{ZSR}(z) &= \frac{1}{1-z^{-1}} \\ y_{ZSR}[n] &= u[n]. \end{aligned}$$

(c)

$$y[n]-\frac{1}{2}y[n-1]=x[n]-\frac{1}{2}x[n-1],\qquad y[-1]=1,\qquad x[n]=u[n]$$

Puesto que esta es la misma ecuación de diferencias del apartado (b), podemos utilizar la ecuación para $Y(z)$ derivada anteriormente. Para hallar ZIR, fije $X(z)=0$ (observe que esto significa que $x[-1]=0$), y utilice el hecho de que $y[-1]=1$,

$$\begin{aligned} Y_{ZIR}(z) &= \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \\ y_{ZIR}[n] &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \;=\; \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} u[n]. \end{aligned}$$

Para hallar ZSR, fije $y[-1]=0$ y utilice $x[n]=u[n]$ como se indica en el problema. Esto es exactamente lo que hicimos en el apartado (b) anterior, por lo que:

$$y_{ZSR}[n] \;=\; u[n].$$

Problema 4 (O&W 10.47)

(a) Recuerde que los exponenciales complejos son las funciones propias de los sistemas LTI. Por tanto, la respuesta de estos sistemas a exponenciales complejos tiene la forma siguiente:

$$z^n \longrightarrow H(z)z^n.$$

Dado que la salida de un sistema a una entrada $x[n]=(-2)^n$ es 0, concluimos que la ROC de $H(z)$ contiene $z=-2$, y $H(z)$ tiene un cero en $z=-2$.

La segunda relación entrada-salida nos proporciona:

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{Y(x)}{X(z)} = \frac{1+\frac{a}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}}{\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}}, \qquad |z|>\frac{1}{2} \\ &= \frac{(1+a-\frac{1}{4}z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} \\ &= (1+a)\frac{(z-\frac{1}{4(1+a)})(z-\frac{1}{2})}{z(z-\frac{1}{4})}, \end{aligned}$$

suponiendo que $1+a\neq 0$. $H(z)$ tenga dos polos; en $z=0$ y $z=\frac{1}{4}$. Para poder incluir $z=-2$ en su ROC, sabemos que el sistema es causal y que su ROC se encuentra fuera del círculo de radio $\frac{1}{4}$. Puesto que $H(z)$ tiene un cero en $z=-2$,

$$1+a-\frac{1}{4}z^{-1}|_{z=-2}=0 \Rightarrow a=-\frac{9}{8}.$$

(b) Ahora ya conocemos la expresión para $H(z)$:

$$H(z) = \frac{(-\frac{1}{8} - \frac{1}{4}z^{-1})(1 - \frac{1}{2}z^{-1})}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}.$$

En este caso, la entrada es un exponencial complejo $x[n]{=}1^n$.
Por lo tanto, la salida tendrá la forma siguiente:

$$\begin{aligned} y[n] &= H(1) \cdot 1^n = \frac{\left(-\frac{3}{8}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{3}{4}} \\ &= -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Problema 5 (O&W 10.50)

(a) A partir del modelo polo-cero, la función del sistema toma la forma siguiente:

$$H(z) = \frac{z - \frac{1}{a}}{z - a}.$$

Mostrar que $|H(e^{j\omega})|$ es constante es el equivalente a mostrar que $|H(e^{j\omega})|^2$ es constante.

$$\begin{aligned} |H(e^{j\omega})|^2 &= H(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega}) = \frac{e^{j\omega} - \frac{1}{a}}{e^{j\omega} - a} \cdot \frac{e^{-j\omega} - \frac{1}{a}}{e^{-j\omega} - a} \\ &= \frac{1 - \frac{2}{a}\cos(\omega) + \frac{1}{a^2}}{1 - 2a\cos(\omega) + a^2} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{a^2 - 2a\cos(\omega) + 1}{1 - 2a\cos(\omega) + a^2} \\ &= \frac{1}{a^2}. \end{aligned}$$

Así, $|H(e^{j\omega})| = \frac{1}{|a|}$ que es constante y está totalmente determinado por la ubicación del polo y el cero.

(b) Si utilizamos la ley de los cosenos,

$$\begin{aligned} |v_1|^2 &= |1|^2 + |a|^2 - 2|1||a|\cos(\omega) \\ &= 1 + a^2 - 2a\cos(\omega). \end{aligned}$$

(c) Siguiendo el mismo procedimiento que en el apartado (b),

$$\begin{aligned} |v_2|^2 &= |1|^2 + \left|\frac{1}{a}\right|^2 - 2|1|\left|\frac{1}{a}\right|\cos(\omega) \\ &= \frac{1}{a^2}\left[a^2 + 1 - 2a\cos(\omega)\right] = \frac{1}{a^2}|v_1|^2. \\ \therefore |v_2| &= \left|\frac{v_1}{a}\right|. \end{aligned}$$

Esto demuestra claramente que la longitud de v_2 es proporcional en longitud a v_1 independientemente de ω.

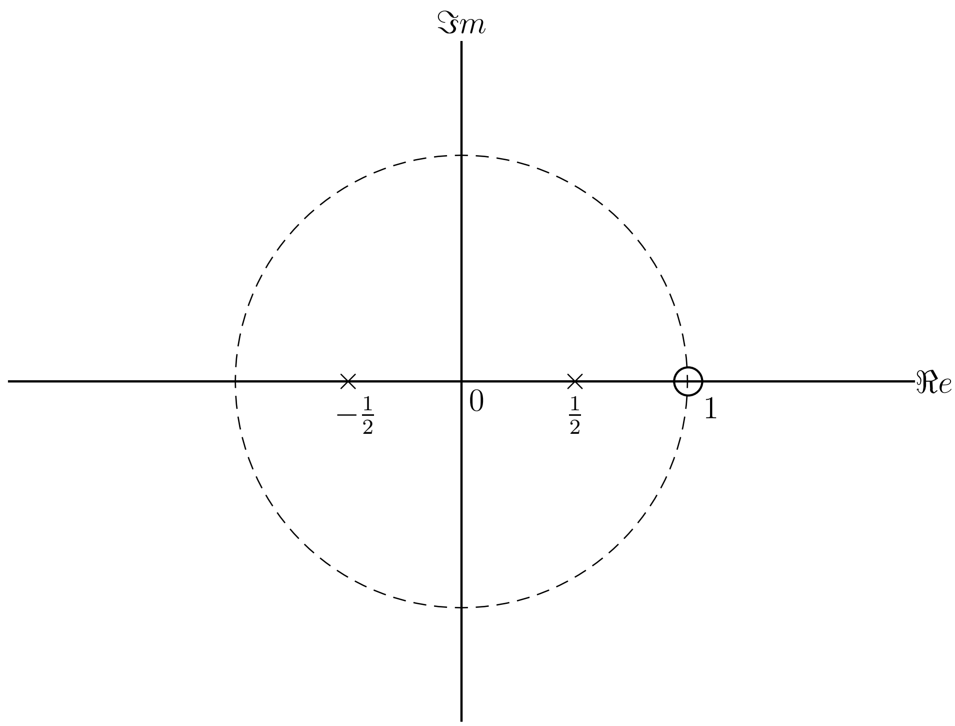
Problema 6 (O&W 11.25 (a))
El sistema dado es:

$$G(z)H(z) = \frac{z-1}{z^2 - \frac{1}{4}}.$$

En primer lugar, nos gustaría hallar los polos y los ceros del sistema. Así, se observa fácilmente que $G(z)H(z)$ puede expresarse de la forma:

$$G(z)H(z) = \frac{z-1}{\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)}. \quad (1)$$

El sistema tiene polos en $\pm\frac{1}{2}$ y un cero en 1. A continuación, se muestra el mapa polo-cero. Observe que el círculo de líneas discontinuas en todas las figuras de este problema indica un círculo unitario.



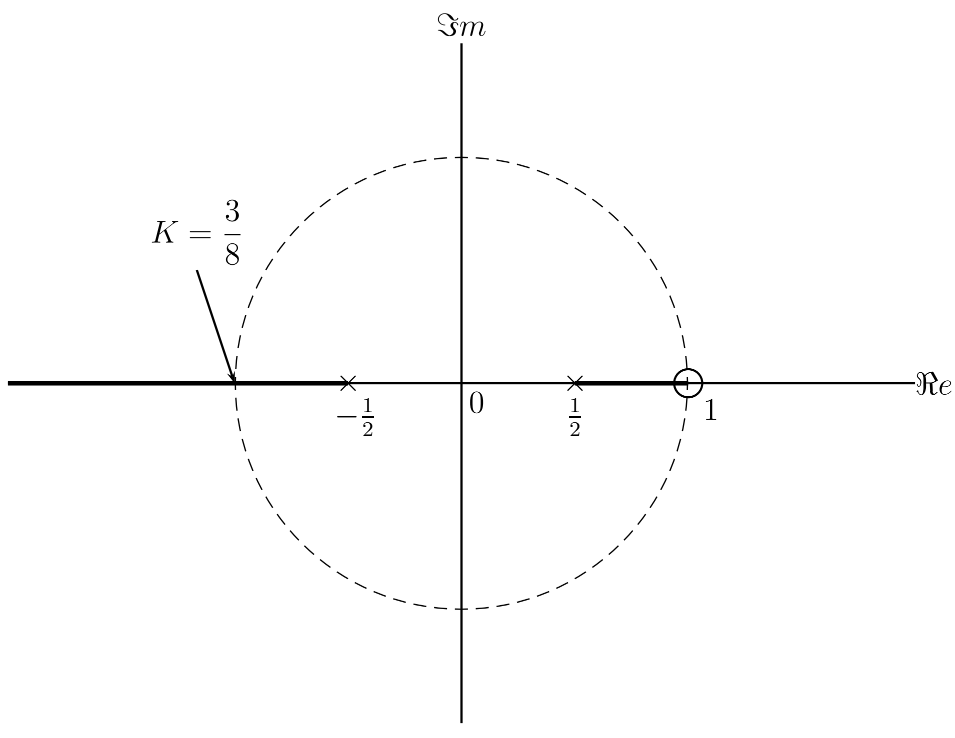
Recuerde que la derivación del criterio del ángulo no afecta si es un sistema CT o DT. De este modo, si evocamos el criterio del ángulo tenemos:

$$\begin{aligned}
\angle G(z)H(z) &= \text{entero impar múltiple de } \pi \text{ si } K > 0, \\
\angle G(z)H(z) &= \text{entero par múltiple de } \pi \text{ si } K < 0.
\end{aligned}$$

para todo z que se encuentre en el lugar geométrico.

Examinemos el caso en el que $K > 0$. Si utilizamos el criterio del ángulo, podemos identificar que los dos segmentos de línea real pertenecen al lugar geométrico. Uno es $(-\infty, -\frac{1}{2})$ y el otro $(\frac{1}{2}, 1)$. En este caso, estos dos segmentos especifican totalmente el lugar geométrico. A partir de esto, observamos que un polo en $\frac{1}{2}$ se acercará al cero en 1 ya que $K \to \infty$. El otro polo, uno en $-\frac{1}{2}$ se desplazará a $-\infty$. De este modo, dado que $K \to \infty$, uno de los polos será inestable. (Observe que en los sistemas de retroalimentación, sólo consideramos sistemas causales). Por lo tanto, nos gustaría saber hasta qué valor de *K* permanece estable el sistema, es decir, deseamos hallar el valor de K para el cual el sistema de bucle cerrado tiene un polo en -1. A partir de la ecuación (1), tenemos que:

$$\begin{aligned} G(z)H(z)\big|_{z=-1} &= -\frac{1}{K} \\ \left.\frac{z-1}{\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)}\right|_{z=-1} &= -\frac{1}{K} \\ \frac{-1-1}{\left(-1+\frac{1}{2}\right)\left(-1-\frac{1}{2}\right)} &= -\frac{1}{K} \\ \therefore K &= \frac{3}{8}. \end{aligned}$$



De este modo, en el gráfico anterior mostramos el lugar geométrico de las raíces $K > 0$.

Examinemos ahora el caso en el que $K < 0$. Si sólo aplicamos el criterio del ángulo en el eje real, identificamos que existen de nuevo dos segmentos pertenecientes al lugar geométrico. Uno de ellos es $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ y el otro $(1, \infty)$. Como ya sabemos, todos los polos en $G(z)H(z)$ irán a los ceros en $G(z)H(z)$ ya que $|K| \to \infty$. Así, en algún punto en $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, el lugar gemétrico se bifurca del eje real y se dirige a un punto en $(1, \infty)$ para alcanzar el cero en 1 y en ∞. De este modo, primero nos gustaría conocer la ubicación de esos puntos de bifurcación. En los puntos de bifurcación, existen múltiples polos. En nuestro caso, habrá dos polos idénticos en estos puntos de bifurcación. Puesto que solamente existen dos polos para el sistema, deseamos hallar el valor de K tal que:

$$1 + KG(z)H(z) = 0 \tag{2}$$

tenga doble raíz.

$$\begin{aligned}
1 + K\frac{z-1}{z^2 - \frac{1}{4}} &= 0 \\
z^2 - \frac{1}{4} + K(z-1) &= 0 \\
\left(z + \frac{K}{2}\right)^2 - \left(\frac{K}{2}\right)^2 - K - \frac{1}{4} &= 0 \quad \text{completando el cuadrado.}
\end{aligned}$$

De modo que, para tener múltiples raíces de K es necesario cumplir lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{K}{2}\right)^2 + K + \frac{1}{4} &= 0 \\
\therefore K &= -2 \pm \sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Como era de esperar, ambos valores de K son negativos, y es en esos valores de K donde se da la bifurcación. Las ubicaciones correspondientes están en $z = -\frac{K}{2} = 1 \mp \frac{\sqrt{3}}{2}$.

¿Podemos hallar el valor de K hasta el cual el sistema de bucle cerrado permanece estable a medida que K cambia de 0 a $-\infty$? En este caso, no es tan fácil como en el de $K > 0$, ya que no conocemos el sitio en el que el lugar geométrico cruza el círculo unitario. Sin embargo, sí sabemos que en el círculo unitario $z = e^{j\omega_0}$ para algún ω_0. De este modo, a partir de la ecuación (2), tenemos que:

$$\begin{aligned}
G(z)H(z)|_{z=e^{j\omega_0}} &= -\frac{1}{K_0} \\
\frac{e^{j\omega_0} - 1}{e^{2j\omega_0} - \frac{1}{4}} &= -\frac{1}{K_0},
\end{aligned} \tag{3}$$

donde K_0 corresponde a ω_0.

Algo a tener en cuenta es que $G(z)H(z)$ es una función racional en z y que todos los coeficientes son reales. De este modo, el lugar geométrico es simétrico aproximadamente en el eje real; más concretamente los puntos en los que el lugar geométrico cruza el círculo unitario son puntos de conjugados complejos. De modo que, con el mismo K_0 que en la ecuación (3) se sostiene que:

$$\begin{aligned} G(z)H(z)|_{z=e^{-j\omega_0}} &= -\frac{1}{K_0} \\ \frac{e^{-j\omega_0}-1}{e^{-2j\omega_0}-\frac{1}{4}} &= -\frac{1}{K_0}, \end{aligned} \tag{4}$$

y combinando las ecuaciones (3) y (4), se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{e^{-j\omega_0}-1}{e^{-2j\omega_0}-\frac{1}{4}} &= \frac{e^{j\omega_0}-1}{e^{2j\omega_0}-\frac{1}{4}} \\ (e^{-j\omega_0}-1)\left(e^{2j\omega}-\frac{1}{4}\right) &= (e^{j\omega_0}-1)\left(e^{-2j\omega_0}-\frac{1}{4}\right) \\ e^{j\omega_0}-e^{2j\omega_0}-\frac{1}{4}e^{-j\omega_0}+\frac{1}{4} &= e^{-j\omega_0}-e^{-2j\omega_0}-\frac{1}{4}e^{j\omega_0}+\frac{1}{4} \\ \frac{5}{4}(e^{j\omega_0}-e^{-j\omega_0}) &= (e^{2j\omega_0}-e^{-2j\omega_0}) \\ \frac{\sin\omega_0}{\sin 2\omega_0}=\frac{\sin\omega_0}{2\sin\omega_0\cos\omega_0} &= \frac{4}{5} \\ \therefore \cos\omega_0 &= \frac{5}{8}. \end{aligned}$$

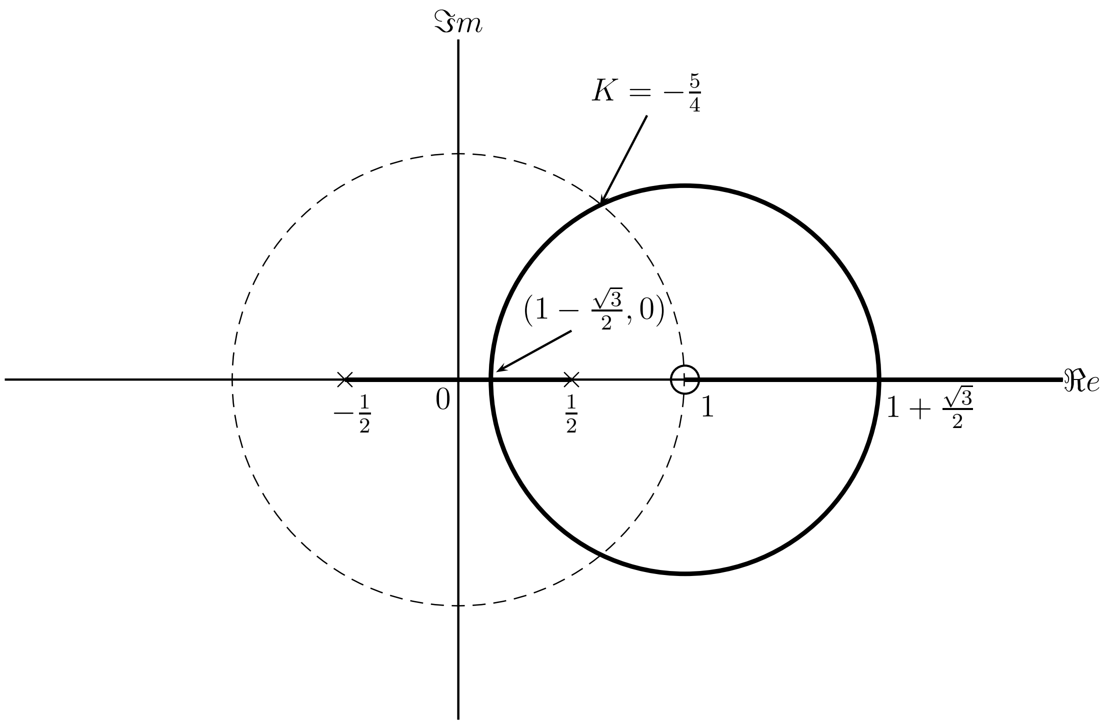
Este resultado, junto con la ecuación (3) produce:

$$K_0 = -\frac{5}{4}.$$

Por último, deseamos determinar la expresión del lugar geométrico entre los puntos de bifurcación. Sea $z=\sigma+j\omega$. Halle la relación entre σ y ω. A partir de la ecuación (2):

$$\begin{aligned} 1+K\frac{z-1}{z^2-\frac{1}{4}} &= 0 \\ z^2-\frac{1}{4}+K(z-1) &= 0 \\ (\sigma+j\omega)^2+K(\sigma+j\omega)-\frac{1}{4}-K &= 0 \\ \text{Para la parte real:}\quad \sigma^2-\omega^2+K\sigma-\frac{1}{4}-K &= 0 \\ \text{Para la parte imaginaria:}\quad 2\sigma\omega+K\omega &= 0 \rightarrow K=-2\sigma \\ \sigma^2-\omega^2-2\sigma^2-\frac{1}{4}+2\sigma &= 0 \\ \therefore (\sigma-1)^2+\omega^2 &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

El lugar geométrico traza un círculo, con centro en $(\sigma, \omega) = (1, 0)$ en el plano geométrico y con radio $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
De este modo, el lugar geométrico de las raíces completo para el caso de $K < 0$ es el siguiente:



Problema 7 (O&W 11.59)

(a) Utilice la ecuación de Black para calcular la función de transferencia desde $x[n]$ hasta $e[n]$ para el sistema:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{H(z)}{1 + H(z)} = \frac{1}{(z-1)(z+\frac{1}{2}) + 1} = \frac{1}{z^2 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}}$$

$$\frac{E(z)}{X(z)} = 1 - \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^2 - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}}{z^2 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}}$$

La función de transferencia tiene dos polos en $z = \frac{1}{4} \pm j\sqrt{\frac{7}{16}}$. Observe que la magnitud de cada polo es $1/\sqrt{2} \approx 0.707$, por lo que el sistema es estable.

Dado que es un sistema LTI estable, tiene una respuesta de frecuencia, y podemos utilizar un truco conocido. Para hallar la respuesta de régimen permanente a una entrada en escalón, evalúe la respuesta de frecuencia en $\omega = 0$ $(z = e^{j\omega} = 1)$:

$$x[n] = u[n] \implies \lim_{n\to\infty} e[n] = \left.\frac{z^2 - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}}{z^2 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}}\right|_{z=e^{j0}=1} = 0$$

(b) Observe que nuestra ecuación para la función de transferencia E/X puede escribirse:

$$\frac{E(z)}{X(z)} = 1 - \frac{Y(z)}{X(z)} = 1 - \frac{H(z)}{1+H(z)} = \frac{1}{1+H(z)}$$

Si $x[n] = u[n]$, $X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$, y tenemos lo siguiente:

$$E(z) = \frac{z}{z-1} \cdot \frac{1}{1+H(z)}$$

Suponemos que el sistema es estable, por lo que todas las raíces de $1 + H(z)$ deben ubicarse dentro del círculo unitario. En particular, dada la entrada acotada $x[n] = u[n]$, sabemos que la salida $e[n]$ debe estar acotada. Todos los polos de $E(z)$ deben ubicarse dentro del círculo unitario. Puesto que existe la transformada de Fourier necesaria, podemos utilizar un truco conocido:

$$x[n] = u[n] \implies \lim_{n\to\infty} e[n] = \left.\frac{1}{1+H(z)}\right|_{z=e^{j0}=1} = 0$$

El último escalón se cumple porque suponemos que $H(z)$ tiene un polo en $z = 1$. De este modo, el *denominador* deja de estar acotado ya que $z \to 1$, y la respuesta del sistema va a cero.

(c) Introduzca la nueva función de transferencia en nuestras ecuaciones:

$$\frac{E(z)}{X(z)} = \frac{1}{1+H(z)} = \frac{1-z^{-1}}{1-z^{-1}+z^{-1}} = 1 - z^{-1}$$

Este sistema es estable y tiene un polo en $z = 0$. Si se examina, la respuesta a impulso del error es $e[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$, y la respuesta a escalón del mismo es $e[n] = \delta[n]$; el sistema localiza una entrada de escalón unitario sin error después de un *time step* o escalón de tiempo.

(d) Introduzca la nueva función de transferencia en nuestras ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\frac{E(z)}{X(z)} &= \frac{1}{1+H(z)} \\
&= \frac{(1+\frac{1}{4}z^{-1})(1-z^{-1})}{(1+\frac{1}{4}z^{-1})(1-z^{-1}) + \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}} \\
&= \frac{1-\frac{3}{4}z^{-1}-\frac{1}{4}z^{-2}}{1-\frac{3}{4}z^{-1}-\frac{1}{4}z^{-2}+\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}} = 1 - \frac{3}{4}z^{-1} - \frac{1}{4}z^{-2}
\end{aligned}$$

Este sistema es estable y tiene dos polos en $z = 0$. Si se examina, la respuesta a impulso del error es $e[n] = \delta[n] - \frac{3}{4}\delta[n-1] - \frac{1}{4}\delta[n-2]$, y la respuesta a escalón del mismo es $e[n] = \delta[n] + \frac{1}{4}\delta[n-1]$; el sistema localiza una entrada de escalón unitario sin error después de dos *time step* o escalones de tiempo.

(e) Nos proporcionan la respuesta de escalón deseada de la señal de error $e[n]$:

$$\begin{aligned} e[n] &= \sum_{k=0}^{N-1} a_k \delta[n-k] \\ \Longrightarrow E(z) &= \sum_{k=0}^{N-1} a_k z^{-k} \end{aligned}$$

A partir del trabajo en el apartado (b), tenemos también la ecuación siguiente para la respuesta a escalón de $e[n]$:

$$E(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} \cdot \frac{1}{1+H(z)}$$

Fije las dos ecuaciones de igual forma y resuelva para $H(z)$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} a_k z^{-k} &= \frac{1}{1-z^{-1}} \cdot \frac{1}{1+H(z)} \\ 1+H(z) &= \frac{1}{1-z^{-1}} \cdot \frac{1}{\sum_{k=0}^{N-1} a_k z^{-k}} \\ H(z) &= \frac{1-(1-z^{-1})\sum_{k=0}^{N-1} a_k z^{-k}}{(1-z^{-1})\sum_{k=0}^{N-1} a_k z^{-k}} \end{aligned}$$

(f) Halle la transformada de $x[n]$ utilizando las tablas:

$$\begin{aligned} x[n] &= (n+1)u[n] = nu[n] + u[n] \\ \Longrightarrow X(z) &= \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} + \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{1}{(1-z^{-1})^2} \end{aligned}$$

Introduzca la nueva función de transferencia $H(z)$ en nuestras ecuaciones:

$$\begin{aligned} E(z) &= X(z)\frac{1}{1+H(z)} = \frac{1}{(1-z^{-1})^2} \cdot \frac{(1+z^{-1})(1-z^{-1})^2}{(1+z^{-1})(1-z^{-1})^2 + z^{-1} + z^{-2} - z^{-3}} \\ &= \frac{1+z^{-1}}{(1+z^{-1})(1-2z^{-1}+z^{-2}) + z^{-1} + z^{-2} - z^{-3}} \\ &= 1 + z^{-1} \end{aligned}$$

Si se examina, $e[n] = \delta[n] + \delta[n-1]$, por lo que el sistema localiza perfectamente después de dos *time step*.