

Señales y sistemas

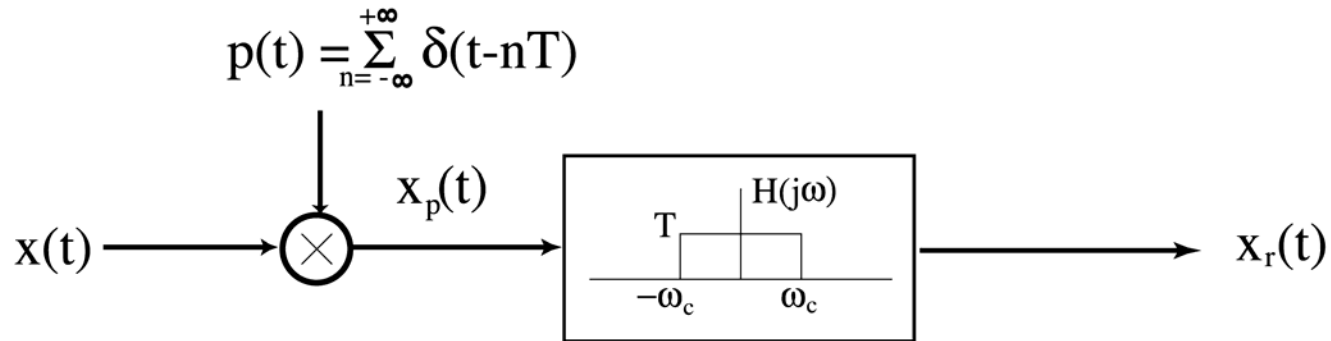
Otoño 2003

Clase 14

23 de octubre de 2003

1. Repaso y ejemplos de muestreo y aliasing.
2. Procesamiento en tiempo discreto de señales de tiempo continuo.

Repaso del muestreo

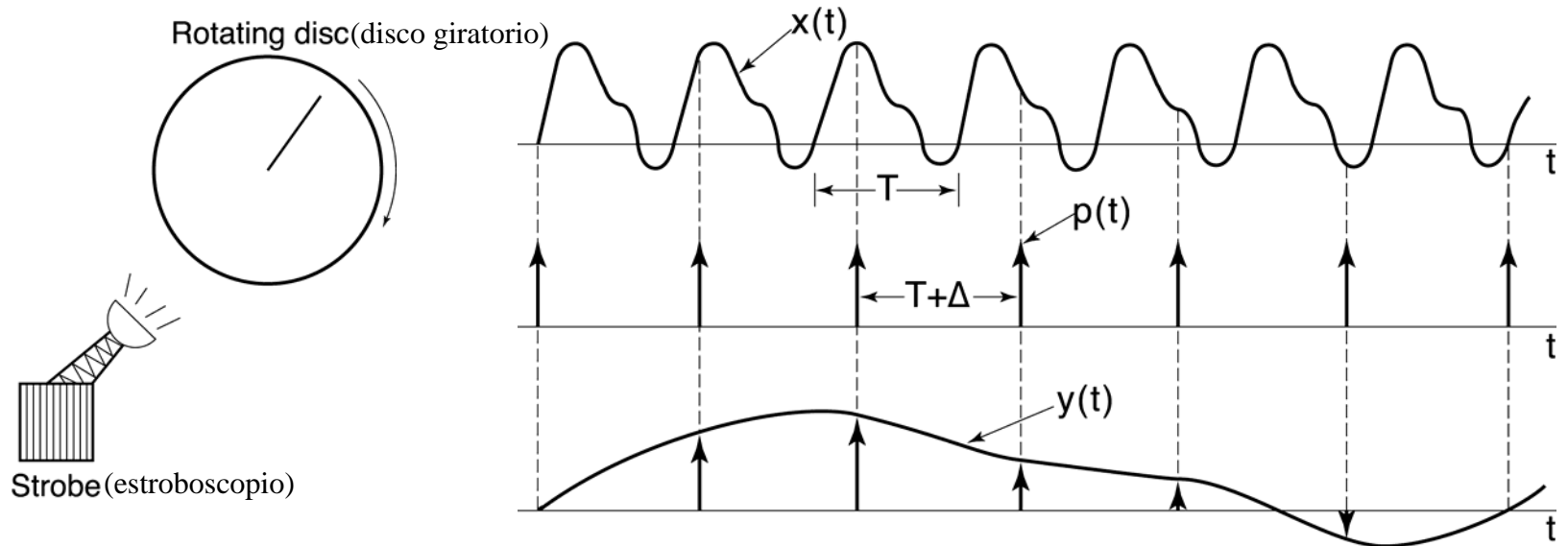


If $X(j\omega) = 0$, $|\omega| > \omega_M$ and $\omega_s = \frac{2\pi}{T} > 2\omega_M$
then, assuming we choose $\omega_M < \omega_c < \omega_s - \omega_M$:
[Si (...) y (...), entonces, suponiendo que elijamos (...):]

$$x_r(t) = x(t)$$

Demo: efecto del aliasing en la música.

Demostración de estroboscopia



$\Delta > 0$, la imagen estroboscópica se desplaza hacia delante, pero a un ritmo inferior.

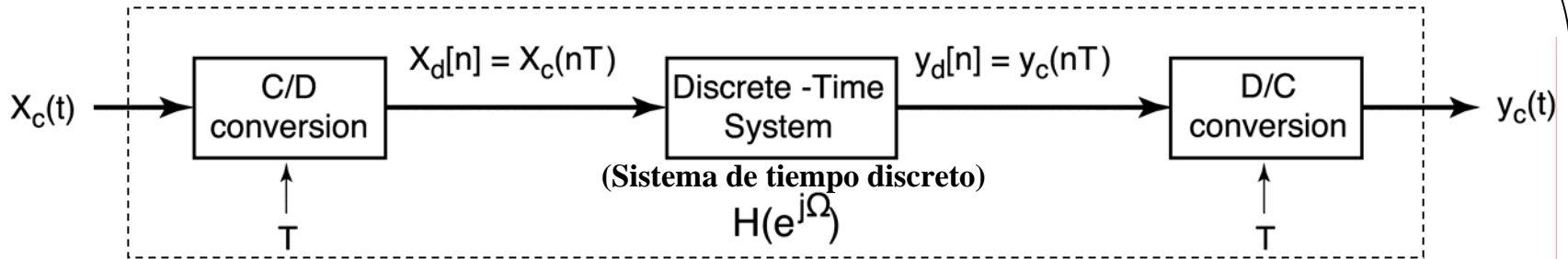
$\Delta = 0$, imagen estroboscópica fija.

$\Delta < 0$, la imagen estroboscópica se desplaza *hacia atrás*.

Aplicaciones del efecto del estroboscopia (el *aliasing* puede resultar útil en ocasiones):

- Ej., osciloscopio de muestreo.

Procesamiento en tiempo discreto de señales de tiempo continuo de *banda limitada*



¿Por qué se hace esto?

— No es caro, es versátil y proporciona un margen de ruido superior.

¿Cómo analizamos este sistema?

— Necesitamos hacerlo en el dominio de la frecuencia en TC y TD.

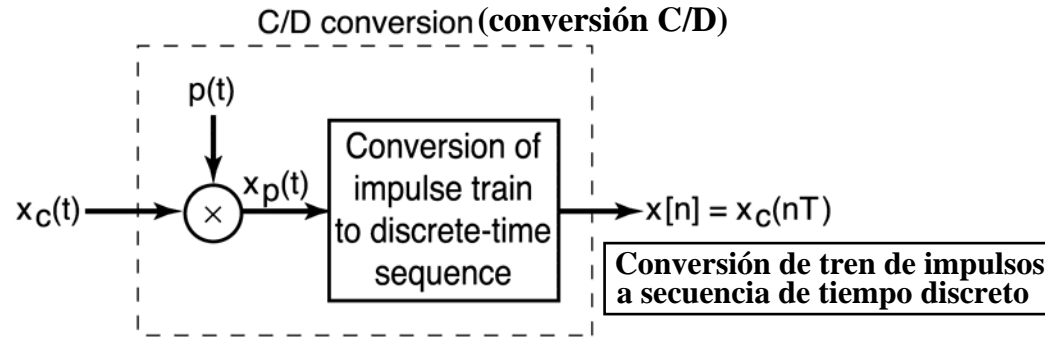
— Para evitar confusión sobre las notaciones, especificar:

ω — Variable de frecuencia en tiempo continuo

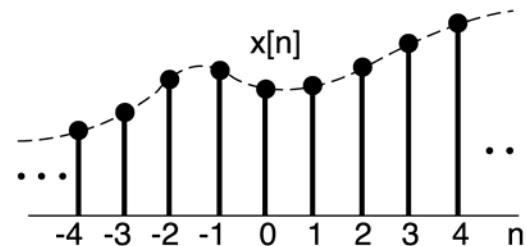
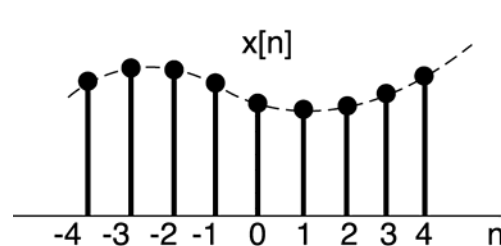
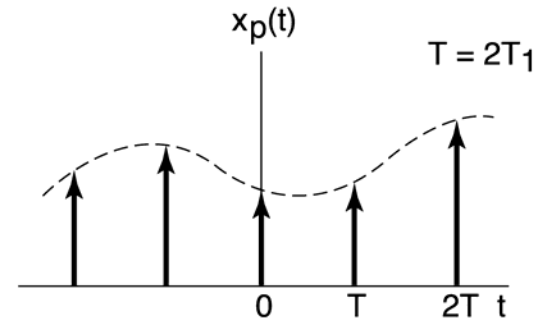
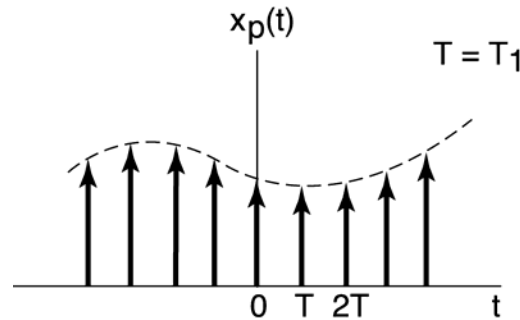
Ω — Variable de frecuencia en tiempo discreto ($\Omega = \omega T$)

Paso 1: Hallar la relación entre $x_c(t)$ y $x_d[n]$, or $X_c(j\omega)$ y $X_d(e^{j\Omega})$

Interpretación del dominio del tiempo de la conversión C/D



Nota: no es una conversión analógica/digital (A/D) completa
– no se cuantizan los valores $x[n]$



Interpretación del dominio de la frecuencia de la conversión C/D

$$x_p(t) = x_c(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT) \delta(t - nT)$$

$\Downarrow \mathcal{F}$

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j(\omega - k\omega_s)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT) e^{-j\omega nT} \quad (1)$$

CT (TC) — (periodic with period $\omega_s = 2\pi/T$)
(periódico con periodo ...)

$$X_d(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_d[n] e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT) e^{-j\Omega n} \quad (2)$$

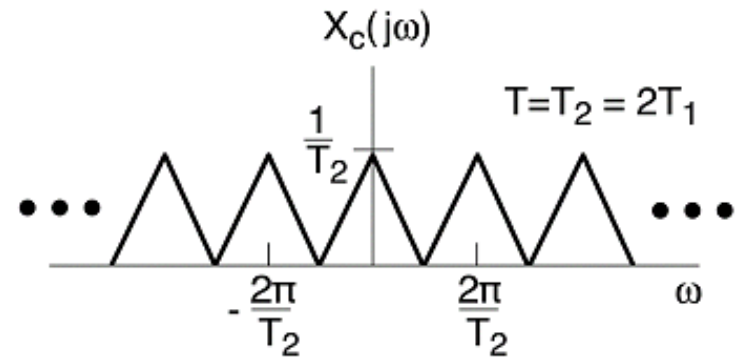
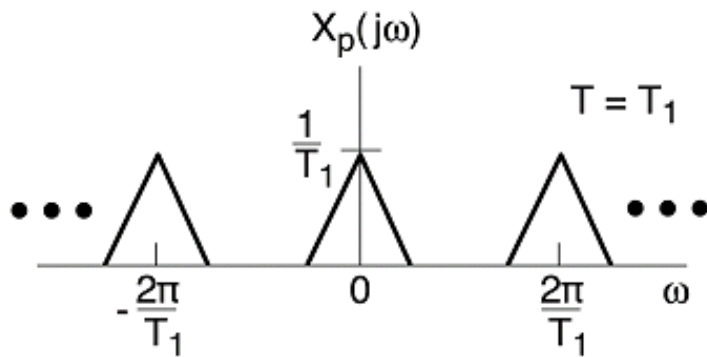
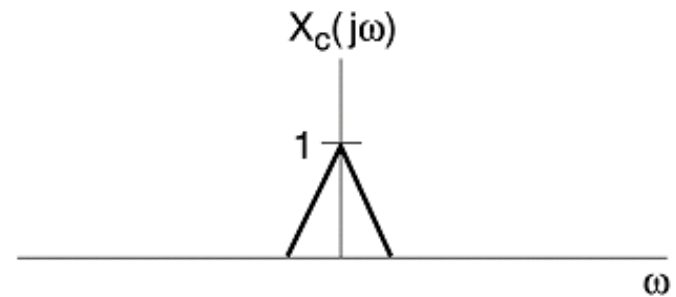
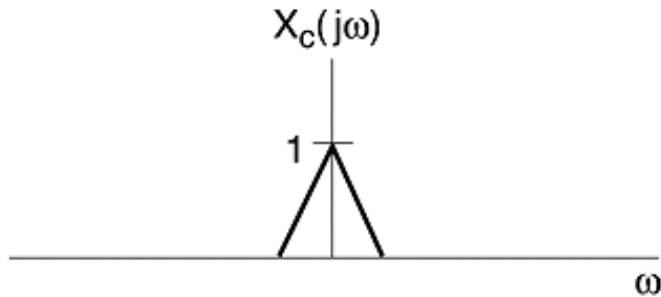
DT (TD) — (periodic with period 2π)
(periódico con periodo ...)

\Downarrow Compare Eqs. (1) & (2) and note $\Omega = \omega T$
(Compare las ecuaciones (1) y (2) y observe ...)

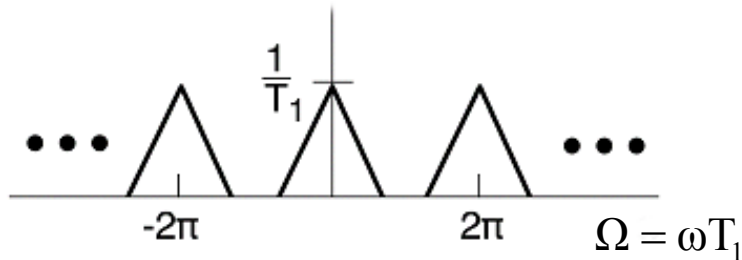
$$X_d(e^{j\Omega}) = X_p \left(j \left(\frac{\Omega}{T} \right) \right)$$

Nota: $\omega_s \Leftrightarrow 2\pi$
TC TD

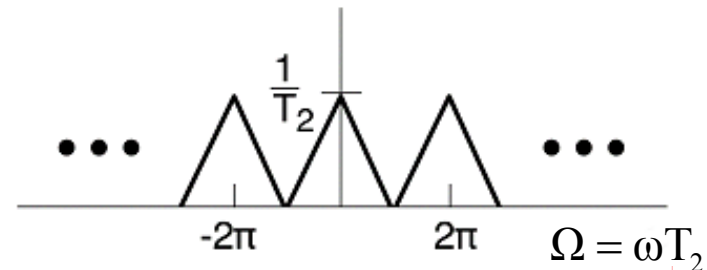
Ilustración de la conversión C/D en el dominio de la frecuencia



$$X_d(e^{j\Omega})$$

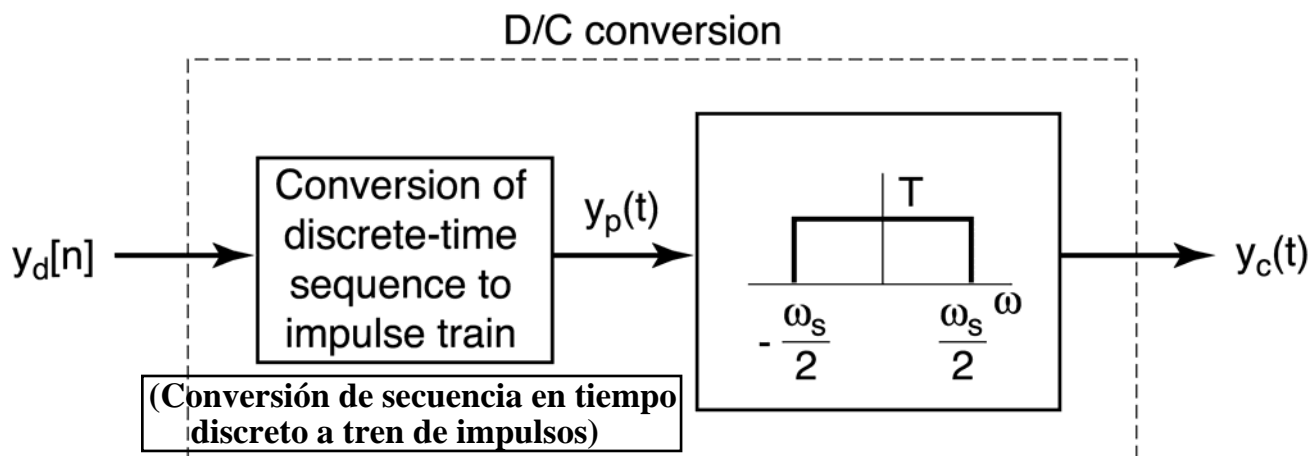


$$X_d(e^{j\Omega})$$



Conversión D/C $y_d[n] \rightarrow y_c(t)$

Inversa del proceso de conversión C/D

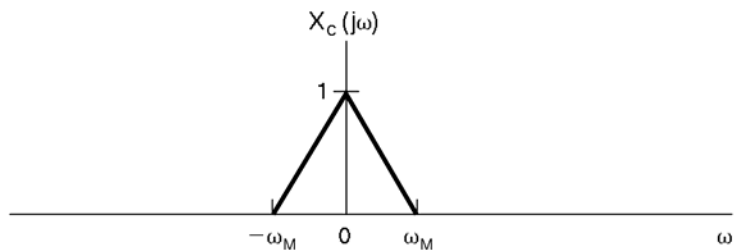


Again, $\Omega = \omega T$
(De nuevo)

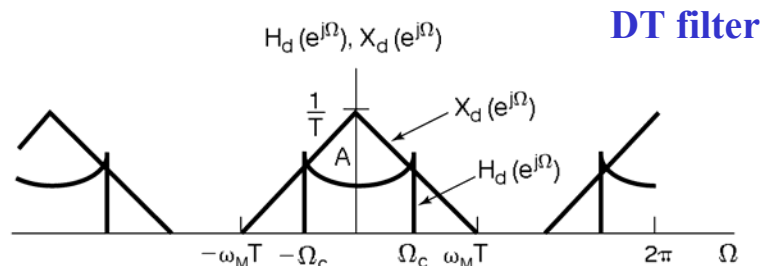
$Y_p(j\omega) = Y_d(e^{j\omega T})$ — Reverses frequency scaling
(Invierte el escalado de la frecuencia)

$Y_c(j\omega) = \begin{cases} TY_d(e^{j\omega T}), & |\omega| < \frac{\omega_s}{2} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ — bandlimited
(banda limitada)
(de lo contrario)

Frequency-Domain Illustration of DT Processing of CT Signals



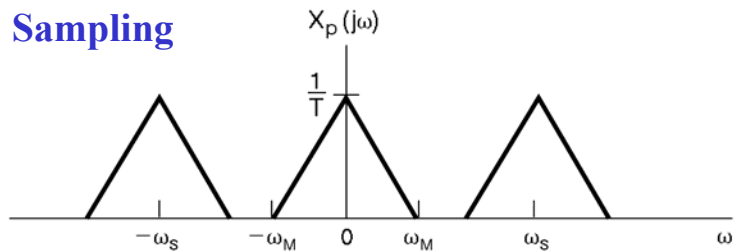
(a)



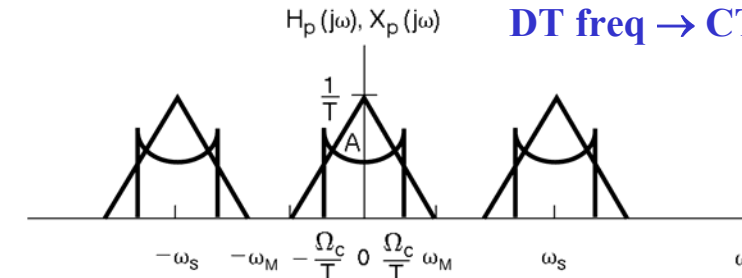
(d)

DT filter

Sampling



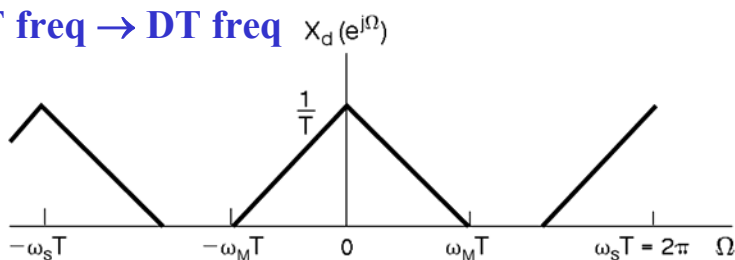
(b)



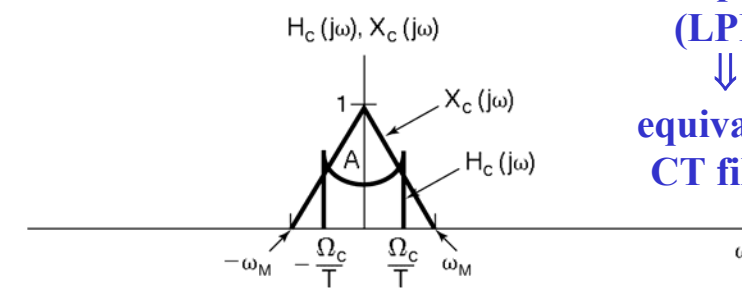
(e)

DT freq \rightarrow CT freq

CT freq \rightarrow DT freq



(c)



(f)

**Interpolate
(LPF)
 \downarrow
equivalent
CT filter**

Assuming No Aliasing

$$\begin{aligned} \text{Step 1 - C/D: } X_d(e^{j\Omega}) &= X_p(j\Omega/T) \quad - \text{ periodic} \\ \omega = \Omega/T &= \frac{1}{T} X_c(j\Omega/T), \quad -\pi < \Omega < \pi \text{ if no aliasing} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Step 2 - DT Filter: } Y_d(e^{j\Omega}) &= H_d(e^{j\Omega}) X_d(e^{j\Omega}) \\ &= \frac{1}{T} H_d(e^{j\Omega}) X_c(j\Omega/T), \quad -\pi < \Omega < \pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Step 3 - D/C: } Y_c(j\omega) &= \begin{cases} T Y_d(e^{j\omega T}) = H_d(e^{j\omega T}) X_c(j\omega), & -\frac{\omega_s}{2} < \omega < \frac{\omega_s}{2} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \\ \Omega = \omega T & \end{aligned}$$

↓

$$H_c(j\omega) = \begin{cases} H_d(e^{j\omega T}), & |\omega| < \frac{\omega_s}{2} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

In practice, first specify the desired $H_c(j\omega)$, then design $H_d(e^{j\Omega})$.

Example: Digital Differentiator

Applications: Edge Enhancement



Courtesy of Jason Oppenheim.
Used with permission.



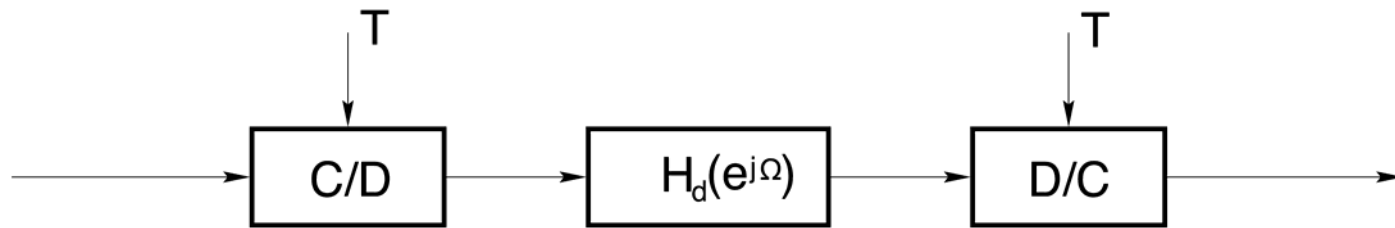
Courtesy of Jason Oppenheim.
Used with permission.

Construction of Digital Differentiator

Bandlimited Differentiator

$$\text{Desired: } H_c(j\omega) = \begin{cases} j\omega, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

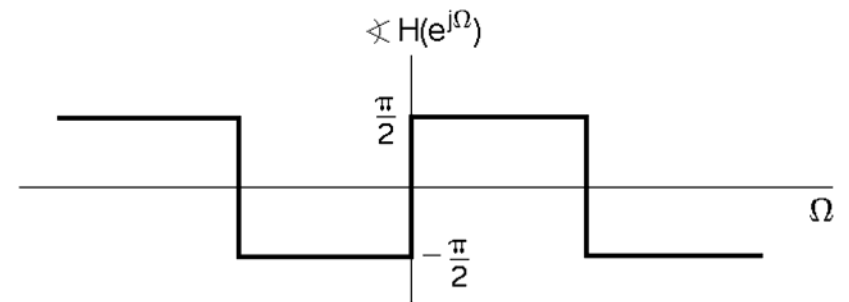
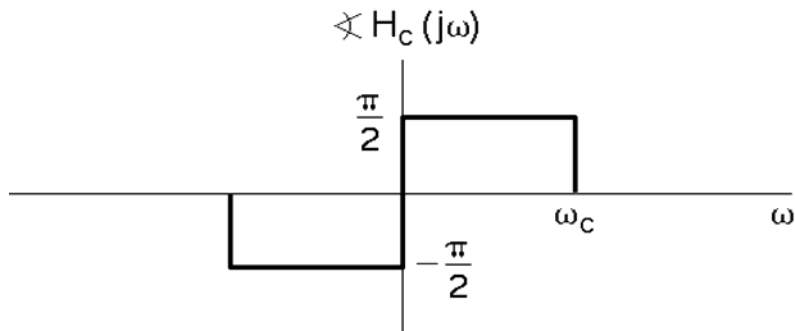
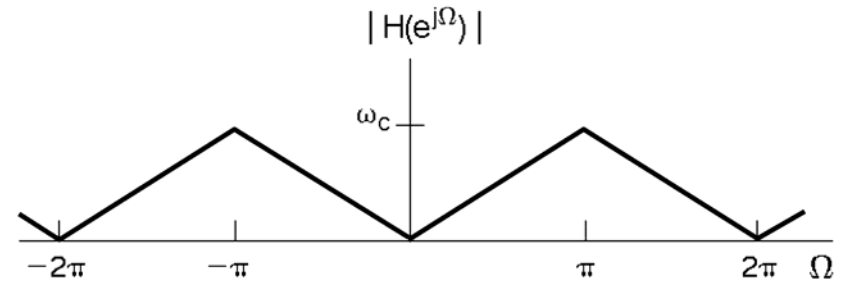
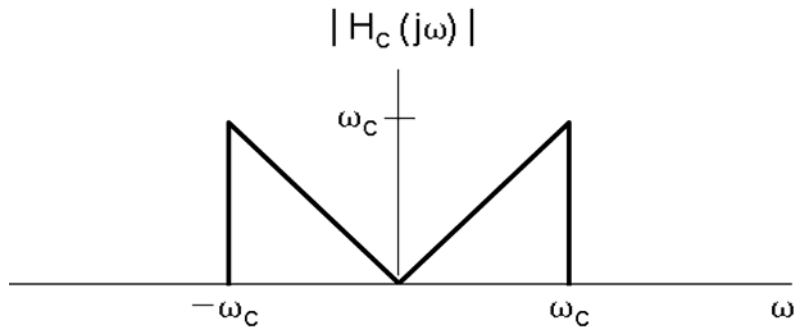
Set $\omega_s = 2\omega_c \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_s} = \frac{\pi}{\omega_c}$. Assume $\omega_M < \omega_c$ (Nyquist rate met)



Choice for $H_d(e^{j\Omega})$:

$$\begin{aligned} H_d(e^{j\Omega}) &= \begin{cases} H_c(j\Omega/T), & |\Omega| < \pi \\ \text{periodic}, & |\Omega| \geq \pi \end{cases} \\ &= j \left(\frac{\Omega}{T} \right) = j\omega_c \left(\frac{\Omega}{\pi} \right) \quad |\Omega| < \pi \end{aligned}$$

Band-Limited Digital Differentiator (continued)



CT

DT