Señales y sistemas

Otoño 2003

Clase 22

2 de diciembre de 2003

1. Propiedades de la ROC de la transformada z.
2. Transformada inversa z.
3. Ejemplos.
4. Propiedades de la transformada z.
5. Funciones de sistema de los sistemas LTI en tiempo discreto:
   a. Causalidad.
   b. Estabilidad.

La transformada z

$$x[n] \longleftrightarrow X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = \mathcal{Z}\{x[n]\}$$

$$\text{ROC} = \left\{ z = re^{j\omega} \text{ at which } \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]r^{-n}| < \infty \right\}$$

– sólo depende de $r = |z|$, al igual que la ROC en el plano s depende sólo de $Re(s)$

- Anteriormente:
  - Círculo unitario ($r = 1$) en la ROC $\Rightarrow$ existe la TF $X(e^{j\omega})$ en tiempo discreto.
  - Las transformadas racionales corresponden a señales que son combinaciones lineales de exponenciales en tiempo discreto.

Cierta intuición acerca de la relación entre la T*z* y la TL

$$x(t) \longleftrightarrow X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt = \mathcal{L}\{x(t)\}$$

Let $t = nT$
(Sea)

$$= \lim_{T \to 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{x(nT)}_{x[n]}(e^{sT})^{-n} \cdot T$$

$$= \lim_{T \to 0} T \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](e^{sT})^{-n}$$

La tranformada (bilateral) z:

$$x[n] \longleftrightarrow X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = \mathcal{Z}\{x[n]\}$$

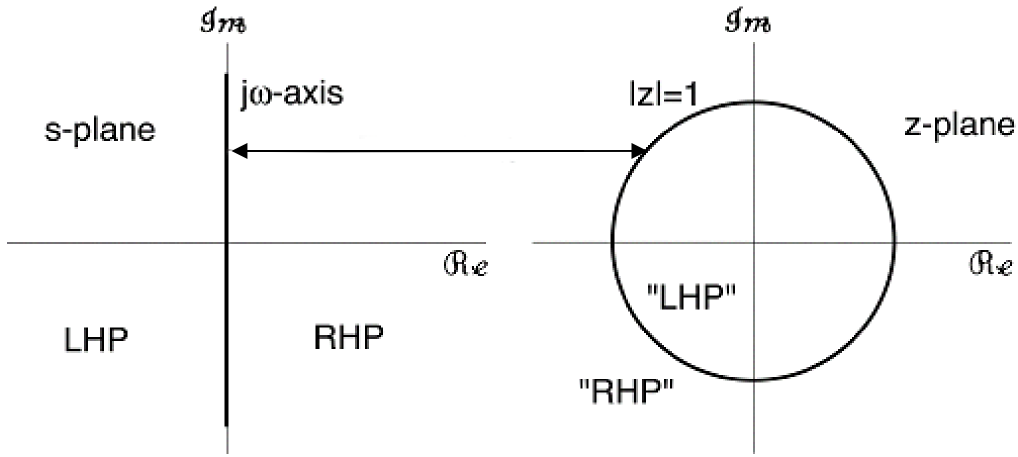
Se puede pensar en la transformada z como la versión en tiempo discreto de la transformada de Laplace siendo:

$$z = e^{sT}$$

Más intuición acerca de las relaciones T*z*-T*L*, plano *s*-plano *z*

$$e^{sT} = z$$

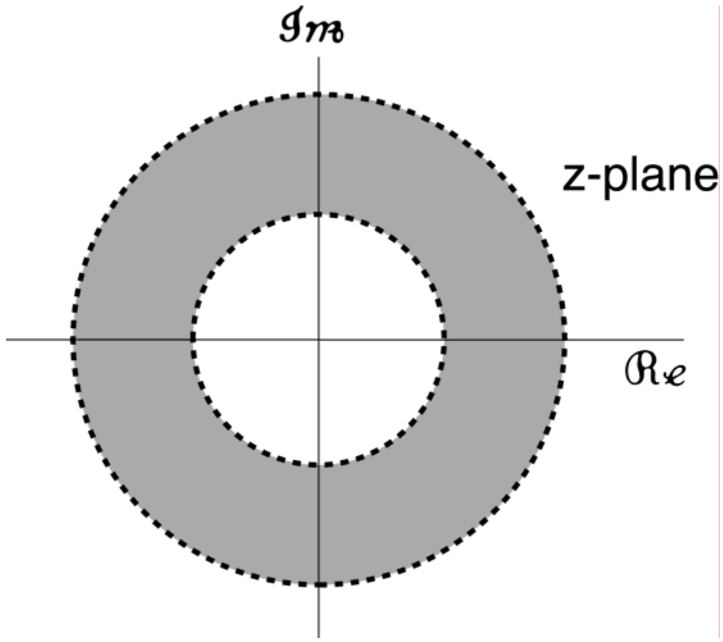
$j\omega$ axis in s-plane $(s = j\omega) \Leftrightarrow$ $|z| = |e^{j\omega T}| = 1$ - a unit circle in z-plane
(eje jω en el plano *s* ...) (un círculo unitario en el plano *z*)



- LHP en el plano *s*, $Re(s) < 0 \Rightarrow |z| = |e^{sT}| < 1$, dentro de $|z| = 1$ círculo.
  Caso especial, $Re(s) = -\infty \Leftrightarrow |z| = 0$.
- RHP en el plano *s*, $Re(s) > 0 \Rightarrow |z| = |e^{sT}| > 1$, fuera de $|z| = 1$ círculo.
  Caso especial, $Re(s) = +\infty \Leftrightarrow |z| = \infty$.
- Línea vertical en el plano *s*, $Re(s)$ = constante $\Leftrightarrow |e^{sT}|$ = constante, un círculo en el plano *z*.

Propiedades de las ROC de las transformadas *z*

(1) La ROC de $X(z)$ consiste en un anillo en el plano z centrado aproximadamente en el origen (equivalente a una tira vertical en el plano s)



(2) La ROC *no* contiene ningún polo (al igual que en la *TL*).

Más propiedades de la ROC

(3) Si $x[n]$ tiene duración finita, la ROC constituye todo el plano z, excepto posiblemente en $z = 0$ y/o $z = \infty$.

¿Por qué?

$$X(z) = \sum_{n=N_1}^{N_2} x[n] z^{-n}$$

Ejemplos: equivalente en tiempo continuo

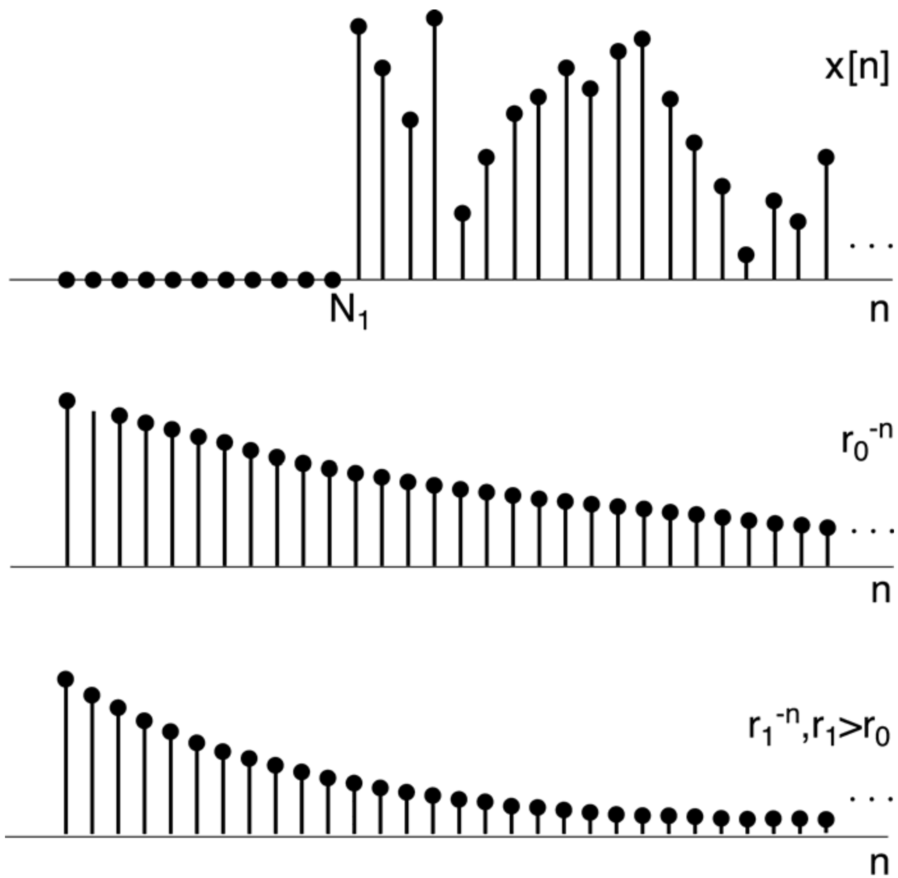
$$\delta[n] \longleftrightarrow 1 \quad \text{ROC all } z \quad \Big| \quad \delta(t) \longleftrightarrow 1 \quad \text{ROC all } s$$

$$\delta[n-1] \longleftrightarrow z^{-1} \quad \text{ROC } z \neq 0 \quad \Big| \quad \delta(t-T) \longleftrightarrow e^{-sT} \quad \Re e\{s\} \neq -\infty$$

$$\delta[n+1] \longleftrightarrow z \quad \text{ROC } z \neq \infty \quad \Big| \quad \delta(t+T) \longleftrightarrow e^{sT} \quad \Re e\{s\} \neq \infty$$

Propiedades de la ROC (continuación)

(4) Si $x[n]$ es una secuencia del lado derecho, y si $|z| = r_o$ se encuentra en la ROC, todos los valores finitos de z para los cuales $|z| > r_o$ se encuentran también en la ROC.



$$\sum_{n=N_1}^{\infty} x[n] r_1^{-n}$$

converges faster than
(converge más rápido que)

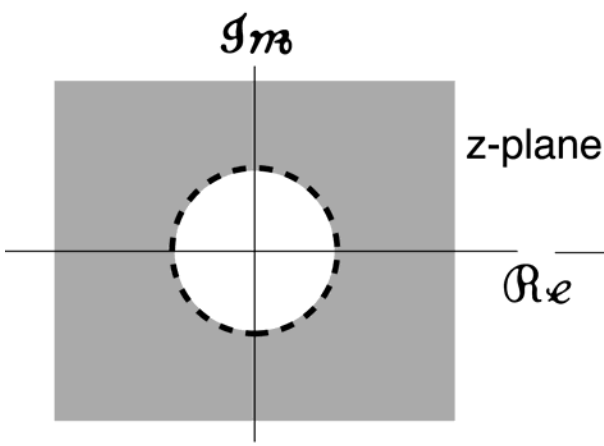
$$\sum_{n=N_1}^{\infty} x[n] r_0^{-n}$$

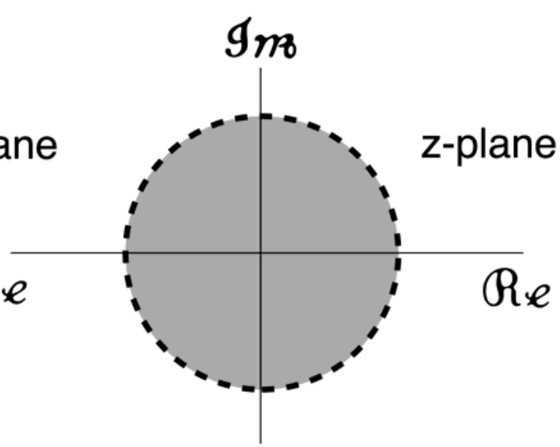
Uno al lado del otro

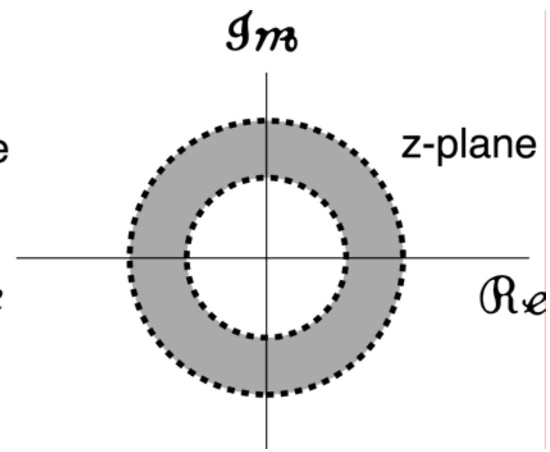
(5) Si $x[n]$ es una secuencia del lado izquierdo, y si $|z| = r_o$ se encuentra en la ROC, todos los valores finitos de z para los que $0 < |z| < r_o$ se encuentran también en la ROC.

(6) Si $x[n]$ es bilateral, y si $|z| = r_o$ se encuentra en la ROC, la ROC consiste en un anillo en el plano z que incluye el círculo $|z| = r_o$.

¿A qué tipo de señales corresponden las siguientes ROC?







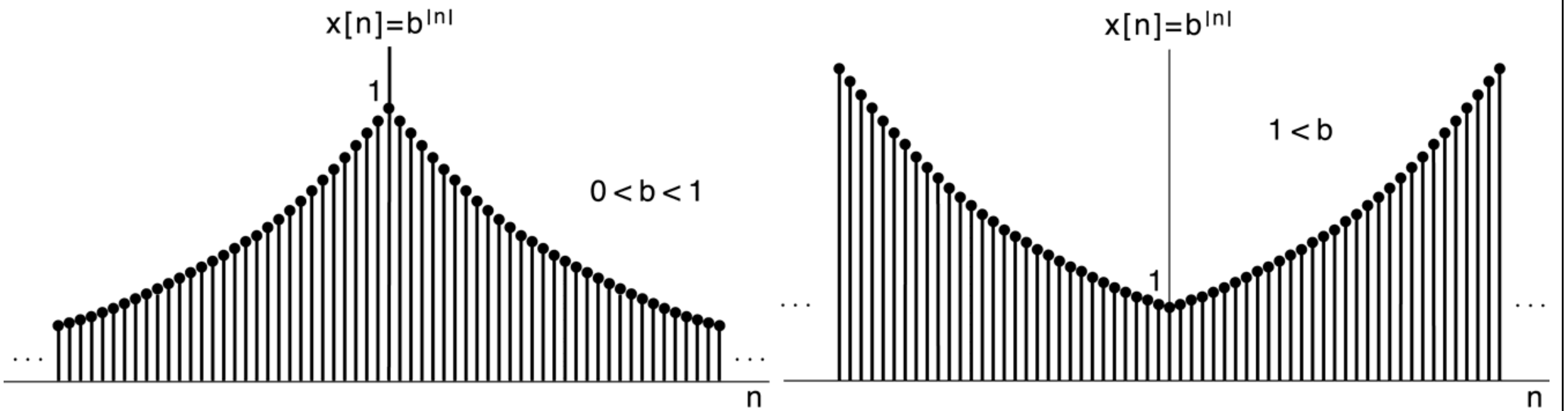
del lado derecho

del lado izquierdo

bilateral

Ejemplo 1

$$x[n] = b^{|n|}, \quad b > 0$$



$$x[n] = b^n u[n] + b^{-n} u[-n-1]$$

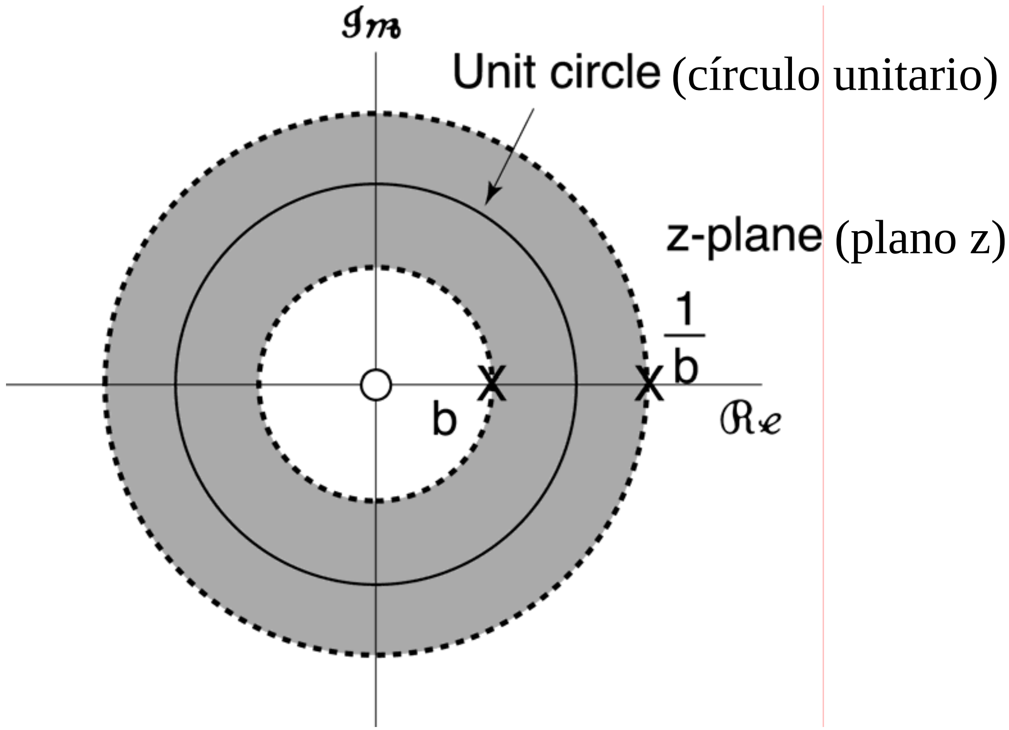
From:

$$b^n u[n] \longleftrightarrow \frac{1}{1 - bz^{-1}}, \quad |z| > b$$

$$b^{-n} u[-n-1] \longleftrightarrow \frac{-1}{1 - b^{-1}z^{-1}}, \quad |z| < \frac{1}{b}$$

Ejemplo (continuación)

$$X(z) = \frac{1}{1 - bz^{-1}} + \frac{-1}{1 - b^{-1}z^{-1}} \quad , \quad b < |z| < \frac{1}{b}$$



Evidentemente, la ROC *no* existe si $b > 1 \Rightarrow$ *No* existe transformada *z* para $b^{|n|}$.

Transformadas inversas z

$$X(z) = X(re^{j\omega}) = \mathcal{F}\{x[n]r^{-n}\}, z = re^{j\omega} \in \text{ ROC}$$

$$\Downarrow$$

$$x[n]r^{-n} = \mathcal{F}^{-1}\left\{X(re^{j\omega})\right\} = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(re^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

$$\Downarrow$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(re^{j\omega})\underbrace{r^n e^{j\omega n}}_{z^n}d\omega$$

para r fijo:

$$z = re^{j\omega} \Rightarrow dz = jre^{j\omega}d\omega \Rightarrow d\omega = \frac{1}{j}z^{-1}dz$$

$$\Downarrow$$

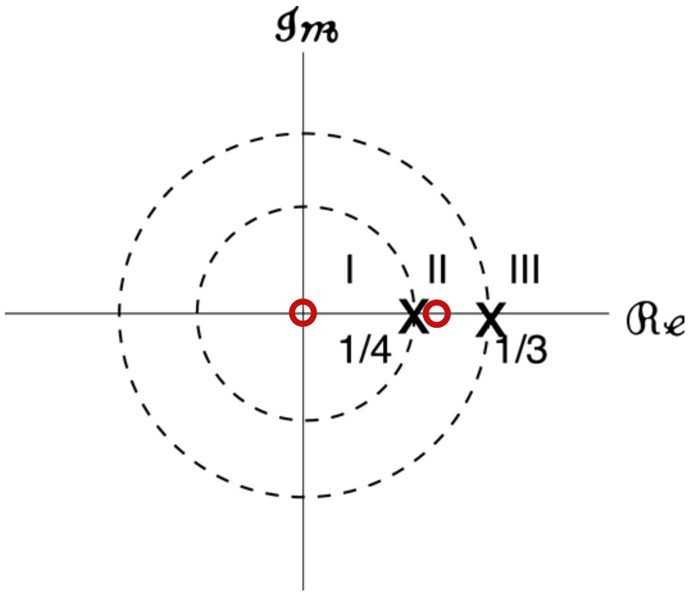
$$x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint X(z)z^{n-1}dz$$

Ejemplo 2

$$X(z)=\frac{3z^2-\frac{5}{6}z}{(z-\frac{1}{4})(z-\frac{1}{3})}=\frac{3-\frac{5}{6}z^{-1}}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})}=\frac{A}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}+\frac{B}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$$

Álgebra de expansión de fracción parcial: $A = 1, B = 2$

$$\begin{array}{ccccc} X(z) & = & \frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} & + & \frac{2}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ x[n] & = & x_1[n] & + & x_2[n] \end{array}$$



Nota, particular para las transformadas *z*:

1) Cuando halle los polos y los ceros, exprese $X(z)$ en función de z.

2) Cuando realice la transformada inversa z utilizando PFE, exprese $X(z)$ como función de z^{-1}.

(ceros en z = 0 y ...)

zeros at $z = 0$ and

$3z-\frac{5}{6}=0$ or $z=\frac{5}{18}$

ROC III: $|z| > \frac{1}{3}$ - right-sided signal (señal del lado derecho)

$$x_1[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

$$x_2[n] = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

ROC II: $\frac{1}{4} < |z| < \frac{1}{3}$ - two-sided signal (señal bilateral)

$$x_1[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

$$x_2[n] = -2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1]$$

ROC I: $|z| < \frac{1}{4}$ - left-sided signal (señal del lado izquierdo)

$$x_1[n] = -\left(\frac{1}{4}\right)^n u[-n-1]$$

$$x_2[n] = -2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1]$$

Inversión mediante identificación de coeficientes en las series de potencia

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

$x[n]$ - coefficient of z^{-n}
(coeficiente de...)

Ejemplo 3: $$X(z) = 3z^3 - z + 2z^{-4}$$

$$x[-3] = 3$$

$$x[-1] = -1$$

$$x[4] = 2$$

$x[n] = 0$ para todos los demás *n*

— Secuencia en tiempo discreto de duración finita

Ejemplo 4:

(a) $$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = 1 + az^{-1} + (az^{-1})^2 + \cdots$$

$$\Downarrow - \text{ convergent for } |az^{-1}| < 1, \text{i.e.,} |z| > |a|$$

(convergente para (...), es decir...)

$$x[n] = a^n u[n]$$

(b) $$\begin{aligned} X(z) &= \frac{1}{1 - az^{-1}} = -a^{-1} z \left\{ \frac{1}{1 - a^{-1} z} \right\} \\ &= -a^{-1} z (1 + a^{-1} z + (a^{-1} z)^2 + \cdots) \\ &= -a^{-1} z - a^{-2} z^2 - a^{-3} z^3 - \cdots \end{aligned}$$

$$\Downarrow - \text{ convergent for } |a^{-1} z| < 1, \text{i.e.,} |z| < |a|$$

(convergente para (...), es decir...)

$$x[n] = -a^n u[-n-1]$$

Propiedades de las transformadas z

(1) Desplazamiento de tiempo $x[n-n_0] \longleftrightarrow z^{-n_0}X(z),$

La racionalidad de $X(z)$ no cambia, *distinta* de la TL. La ROC no cambia, excepto en posibles casos de adición o eliminación del origen o del infinito.

$n_o > 0 \Rightarrow$ ROC $z \neq 0$ (quizás)

$n_o < 0 \Rightarrow$ ROC $z \neq \infty$ (quizás)

(2) Diferenciación del dominio z $nx[n] \longleftrightarrow -z\dfrac{dX(z)}{dz},$ la misma ROC

Derivación:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

$$\frac{dX(z)}{dz} = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} nx[n]z^{-n-1}$$

$$-z\frac{dX(z)}{dx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} nx[n]z^{-n}$$

Propiedad de convolución y funciones del sistema

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n] = x[n] * h[n]$$

$Y(z) = H(z)X(z)$, ROC, al menos la intersección de las ROC de $H(z)$ y $X(z)$, puede ser mayor si existe una cancelación de polo / cero, *por ejemplo*:

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1}{z-a}, \quad |z| > a \\ X(z) &= z - a, \quad z \neq \infty \\ Y(z) &= 1 \quad \text{ROC all } z \end{aligned}$$

(ROC, todo z)

$$\boxed{H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] z^{-n}}$$

— The System Function

(La función del sistema)

H(z) + ROC nos da toda la información del sistema

CAUSALIDAD

(1) $h[n]$ del lado derecho $\Rightarrow$ la ROC es el exterior de un círculo que *posiblemente* incluya $z = \infty$:

$$H(z) = \sum_{n=N_1}^{\infty} h[n] z^{-n}$$

(Si (...), el término (...) en (...))

If $N_1 < 0$, then the term $h[N_1]z^{-N_1} \to \infty$ at $z = \infty$

$\Rightarrow$ ROC outside a circle, but does *not* include ∞.

(ROC fuera de un círculo, pero *no* incluye ...)

Causal $\Leftrightarrow N_1 \geq 0$

No z^m terms with $m > 0$

(No hay términos z^m con $m > 0$)

$\Rightarrow z = \infty \in$ ROC

$$\Downarrow$$

Un sistema LTI en tiempo discreto con función de sistema $H(z)$ es causal $\Leftrightarrow$ la ROC de $H(z)$ es el exterior de un círculo, *incluyendo* $z = \infty$

Causalidad para sistemas con funciones racionales de sistema

$$H(z) = \frac{b_M z^M + b_{M-1} z^{M-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{a_N z^N + a_{N-1} z^{N-1} + \cdots + a_1 z + a_0}$$

$$\Downarrow \ \text{No poles at } \infty, \ \text{if } M \leq N$$

Un sistema LTI en tiempo discreto con función racional de sistema *H*(*z*) es causal

$\Leftrightarrow$ (a) la ROC es el exterior de un círculo fuera del polo más exterior;

y (b) si escribimos *H(z)* como un ratio de polinomios:

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

entonces,

$$\text{degree } N(z) \leq \ \text{degree } D(z)$$

(grado)

Estabilidad

- Sistema LTI estable $\Leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty \Leftrightarrow$ la ROC de $H(z)$ incluye el círculo unitario $|z| = 1$

$\Rightarrow$ Respuesta de frecuencia $H(e^{j\omega})$ (existe la TF en tiempo discreto del eje $h[n]$).

- Un sistema LTI causal con función racional de sistema es estable $\Leftrightarrow$ todos los polos se encuentran dentro del círculo unitario, es decir, tienen magnitudes < 1