Señales y sistemas

Otoño 2003

Clase 2

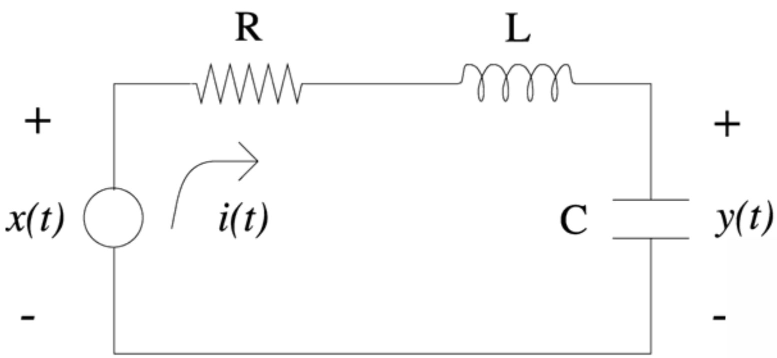
9 de septiembre de 2003

1) Algunos ejemplos de sistemas
2) Propiedades de los sistemas y ejemplos
    a) Causalidad
    b) Linealidad
    c) Invariancia del tiempo

EJEMPLOS DE SISTEMAS

$x(t) \longrightarrow$ Sistema de TC $\longrightarrow y(t)$ $\quad$ $x[n] \longrightarrow$ Sistema de TD $\longrightarrow y[n]$

Ej. 1 Circuito RLC



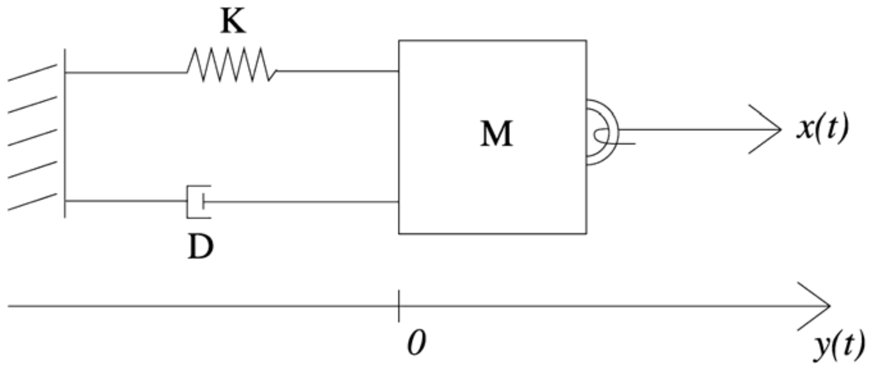
$$\mathrm{R}\ i(t) + \mathrm{L}\frac{di(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

$$i(t) = \mathrm{C}\frac{dy(t)}{dt}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{LC}\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \mathrm{RC}\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

Ej. 2 Sistema mecánico



x(t) - applied force
(fuerza aplicada)
K - spring constant
(constante del muelle)
D - damping constant
(constante de amortiguación)
y(t) - displacement from rest
(desplazamiento desde la posición de reposo)

Equilibrio de fuerzas:

$$\mathrm{M}\frac{d^2y(t)}{dt^2} = x(t) - \mathrm{K}y(t) - \mathrm{D}\frac{dy(t)}{dt}$$

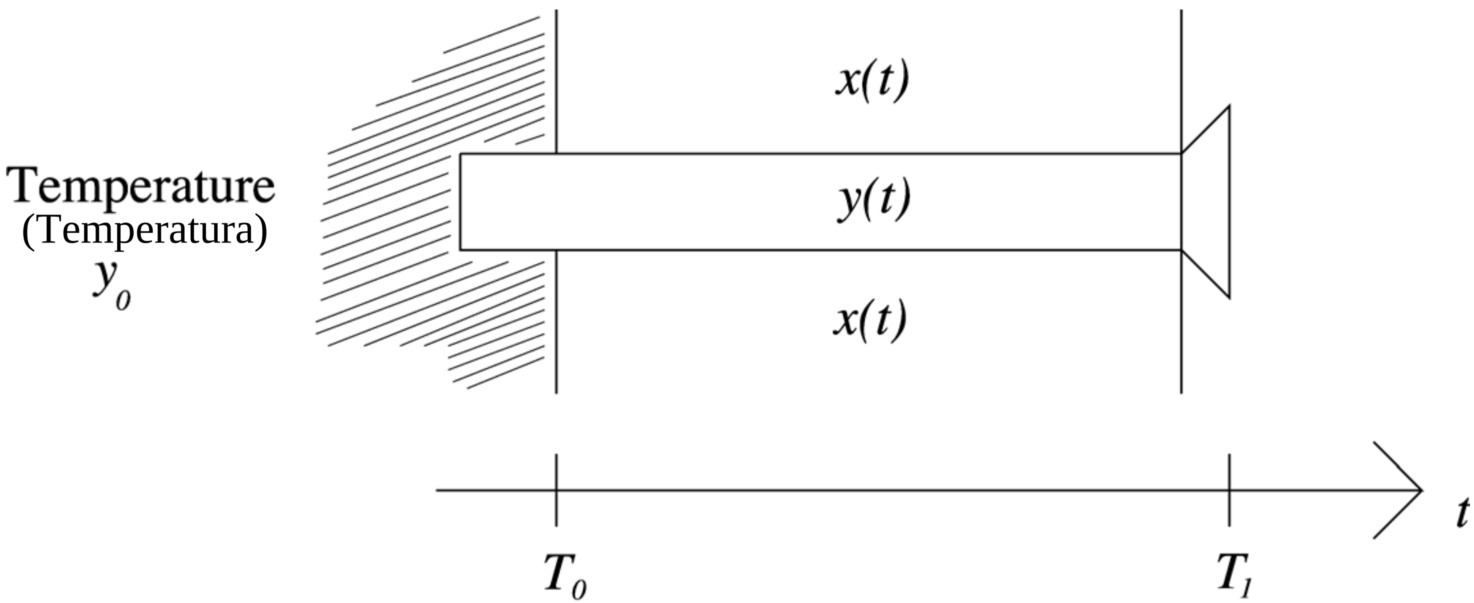
$$\Downarrow$$

$$\mathrm{M}\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \mathrm{D}\frac{dy(t)}{dt} + \mathrm{K}y(t) = x(t)$$

Observación: se pueden modelar matemáticamente sistemas físicos muy diferentes de forma similar.

Ej. 3 Sistema térmico

Aleta de refrigeración en estado estacionario



t = distance along rod
(distancia a lo largo de la biela)
$y(t)$ = Fin temperature as function of position
(Temperatura de la aleta en función de la posición)
$x(t)$ = Surrounding temperature along the fin
(Temperatura circundante a lo largo de la aleta)

Ej. 3 (continuación)

$$\begin{aligned}\frac{d^2y(t)}{dt^2} &= k[y(t)-x(t)]\\ y(T_0) &= y_0\\ \frac{dy}{dt}(T_1) &= 0\end{aligned}$$

Observaciones:

- La variable independiente puede ser otra distinta del tiempo, por ejemplo, el espacio.
- Dichos sistemas pueden, de forma más natural, tener condiciones de <u>contorno</u> en lugar de condiciones "iniciales".

Ej. 4 Sistema financiero

Fluctuaciones en la cotización de los bonos de cupón cero

$t = 0$ Tiempo de adquisición a una cotización y_0

$t = T$ Tiempo de vencimiento al valor y_T

$y(t)$ = Valores de los bonos en tiempo t

$x(t)$ = Influencia de factores externos en las fluctuaciones en el precio de los bonos

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} = f\left(y(t), \frac{dy(t)}{dt}, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_N(t), t\right)$$

$$y(0) = y_0, \quad y(T) = y_T.$$

Observación: aunque la variable independiente sea el tiempo, existen sistemas importantes e interesantes que poseen condiciones de contorno.

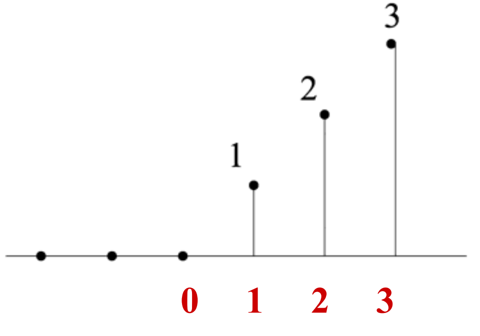
Ej. 5

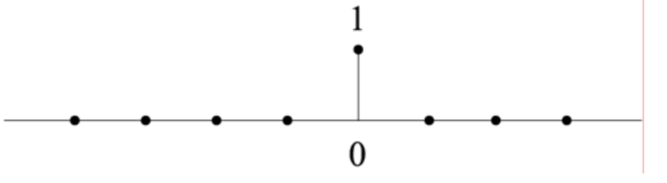
- Detector de "bordes" rudimentario

$$
\begin{aligned}
y[n] &= x[n+1] - 2x[n] + x[n-1] \\
&= \{x[n+1] - x[n]\} - \{x[n] - x[n-1]\} \\
&= \text{“Second difference”} \text{ ("Segunda diferencia")}
\end{aligned}
$$

- Este sistema detecta cambios en la pendiente de la señal

$$
\begin{array}{lccc}
(a) & x[n] = n & \Rightarrow & y[n] = 0 \\
(b) & x[n] = nu[n] & \Rightarrow & y[n]
\end{array}
$$





Observaciones

1) Una clase de sistemas muy rica (aunque no todos los sistemas que nos interesqan, ni mucho menos) se describe mediante ecuaciones diferenciales y ecuaciones de diferencias.

2) Dichas ecuaciones, por sí mismas, no describes totalmente el comportamiento entrada-salida de un sistema: necesitamos condiciones auxiliares (condiciones iniciales y de contorno).

3) En algunos casos, aunque no en todos, el sistema que nos interesa tiene como variable natural independiente el tiempo y es causal.

4) Sistemas físicos muy diferentes pueden tener descripciones matemáticas muy similares.

PROPIEDADES DEL SISTEMA
(Causalidad, linealidad, invariancia del tiempo, etc.)

¿Por qué?

- Implicaciones prácticas / físicas importantes

- Nos proporcionan una perspectiva y una estructura que podemos explotar para analizar y comprender los sistemas más a fondo.

CAUSALIDAD

- Un sistema es causal si la salida no anticipa valores futuros de la entrada, es decir, si en todo momento la salida depende únicamente de valores de la entrada hasta ese momento.

- Todos los sistemas físicos de tiempo real son causales, dado que el tiempo sólo se desplaza hacia delante. El efecto ocurre después de la causa. (Imagine que dispone de un sistema no causal cuya salida depende de la cotización de las acciones de mañana.
- La causalidad no es aplicable a señales de variación espacial. (Podemos mover de izquierda a derecha y de arriba a abajo).

- La causalidad no es aplicable a sistemas que procesan señales grabadas; p.ej., partidos deportivos grabados vs. en directo.

CAUSALIDAD (continuación)

- Matemáticamente (en TC): un sistema $x(t) \to y(t)$ es causal si

cuando $x_1(t) \to y_1(t) \quad x_2(t) \to y_2(t)$

y $x_1(t) = x_2(t)$ para todo $t \leq t_o$

Por tanto, $y_1(t) = y_2(t)$ para todo $t \leq t_o$

CAUSAL O NO CAUSAL

$$y(t) = x^2(t-1)$$

E.g. $y(5)$ depends on $x(4)$ ... causal

(Ej. $y(5)$ depende de $x(4)$... causal)

$$y(t) = x(t+1)$$

E.g. $y(5) = x(6), y$ depends on future $\Rightarrow$ noncausal

(Ej. $y(5) = x(6)$, y depende del futuro –-> no causal)

$$y[n] = x[-n]$$

E.g. $y[5] = x[-5]$ ok, but

$y[-5] = x[5], y$ depends on future $\Rightarrow$ noncausal

(depende del futuro –-> no causal)

$$y[n] = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1} x^3[n-1]$$

E.g. $y[5]$ depends on $x[4]$ ... causal

(Ej. $y[5]$ depende de $x[4]$... causal)

INVARIANCIA DEL TIEMPO (TI)

De manera informal, un sistema es invariante en el tiempo (TI) si su comportamiento no depende del tiempo en el que esté.

- Matemáticamente (en TD): un sistema $x[n] \rightarrow y[n]$ es TI si para <u>cualquier</u> entrada $x[n]$ y <u>cualquier</u> diferencia de tiempo n_0,

Si $$x[n] \rightarrow y[n]$$

entonces $$x[n - n_0] \rightarrow y[n - n_0]\ .$$

- De igual forma, para un sistema de tiempo continuo invariante en el tiempo,

Si $$x(t) \rightarrow y(t)$$

entonces $$x(t - t_o) \rightarrow y(t - t_o)\ .$$

¿Variante o invariante en el tiempo?

$$y(t) = x^2(t+1)$$

TI

$$y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} x^3[n-1]$$

Variante en el tiempo (NO invariante)

AHORA PODEMOS DEDUCIR ALGO

Hecho: si la entrada a un sistema TI es periódica, la salida es periódica con el mismo periodo.

"Prueba": Suponga que $x(t+T) = x(t)$

y $x(t) \rightarrow y(t)$

Entonces, por TI

$$x(t+T) \rightarrow y(t+T).$$

$\uparrow$ $\uparrow$

Estas son las mismas entradas

Por tanto, estas deben ser las mismas salidas, es decir, $y(t) = y(t+T)$.

SISTEMAS LINEALES O NO LINEALES

- Muchos sistemas son no lineales. Por ejemplo: muchos elementos de circuitos (ej., diodos), dinámica de aviones, modelos econométricos, etc.

- No obstante, en el presente curso nos centramos exclusivamente en los sistemas **lineales**.
- ¿Por qué?
  - Los modelos lineales describen representaciones precisas del comportamiento de muchos sistemas (ej., resistencias lineales, condensadores, otros ejemplos mencionados anteriormente, etc.)
  - Pueden linealizar modelos con el fin de examinar perturbaciones de "pequeña señal" alrededor de "puntos de funcionamiento"
  - Los sistemas lineales son manejables de forma analítica, facilitando bases para herramientas importantes y una considerable perspectiva.

LINEALIDAD

Un sistema (TC) es lineal si posee la propiedad de superposición:

Si $x_1(t) \rightarrow y_1(t)$ y $x_2(t) \rightarrow y_2(t)$

entonces $ax_1(t) + bx_2(t) \rightarrow ay_1(t) + by_2(t)$

$\mathrm{y}[n] = x^2[n]$ No lineal, TI, causal

$y(t) = x(2t)$ Lineal, no TI, no causal

¿Puede encontrar sistemas con otras combinaciones?

- ej. Lineal, TI, no causal
  Lineal, no TI, causal

PROPIEDADES DE LOS SISTEMAS LINEALES

- Superposición

Si $$x_k[n] \longrightarrow y_k[n]$$

Entonces $$\sum_k a_k x_k[n] \longrightarrow \sum_k a_k y_k[n]$$

- Para sistemas lineales, entrada cero $\rightarrow$ salida cero

"Prueba" $$0 \quad 0 \quad x[n] \rightarrow 0 \cdot y[n] \quad 0$$

Propiedades de sistemas lineales (continuación)

- Un sistema lineal es causal únicamente si satisface la condición de <u>reposo inicial</u>:

$$x(t) = 0 \text{ for } t \leq t_0 \rightarrow y(t) = 0 \text{ for } t \leq t_0 \ (*).$$

“Prueba”

a) Suponga que un sistema es causal. Demuestre que se mantiene (*).

b) Suponga que se mantiene (*). Demuestre que el sistema es causal.

SISTEMAS INVARIANTES EN EL TIEMPO (LTI)

- Een ellos se centra la mayor parte de este curso

  - Importancia práctica (Ej. 1-3 anterior a esta clase. Todos los sistemas LTI).

  - Las poderosas herramientas de análisis asociadas a los sistemas LTI.

- Un dato básico: conocer la respuesta de un sistema LTI a algunas entradas, nos permitirá, de hecho, saber la respuesta a ***muchas*** de ellas.

Ejemplo: **Sistema LTI en tiempo discreto (TD)**