

Señales y sistemas

Otoño 2003

Clase 13

21 de diciembre 2003

1. Concepto y representación del muestreo periódico de una señal en tiempo continuo.
2. Análisis y muestreo en el dominio de la frecuencia.
3. El teorema de muestreo — frecuencia de Nyquist.
4. En el dominio del tiempo: interpolación.
5. Undersampling (o submuestreo) y aliasing (o enmascaramiento).

MUESTREO

Vivimos en un mundo de tiempo continuo: la mayoría de las señales que nos encontramos son señales de tiempo continuo; por ejemplo, $x(t)$. ¿Cómo las convertimos en señales de tiempo discreto $x[n]$?

— Muestreo, tomando instantáneas de $x(t)$ cada T segundos.

T – periodo de muestreo

$x[n] \equiv x(nT)$, $n = \dots, -1, 0, 1, 2, \dots$ — muestras espaciadas a intervalos regulares

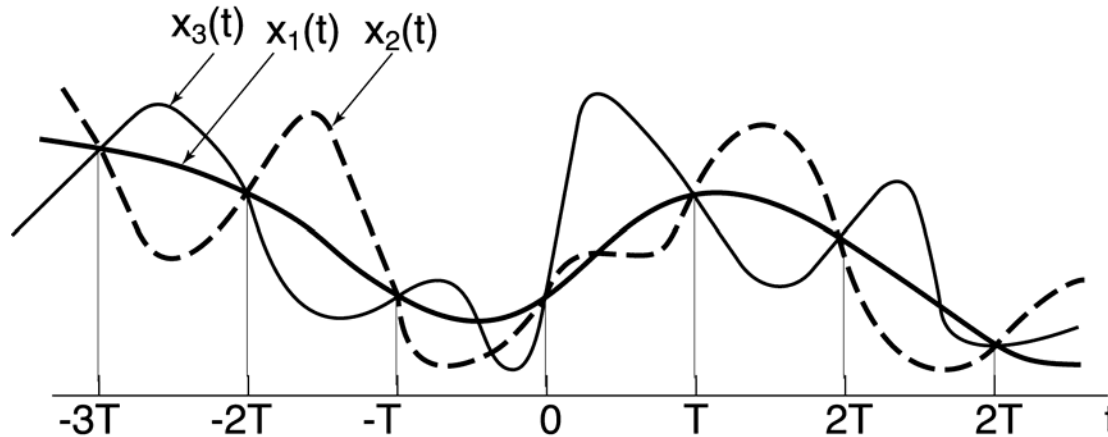
Aplicaciones y ejemplos

- Procesamiento digital de señales
- Estrobo
- Imágenes en periódicos
- Osciloscopio de muestreo
- ...

¿Cómo se realiza un muestreo?

¿Por qué, o cuándo, se considera adecuado un conjunto de muestras?

- Observación: *Muchas* señales tienen las mismas muestras

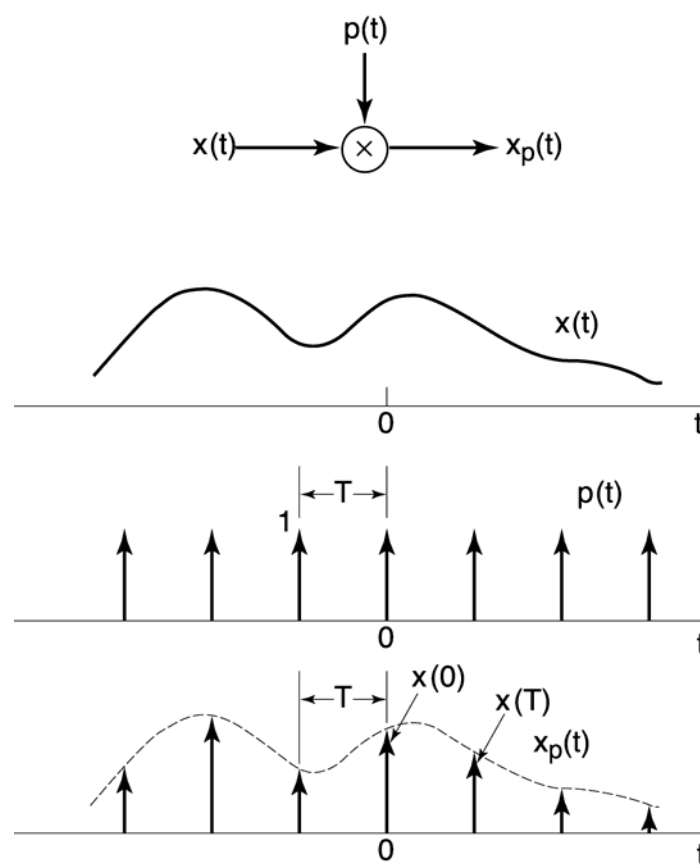


- Las técnicas de muestreo dejan de lado mucha información
– se pierden todos los valores de $x(t)$ entre los puntos de muestreo.
- **Cuestiones clave para el muestreo:**
¿Bajo qué condiciones podemos **reconstruir** la señal original $x(t)$ en tiempo continuo a partir de sus muestras?

Muestreo de impulsos — multiplicando $x(t)$ por la función de muestreo

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

$$x_p(t) = x(t)p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT)$$



Análisis del muestreo en el dominio de la frecuencia

$$x_p(t) = x(t) \cdot p(t)$$

Multiplication Property $\Rightarrow X_p(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * P(j\omega)$
(Propiedad de multiplicación)

$$P(j\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s)$$

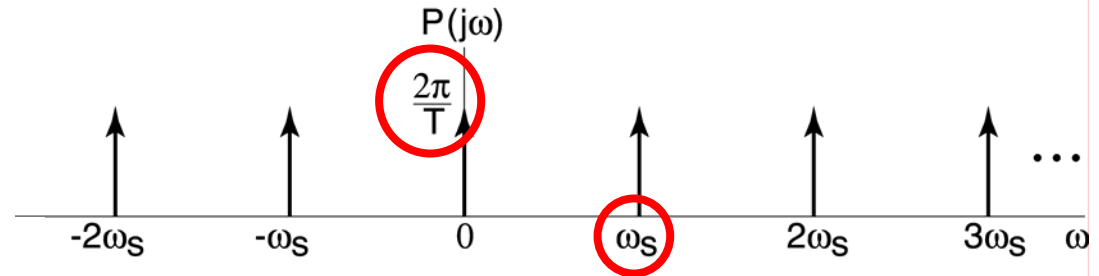
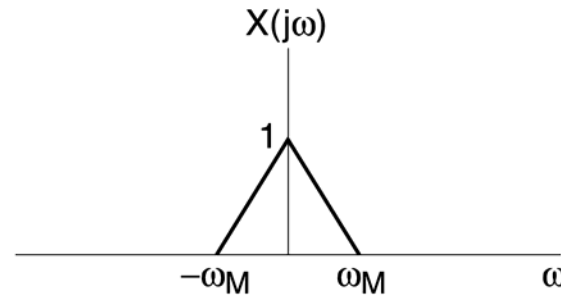
$$\omega_s = \frac{2\pi}{T} = \text{Sampling Frequency}$$

(Frecuencia de muestreo)

Importante tener en
cuenta: $\omega_s \propto 1/T$

$$\begin{aligned} X_p(j\omega) &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j\omega) * \delta(\omega - k\omega_s) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k\omega_s)) \end{aligned}$$

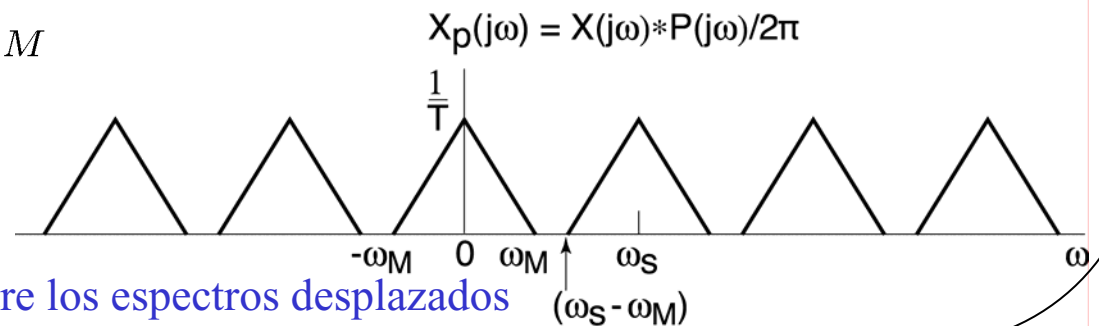
Ilustración del muestreo en el dominio de la frecuencia para una señal de banda limitada ($X(j\omega)=0$ para $|\omega|>\omega_M$)



$X_p(j\omega)$ drawn assuming
((...)) trazado suponiendo que)

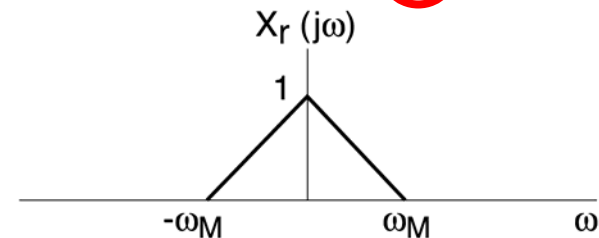
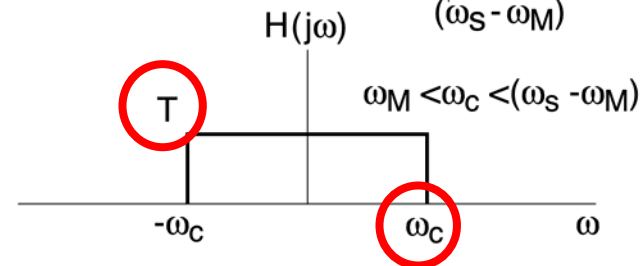
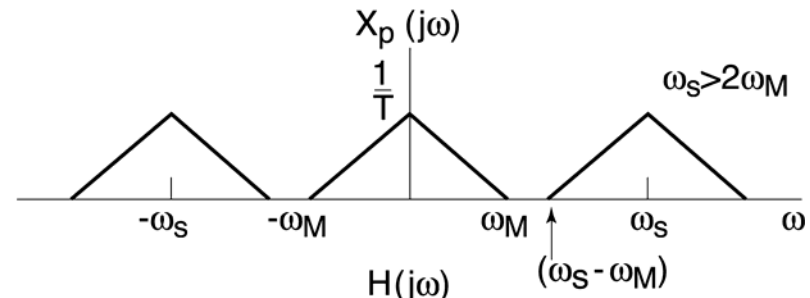
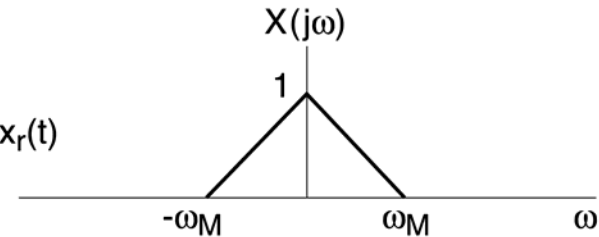
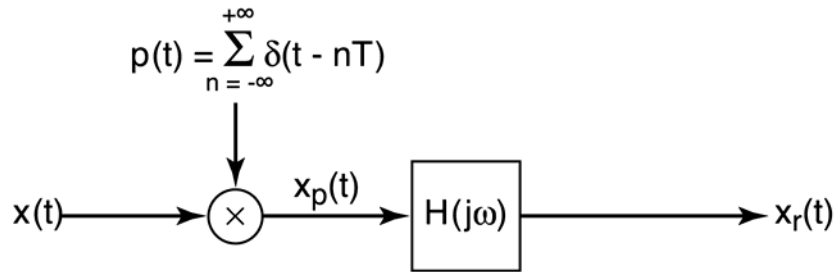
$$\omega_s - \omega_M > \omega_M$$

i.e. $\omega_s > 2\omega_M$



No hay superposición entre los espectros desplazados

Reconstrucción de $x(t)$ a partir de señales muestreadas



Si no hay superposición entre los espectros desplazados, un LPF puede reproducir $x(t)$ a partir de $x_p(t)$

El teorema de muestreo

Suponga que $x(t)$ es de banda limitada, por lo que

$$X(j\omega) = 0 \quad \text{for } |\omega| > \omega_M$$

Por tanto $x(t)$ está determinado exclusivamente por sus muestras $\{x(nT)\}$ si

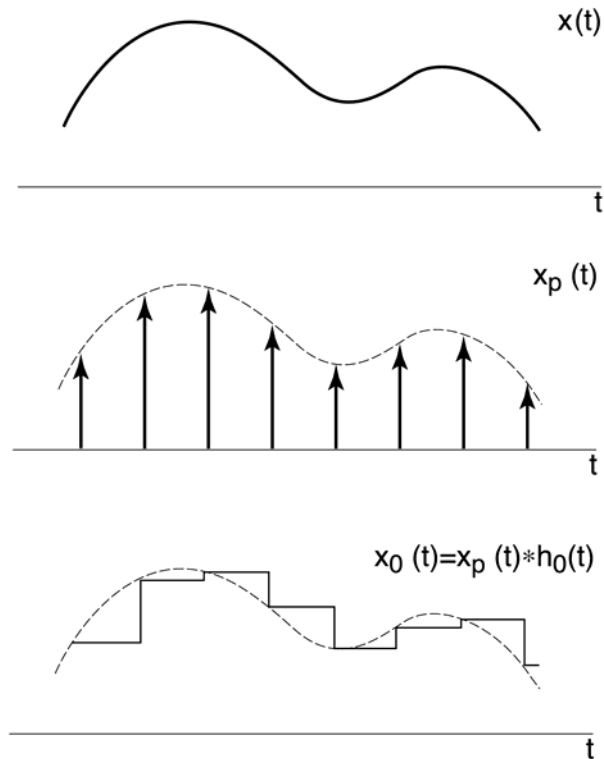
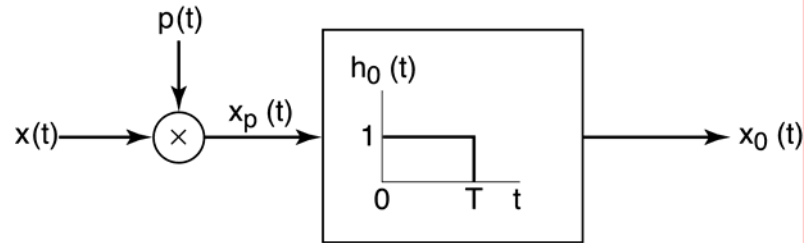
$$\omega_s > 2\omega_M = \text{The Nyquist rate} \\ \text{(Frecuencia de Nyquist)}$$

where $\omega_s = 2\pi/T$
(donde)

Observaciones sobre el muestreo

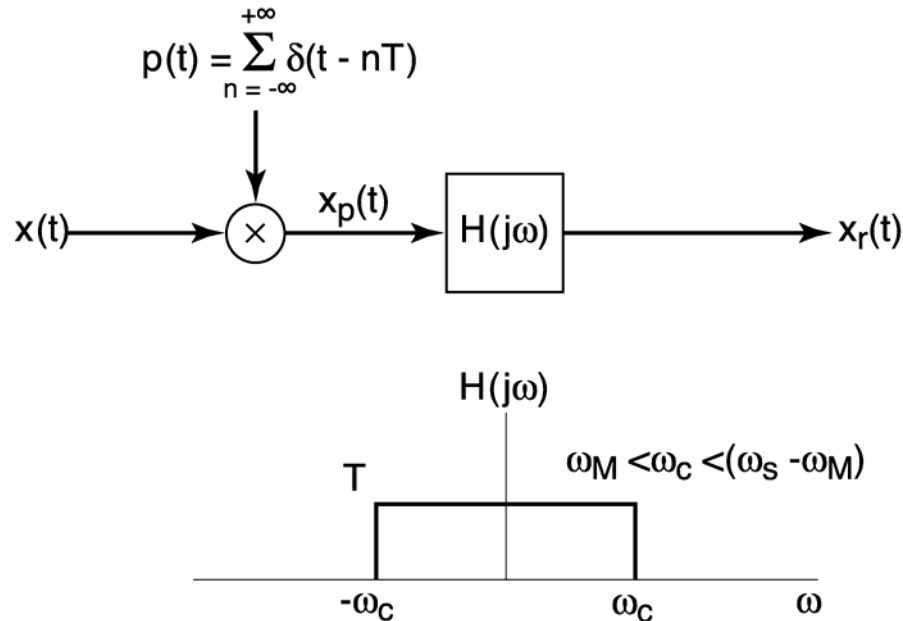
(1) En la práctica, lógicamente no muestreamos impulsos ni implementamos filtros de paso bajo ideales.

— Un ejemplo práctico:
El retenedor de orden cero



Observaciones (continuación)

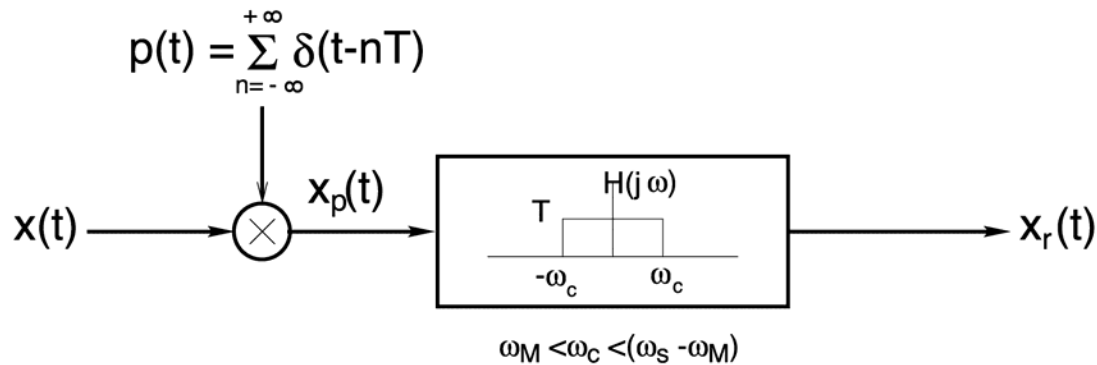
- (2) El muestreo es, fundamentalmente, una operación *intermitente*, ya que multiplicamos $x(t)$ por la función intermitente $p(t)$. Sin embargo,



es el sistema de identidad (que es invariante en el tiempo, *TI*) para $x(t)$ de banda limitada que cumple el teorema de muestreo ($\omega_s > 2\omega_M$).

- (3) ¿Qué ocurre si $\omega_s \leq 2\omega_M$? Algunas diferencias que veremos más adelante.

Interpretación del dominio del tiempo de la reconstrucción de señales muestreadas — Interpolación de banda limitada

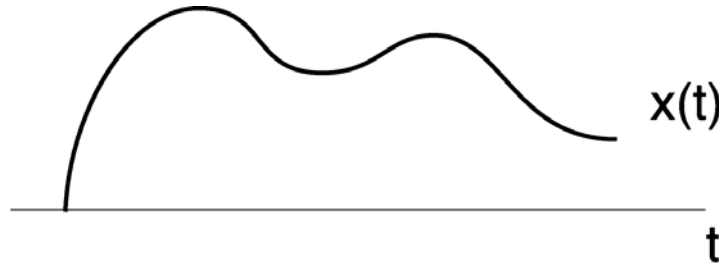


$$\begin{aligned}
 x_r(t) &= x_p(t) * h(t) \quad , \quad \text{where } h(t) = \frac{T \sin \omega_c t}{\pi t} \\
 &\quad \text{(donde)} \\
 &= \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \delta(t - nT) \right) * h(t) \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) h(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \frac{T \sin[\omega_c(t - nT)]}{\pi(t - nT)}
 \end{aligned}$$

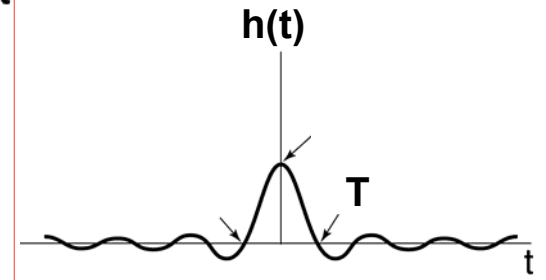
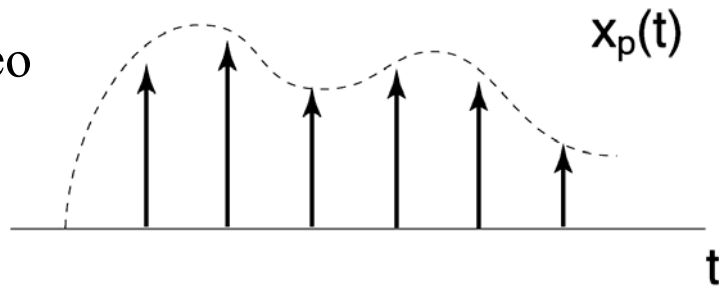
El filtro de paso bajo interpola las muestras *suponiendo* que $x(t)$ no contenga energía a frecuencias $\geq \omega_c$

Ilustración gráfica de la interpolación del dominio del tiempo

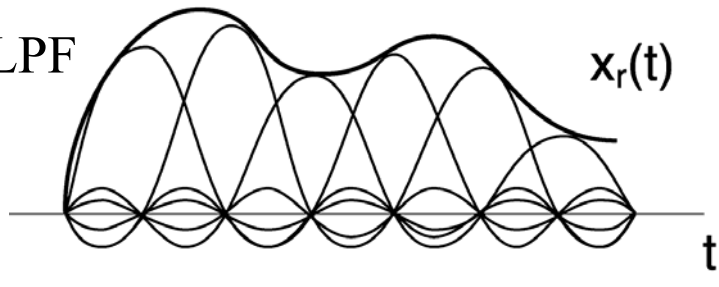
Señal de tiempo continuo original



Después del muestreo

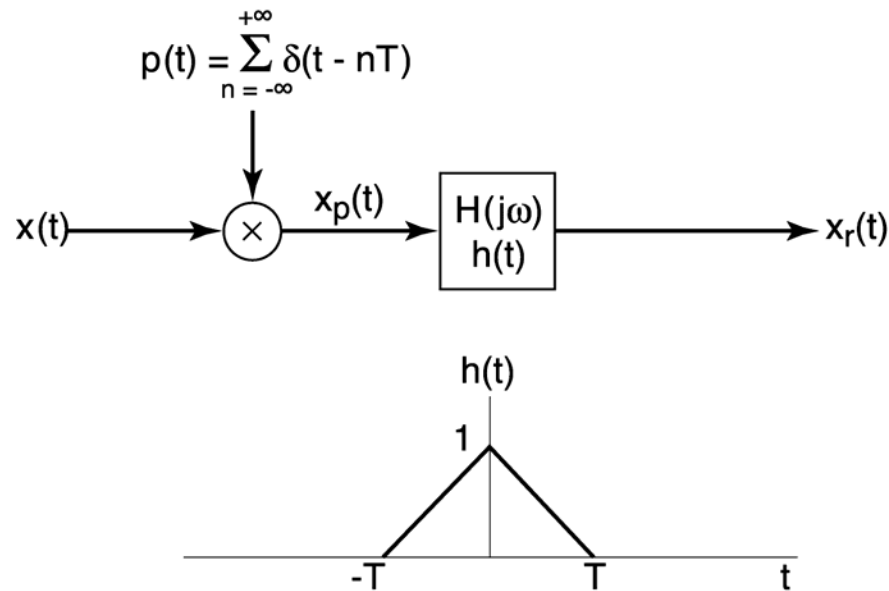
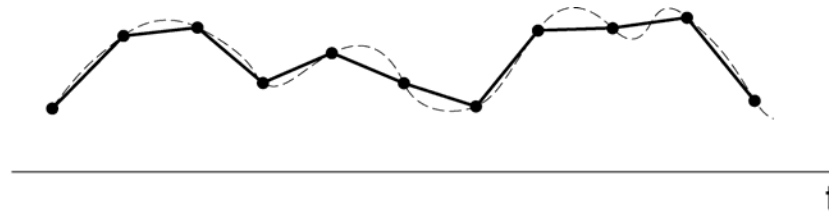


Después de pasar el LPF



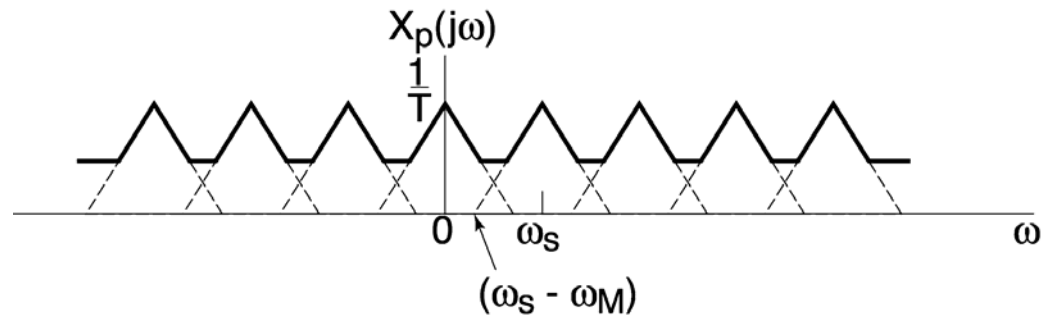
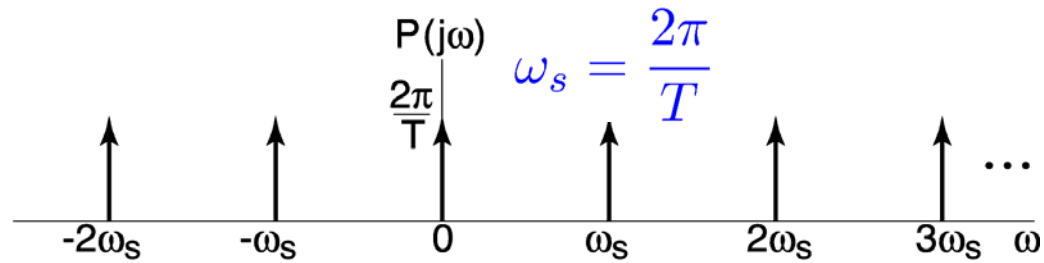
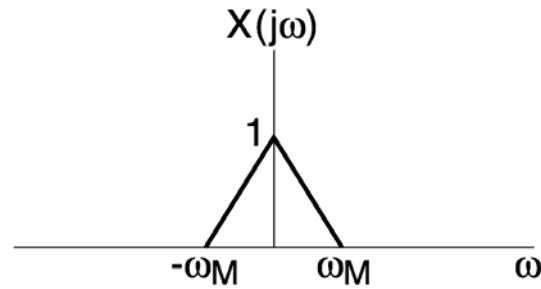
Métodos de interpolación

- Interpolación de banda limitada
- Retenedor de orden cero
- Retenedor de primer orden — Interpolación lineal

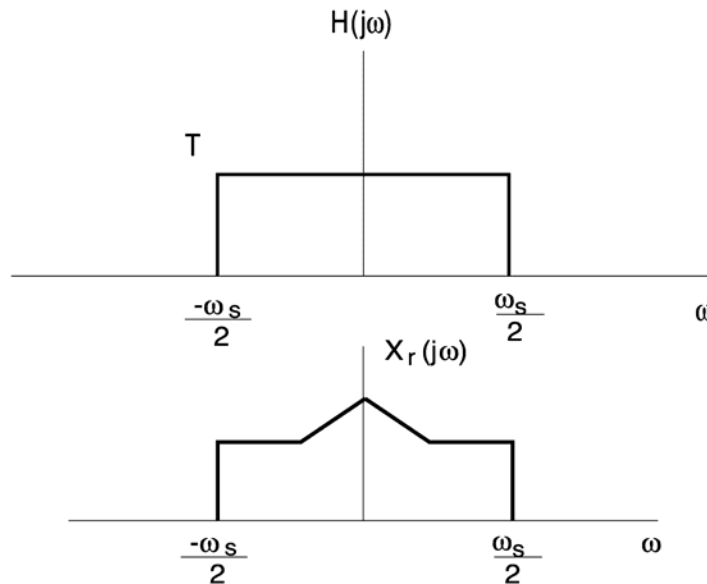
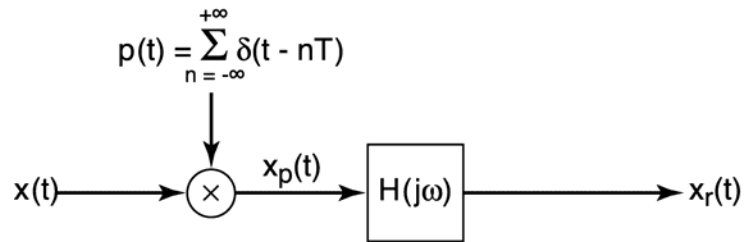


Undersampling y Aliasing

Cuando $\omega_s \leq 2 \omega_M \Rightarrow$ Undersampling



Undersampling y Aliasing (continuación)

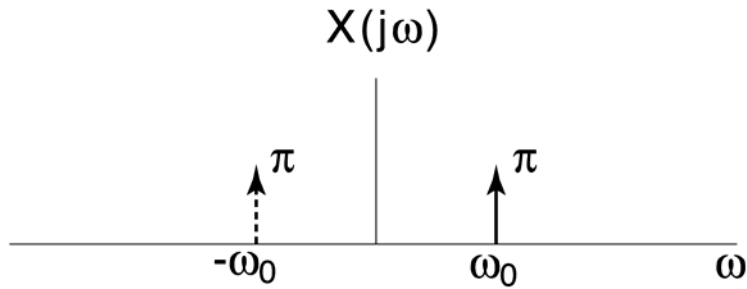


$X_r(j\omega) \neq X(j\omega)$
Distorsión debida
al *aliasing*

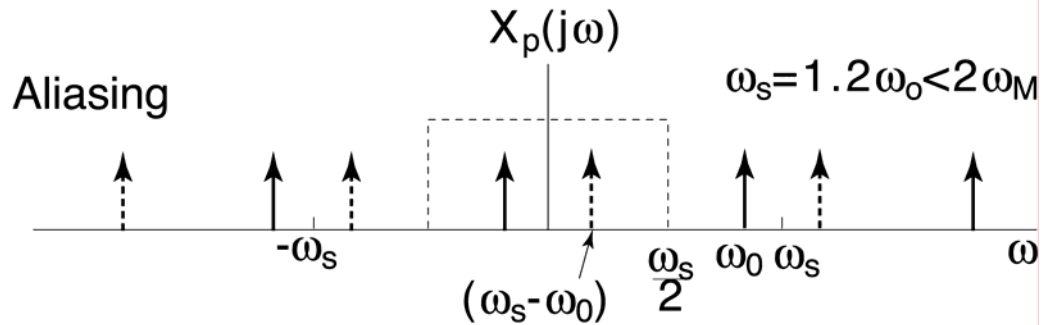
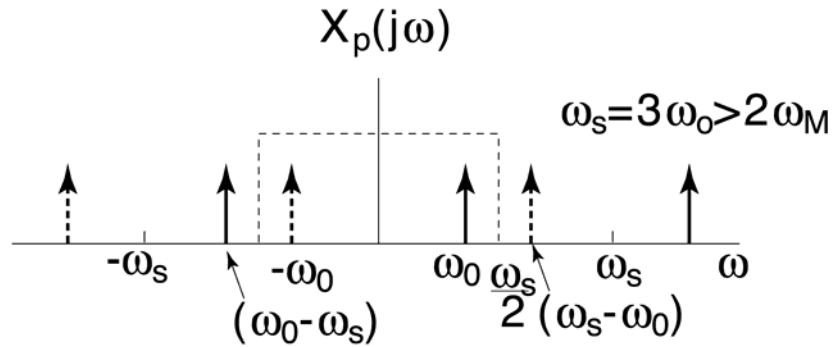
- Las frecuencias superiores de $x(t)$ se "pliegan" y toman los "alias" de las frecuencias inferiores.
- Observe que el tiempo de muestreo, $x_r(nT) = x(nT)$

Un ejemplo sencillo

$$x(t) = \cos(\omega_0 t + \phi)$$



La imagen se modificaría...



Demo: muestreo y reconstrucción de $\cos \omega_0 t$