INSTITUTO TECNOLÓGICO DE MASSACHUSETTS
Departamento de Ingeniería Eléctrica e Informática

6.003: Señales y sistemas — Otoño 2003

Soluciones del boletín de problemas 7

Ejercicio para el estudio en casa

O&W, 7.28

(a) Si utilizamos los coeficientes de las series de Fourier de $x(t)$, podemos escribir lo siguiente:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{|k|} e^{jkw_0 t},$$

donde,

$$w_0 = \frac{2\pi}{0.1 \text{ sec}} = 20\pi \text{ rad/seg.}$$

El filtro de paso bajo $H(jw)$ tiene una frecuencia de corte $w_c = 205\pi$ rad/seg. Así, $x_c(t)$ es $x(t)$ donde todos los términos con la frecuencia anterior w_c son eliminados por el filtro de paso bajo. Los términos que se mantienen tienen $|kw_0| \leq 205\pi$ rad/seg $\Longrightarrow |k| \leq 10.25$, por lo que la salida, $x_c(t)$, es:

$$x_c(t) = \sum_{k=-10}^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{|k|} e^{jkw_0 t}$$

Para obtener $x[n]$, muestreamos $x_c(t)$ cada $T = 5 \times 10^{-3}$ segundos con un tren de impulsos. La frecuencia de muestreo es $\frac{2\pi}{T} = 400\pi = 2 \times$ frecuencia máxima en $x_c(t)$. Por lo tanto, podemos escribir lo siguiente:

$$\begin{aligned} x[n] &= x_c(nT) \\ &= \sum_{k=-10}^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{|k|} e^{jkw_0(nT)} \\ &= \sum_{k=-10}^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{|k|} e^{jkw_D n}, \quad \text{donde } w_D = w_0 T = 0.1\pi \text{ rad.} \end{aligned} \tag{1}$$

Observe que todos los exponenciales complejos en tiempo discreto $e^{jkw_D n}$ son periódicos con periodo $N = 2\pi/w_D = 20$ (aunque N no es el periodo fundamental de todos ellos). Por lo tanto, $x[n]$ también debe ser periódico con periodo $N = 20$.

(b) Para hallar la representación de las series de Fourier para $x[n]$, rescribimos la ecuación (1) en la forma de una ecuación de síntesis de las series de Fourier:

$$\sum_{k=-10}^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{|k|} e^{jkw_D n} \;=\; \sum_{k=<20>} a_k e^{jkw_D n} \qquad (2)$$

Observe que hay 21 términos $(k = -10...10)$ en el lado izquierdo de la ecuación (2), pero sólo 20 en las series de Fourier del lado derecho (ya que $x[n]$ es periódico con $N = 20$).
Si examinamos los términos $k = 10$ y $k = -10$:

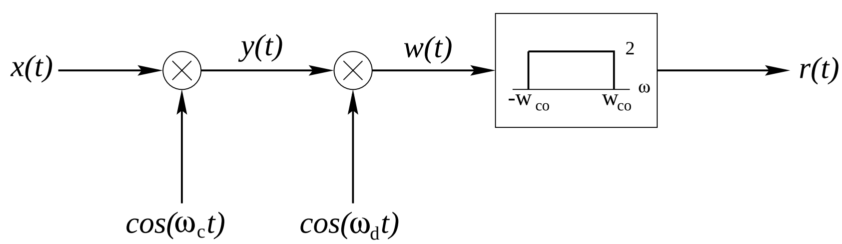
$$\begin{aligned} k = 10: &\quad \left(\tfrac{1}{2}\right)^{10} e^{j10(0.1\pi)n} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{10} (e^{j\pi})^n = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{10} (-1)^n \\ k = -10: &\quad \left(\tfrac{1}{2}\right)^{10} e^{j(-10)(0.1\pi)n} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{10} (e^{-j\pi})^n = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{10} (-1)^n \end{aligned}$$

Podemos añadir estos dos términos ya que suponen el mismo exponencial complejo, $(-1)^n$.
Ahora ya tenemos el conjunto completo de los coeficientes de las series de Fourier para $x[n]$.
Los coeficientes son periódicos con periodo $N = 20$, y por encima del periodo $-9 \le k \le 10$ tienen valores:

$$a_k \;=\; \begin{cases} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{|k|}, & |k| \le 9 \\ 2\left(\tfrac{1}{2}\right)^{10}, & k = 10. \end{cases}$$

O&W, 8.23

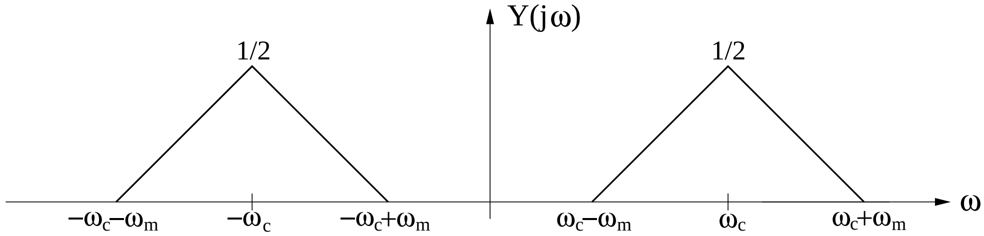
(a) El diagrama de bloques de la modulación y la demodulación para este problema es el siguiente:



Queremos mostrar que la salida del filtro de paso bajo en el demodulador es proporcional a $x(t)\cos(\Delta\omega t)$, donde $\Delta\omega = \omega_d - \omega_c$ y lo hacemos algebraica y gráficamente para el ejemplo de la figura P8.23. $y(t)$ es simplemente $x(t)$ multiplicado por $\cos(\omega_c t)$. Si utilizamos la propiedad de multiplicación, $Y(j\omega)$ consiste en dos copias desplazadas de $X(j\omega)$, centradas en $\omega = \omega_c$ y $\omega = -\omega_c$, con amplitud a escala de $1/2$:

$$Y(j\omega) \;=\; \frac{1}{2}\left[X(j(\omega - \omega_c)) + X(j(\omega + \omega_c))\right]$$

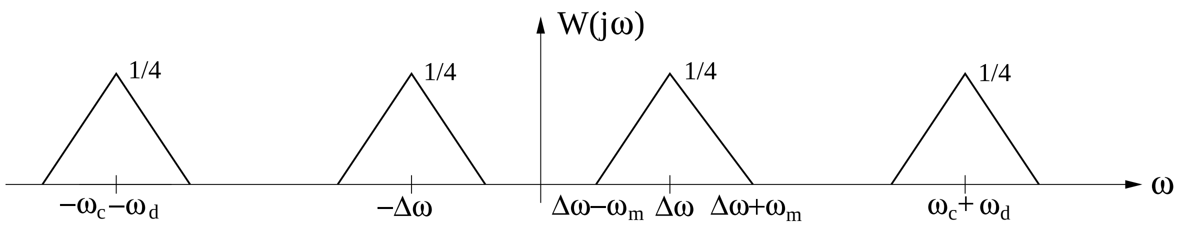
$Y(j\omega)$ se dibuja a continuación:



Igualmente, $W(j\omega)$ consistirá en dos copias desplazadas y a escala de $Y(j\omega)$:

$$\begin{aligned}
W(j\omega) &= \frac{1}{2}\left[Y(j(\omega-\omega_d))+Y(j(\omega+\omega_d))\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[X(j(\omega-\omega_d-\omega_c))+X(j(\omega-\omega_d+\omega_c))+X(j(\omega+\omega_d-\omega_c))\right. \\
&\quad \left.+X(j(\omega+\omega_d+\omega_c))\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[X(j(\omega-\omega_c-\omega_d))+X(j(\omega-\Delta\omega))+X(j(\omega+\Delta\omega))+X(j(\omega+\omega_c+\omega_d))\right]
\end{aligned}$$

Si suponemos que las dos copias que están centradas en $\Delta\omega$ y $-\Delta\omega$ no se superponen, $W(j\omega)$ será algo parecido a lo siguiente:



Por último, $R(j\omega)$ es $W(j\omega)$ al pasar a través de un filtro de paso bajo con frecuencia de corte entre $\omega_m+\Delta\omega$ y $2w_c+\Delta w-w_m=\omega_c+\omega_d-\omega_m$. Este proceso de filtrado elimina el contenido de alta frecuencia de $W(j\omega)$ de forma que sólo permanecen los dos triángulos a bajas frecuencias.
Las amplitudes tienen una escala de 2, puesto que la ganancia del filtro de paso bajo es 2. Por lo tanto, $R(j\omega)$, que es la salida del modulador será:

$$R(j\omega) = \frac{1}{2}\left[X(j(\omega-\Delta\omega))+X(j(\omega+\Delta\omega))\right]$$

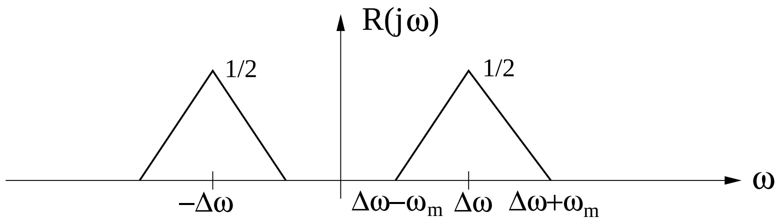
que en el dominio del tiempo nos proporciona:

$$r(t)=x(t)\cos(\Delta\omega t)$$

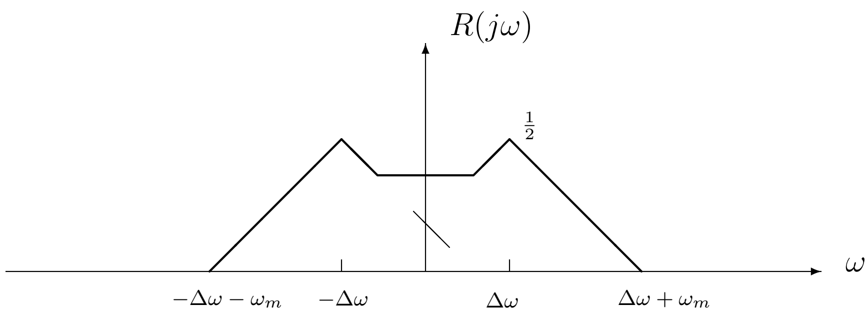
(b) Por el apartado (a), el espectro de la salida del demodulador será:

$$R(j\omega) = \frac{1}{2}\left[X(j(\omega-\Delta\omega))+X(j(\omega+\Delta\omega))\right]$$

Si las dos copias de $X(j\omega)$ no se superponen, como se muestra en las figuras anteriores, éste será parecido a:

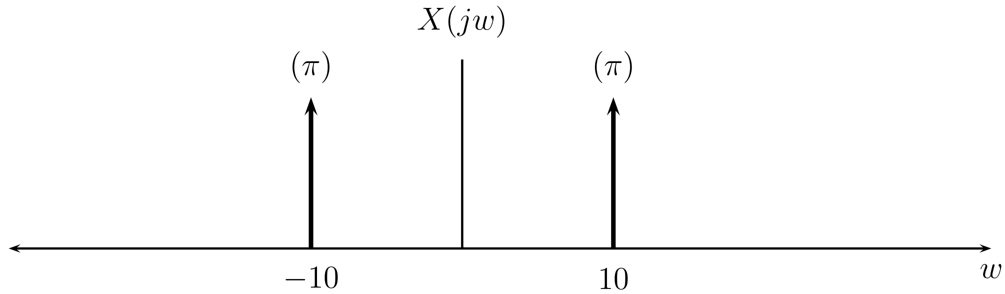


Esto sucederá si $\Delta\omega \geq \omega_M$. De no ser así, las dos copias se solaparán y la salida será más parecida a:

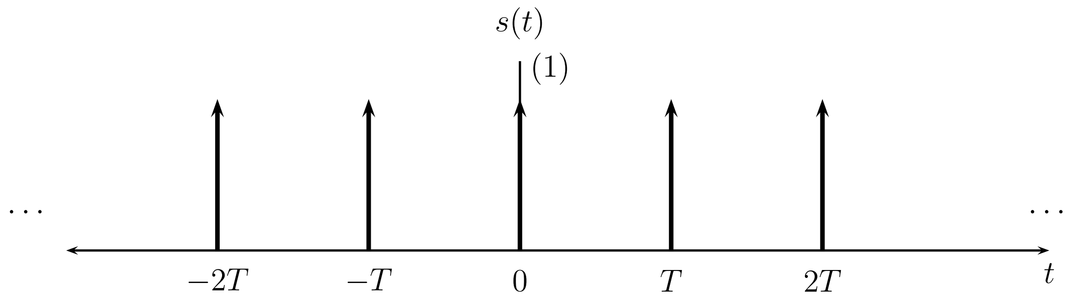


Problema 1

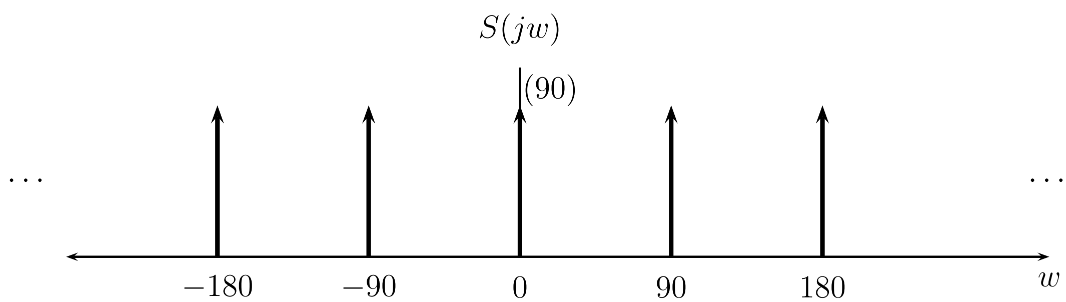
(a) Tenemos que $x(t) = \cos(10t)$. Aquí, $\omega_o = 10$ rad/seg. Si tomamos la transformada de Fourier de $x(t)$,



La función de muestreo, $s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$, con $T = \frac{2\pi}{90}$.



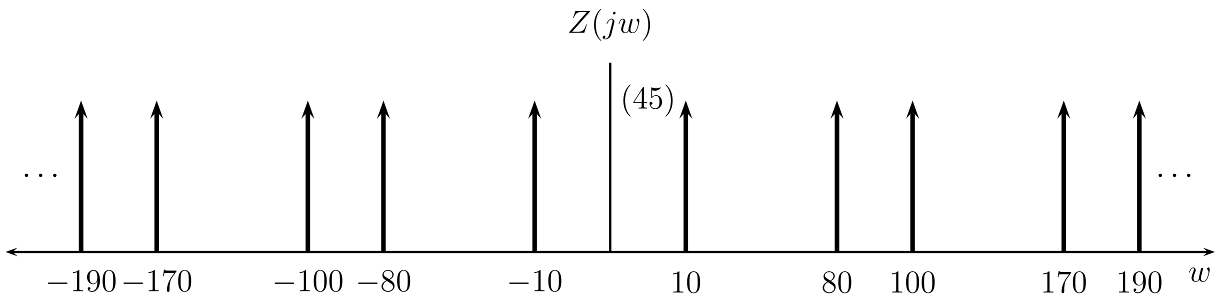
Si tomamos la TF de $s(t)$ (observe que $\omega_s = \frac{2\pi}{T} = 90$),



Si utilizamos la propiedad de la multiplicación, $z(t) = x(t)s(t)$ en el dominio de frecuencia es $Z(jw) = \frac{1}{2\pi}\left(X(jw) * S(jw)\right)$, es decir, tenemos que convolucionar $X(jw)$ con el tren de impulsos periódico en $S(jw)$ y trazar la amplitud a escala de $\frac{1}{2\pi}$ (véase la sección 7.1.1 de O&W).

$$
\begin{aligned}
z(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\delta(t - nT) \\
Z(jw) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\theta)S(j(w-\theta))d\theta
\end{aligned}
$$

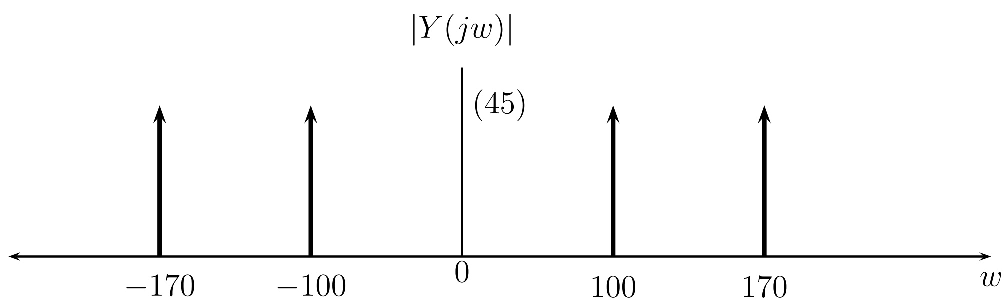
Por lo tanto, $Z(jw)$ tiene la forma siguiente:



(b) $y(t)$ es la salida del filtro de paso de banda, $H(jw)$, con entrada $z(t)$ tal como se obtuvo en el apartado (a). Sabemos que:

$$Y(jw) = H(jw)Z(jw)$$

Consideremos $|Y(jw)|$ y $\angle Y(jw)$ independientemente. $|Y(jw)|$ es la versión filtrada en un filtro de paso de banda de $|Z(jw)|$ con componentes de frecuencia entre 90 y 180, y -180 y -90 $\mathrm{rad}/$seg.

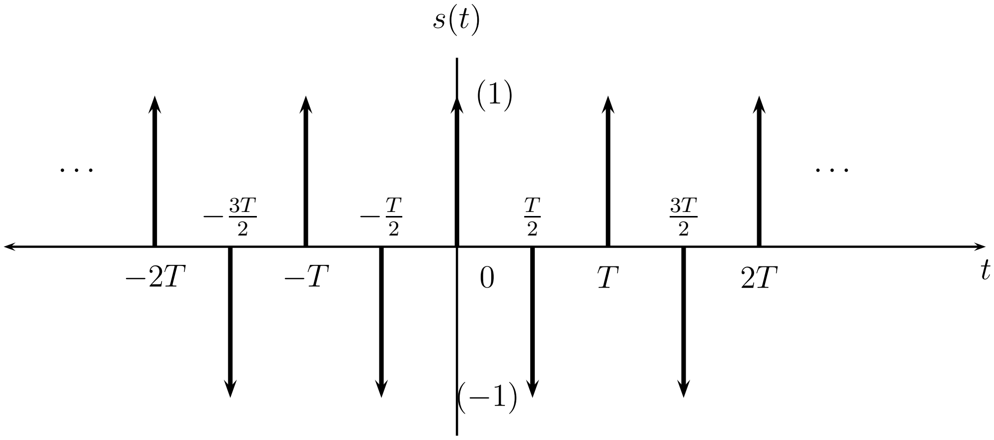


$$\begin{aligned}\angle Y(jw) &= \angle H(jw) + \angle Z(jw) \\ &= -\frac{\pi w}{200} + 0 = -\frac{\pi w}{200}\end{aligned}$$

Si combinamos la magnitud y el ángulo, $Y(jw) = |Y(jw)|\mathrm{e}^{j\angle Y(jw)}$.
Considere $Y(jw)$ como la transformada de Fourier de la suma de las dos señales sinusoidales; una con $w_o = 100$ y la otra con $w_o = 170$. Si utilizamos la propiedad de desplazamiento de tiempo de la transformada de Fourier, $x(t - t_o) \stackrel{\mathcal{FT}}{\longleftrightarrow} \mathrm{e}^{-jwt_o}X(jw)$,

$$\begin{aligned}y(t) &= \frac{45}{\pi}\cos(100(t - \frac{\pi}{200})) + \frac{45}{\pi}\cos(170(t - \frac{\pi}{200})) \\ &= \frac{45}{\pi}\cos(100t - \frac{\pi}{2}) + \frac{45}{\pi}\cos(170t - \frac{17\pi}{20})\end{aligned}$$

(c) A continuación se cambia la función de muestreo de $s(t)$ ~~por~~ $T = \frac{2\pi}{90}$,



$$s(t) \;=\; \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT-\frac{T}{2})$$

Si tomamos la transformada de Fourier:

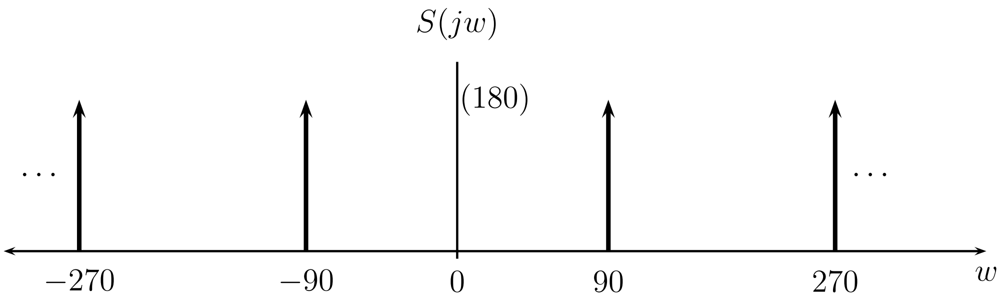
$$\begin{aligned} S(jw) &= \frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(w-k\frac{2\pi}{T}) - \frac{2\pi}{T}e^{-jw\frac{T}{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(w-k\frac{2\pi}{T}) \\ &= \frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(w-k\frac{2\pi}{T}) - \frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-jk\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2}}\delta(w-k\frac{2\pi}{T}) \\ &= \frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(w-k\frac{2\pi}{T}) - \frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} (e^{-j\pi})^k\delta(w-k\frac{2\pi}{T}) \\ &= \frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(w-k\frac{2\pi}{T}) - \frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k\delta(w-k\frac{2\pi}{T}) \end{aligned}$$

Si separamos los términos impares y pares de k:

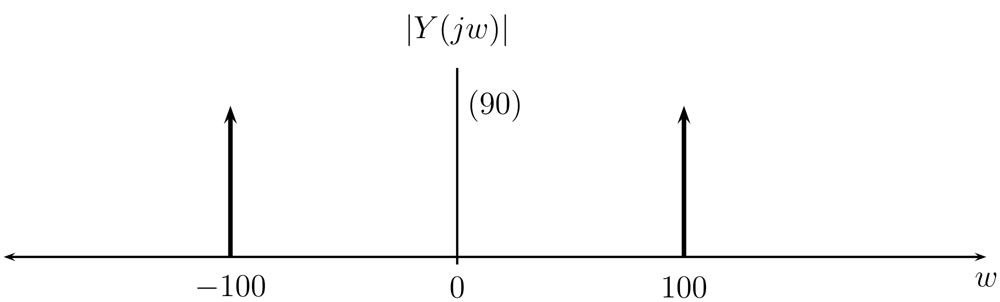
$$\begin{aligned} S(jw) &= \frac{2\pi}{T}\sum_{k=even} \delta(w-k\frac{2\pi}{T}) - \frac{2\pi}{T}\sum_{k=even} \delta(w-k\frac{2\pi}{T}) \\ &\quad +\frac{2\pi}{T}\sum_{k=odd} \delta(w-k\frac{2\pi}{T}) + \frac{2\pi}{T}\sum_{k=odd} \delta(w-k\frac{2\pi}{T}) \\ &= \frac{4\pi}{T}\sum_{k=odd} \delta(w-k\frac{2\pi}{T}) \end{aligned}$$

$x(t) = \cos(10t)$ como anteriormente. Para hallar $Z(jw)$, tenemos que convolucionar $X(jw)$ con el tren de impulsos en $S(jw)$ y trazar a escala de $\frac{1}{2\pi}$. el resultado.

$S(jw)$ se dibuja tal como se indica a continuación:



La convolución centrará los dos impulsos escalados (de $X(jw)$) en cada impulso del tren de impulsos de $S(jw)$. Por último, $H(jw)$ solamente pasarán aquellos impulsos que existan entre 90 y 180, y entre -180 y -90 radianes. Trazamos $|Y(jw)|$ (salida de $H(jw)$) de la forma siguiente:



Como se obtuvo en (b), $\angle Y(jw) = \angle H(jw) = -\frac{\pi w}{200}$.
A partir del diagrama de $|Y(jw)|$ y de $\angle Y(jw)$, podemos ver $y(t)$ como funciones de coseno con desplazamiento en el tiempo. Por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \frac{90}{\pi}\cos(100(t-\frac{\pi}{200})) \\
&= \frac{90}{\pi}\cos(100t-\frac{\pi}{2})
\end{aligned}
$$

Problema 2 (O&W, 7.30 excepto que $x_c(t) = \delta(t - \frac{T}{2})$)

(a) Tenemos que $x_c(t)$

$$\begin{aligned} x_c(t) &= \delta(t - \frac{T}{2}) \\ X_c(jw) &= \mathrm{e}^{-jw\frac{T}{2}} \end{aligned}$$

Tomamos la transformada de Fourier de la ecuación diferencial del sistema y hallamos la respuesta de frecuencia, $H(jw)$, del sistema:

$$\begin{aligned} \frac{dy_c(t)}{dt} + y_c(t) &= x_c(t) \\ jwY_c(jw) + Y_c(jw) &= X_c(jw) \\ H(jw) = \frac{Y_c(jw)}{X_c(jw)} &= \frac{1}{1+jw} \end{aligned}$$

Ahora, podemos escribir lo siguiente:

$$\begin{aligned} Y_c(jw) &= X_c(jw)H(jw) = \mathrm{e}^{-jw\frac{T}{2}}\frac{1}{1+jw} \\ y_c(t) &= e^{-(t-\frac{T}{2})}u(t - \frac{T}{2}) \end{aligned}$$

(b) $y[n] = y_c(nT)$ donde $y_c(t)$ se define en el apartado (a). Por lo tanto, $y_c(nT)$ tomará los valores de $y_c(t)$ en nT valores de tiempo con $n = 0, 1, 2, ...$

$$\begin{aligned} y[n] = y_c(nT) &= e^{-nT+\frac{T}{2}}u[n-1] \\ &= (e^{\frac{T}{2}})(e^{-T})(e^{-T})^{n-1}u[n-1] \end{aligned}$$

Si utilizamos la propiedad de desplazamiento de tiempo y la tabla básica de la TF en tiempo discreto:

$$Y(e^{jw}) = e^{-\frac{T}{2}}e^{-jw}\frac{1}{1-e^{-T}e^{-jw}}$$

Ahora seleccionamos $H(e^{jw})$ de forma que:

$$\begin{aligned} y[n] * h[n] &= w[n] = \delta[n] \\ Y(e^{jw})H(e^{jw}) &= 1 \\ H(e^{jw}) &= \frac{1}{e^{-\frac{T}{2}}e^{-jw}}(1 - e^{-T}e^{-jw}) \\ H(e^{jw}) &= e^{\frac{T}{2}}e^{jw} - e^{-\frac{T}{2}} \end{aligned}$$

Si tomamos la TF inversa:

$$h[n] = e^{\frac{T}{2}}\delta[n+1] - e^{-\frac{T}{2}}\delta[n]$$

Problema 3

Primero, tenemos que hallar la respuesta de frecuencia del filtro $y[n]=\frac{3}{4}y[n-2]+x[n]+\frac{1}{4}x[n-1]$ en tiempo discreto cuando $x[n]=\delta[n]$, $y[n]=h[n]$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
h[n] &= \frac{3}{4}h[n-2]+\delta[n]+\frac{1}{4}\delta[n-1] \\
H(e^{j\Omega}) &= \frac{3}{4}e^{-j2\Omega}H(e^{j\Omega})+1+\frac{1}{4}e^{-j\Omega} \\
H(e^{j\Omega}) &= \frac{1+\frac{1}{4}e^{-j\Omega}}{1-\frac{3}{4}e^{-j2\Omega}}, \quad |\Omega|<\pi
\end{aligned}$$

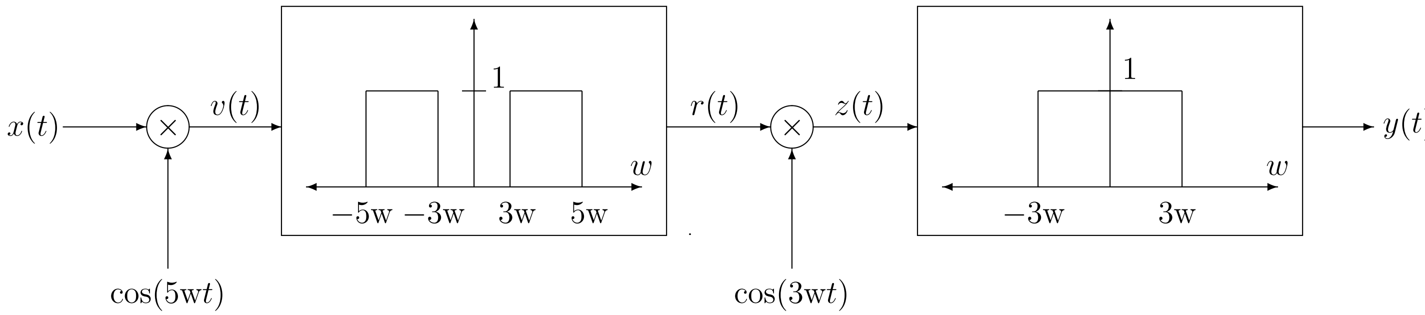
Tenemos que $X(j\omega)=0$ para $|\omega|\geq\frac{\pi}{T}$, también una frecuencia de muestreo, $\omega_s=\frac{2\pi}{T}$. Por lo tanto, no habrá aliasing.

Por tanto, la respuesta de frecuencia efectiva de todo el sistema en tiempo continuo, $H_c(jw)$, está relacionada con la respuesta de frecuencia del sistema en tiempo discreto, $H(e^{j\Omega})$, mediante (suponga que $\Omega=wT$ y halle el rango adecuado de w):

$$H_c(j\omega)=\begin{cases} H(e^{j\omega T}), & |w|\leq\frac{\pi}{T}=\frac{\omega_s}{2} \\ 0, & |w|>\frac{\pi}{T} \end{cases}$$

$$H_c(j\omega)=\begin{cases} \frac{1+\frac{1}{4}e^{-j\omega T}}{1-\frac{3}{4}e^{-j2\omega T}}, & |w|\leq\frac{\pi}{T}=\frac{\omega_s}{2} \\ 0, & |w|>\frac{\pi}{T} \end{cases}$$

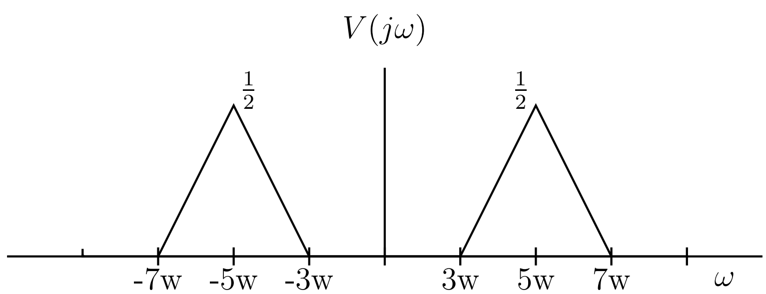
Problema 4, O&W, 8.22
Definamos $v(t), r(t)$ y $z(t)$ como se indica en el siguiente diagrama del sistema:.



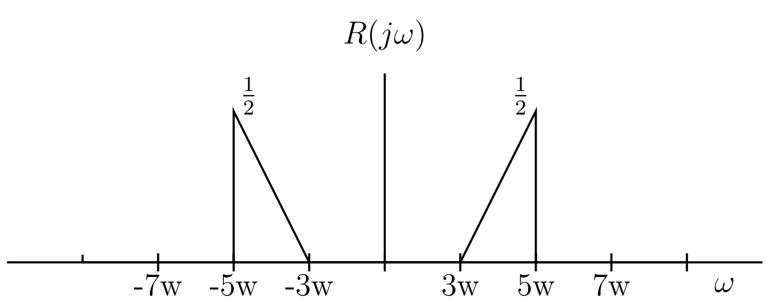
$v(t)$ es la salida de la modulación de amplitud sinusoidal. Para hallar $V(j\omega)$:

$$\begin{aligned} v(t) &= x(t)\cos(5\text{w}t) \\ V(j\omega) &= \frac{1}{2\pi}\left(X(j\omega) * \pi\left[\delta(\omega - 5\text{w}) + \delta(\omega + 5\text{w})\right]\right) \\ &= \frac{1}{2}\left[X(j(\omega - 5\text{w})) + X(j(\omega + 5\text{w}))\right] \end{aligned}$$

Gráficamente:

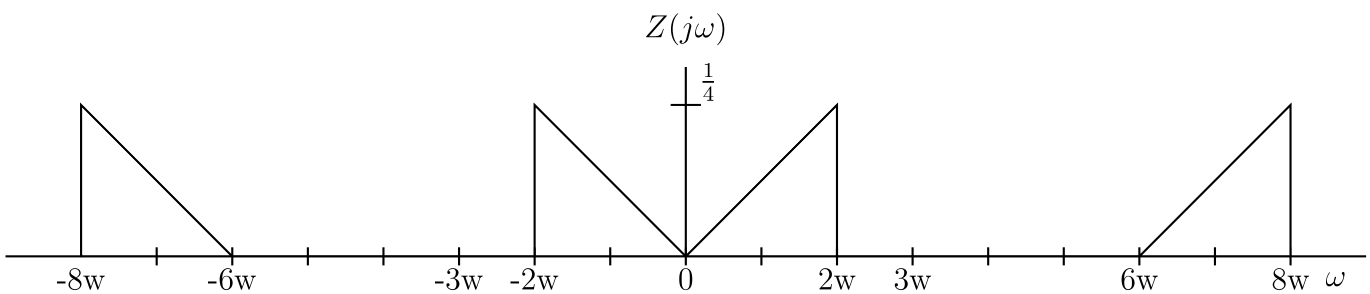


Para hallar $R(j\omega)$, observamos que por el filtro de paso de banda sólo pasan componentes de frecuencia con magnitud entre 3w y 5w,

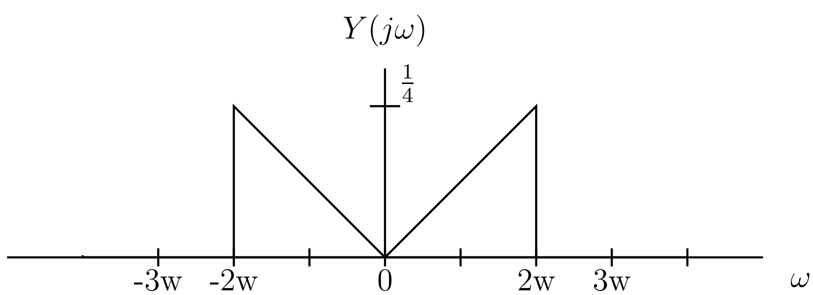


Ahora $z(t)$ es una demodulación de amplitud sinusoidal con una señal portadora de frecuencia distinta, $\cos(3\mathrm{w}t)$. Podemos derivar $Z(j\omega)$,

$$
\begin{aligned}
z(t) &= r(t)\cos(3\mathrm{w}t) \\
Z(j\omega) &= \frac{1}{2\pi}\left(R(j\omega) * \pi\left[\delta(\omega-3\mathrm{w})+\delta(\omega+3\mathrm{w})\right]\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[R(j(\omega-3\mathrm{w}))+R(j(\omega+3\mathrm{w}))\right]
\end{aligned}
$$



Por último, $y(t)$ es $z(t)$ filtrado por un filtro de paso bajo que sólo permite el paso de contenidos de frecuencia de $-3\mathrm{w}$ a $3\mathrm{w}$. Por lo tanto, $Y(j\omega)$ tiene la forma siguiente:

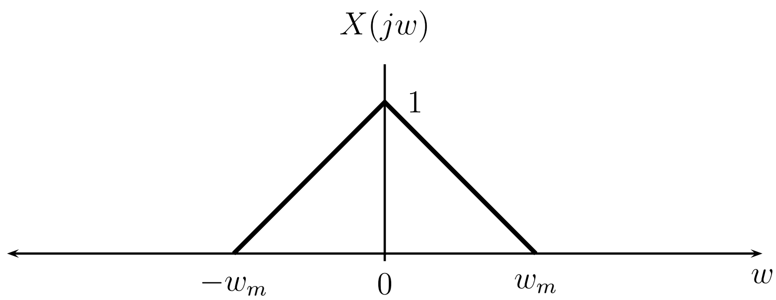


Problema 5 (O&W, 8.49)

(a) Supongamos que la frecuencia de la función de muestreo $s(t)$ es w_c. $s(t)$ es un tren de impulsos periódico con periodo T y anchura de impulsos, $\Delta = \frac{T}{2}$. Por tanto, $w_c = \frac{2\pi}{T}$ y podemos escribir los coeficientes de las series de Fourier, a_k, de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{\sin(kw_c\Delta/2)}{\pi k} \\ &= \frac{\sin(k(2\pi/T)(T/4))}{\pi k} \\ &= \frac{\sin(k\frac{\pi}{2})}{\pi k} \end{aligned}$$

a_k es un tren de muestra periódico con periodo w_c.
Imaginemos la señal de entrada, $x(t)$, con transformada de Fourier, $X(jw)$, como se indica aquí:



Definamos la entrada del filtro, $H_1(jw)$, como $z_1(t)$. Por lo tanto, $z_1(t) = x(t)s(t)$ y tal como se indicó en la sección 8.5.1, $Z_1(jw)$ es la convolución de $X(jw)$ con un tren de impulsos con un área a_k.

$$Z_1(jw) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k X(j(w - kw_c))$$

Para evitar el aliasing, tenemos que asegurarnos que $X(jw)$, centrado en kw_c en $Z_1(jw)$, no se superpone con otro. $w_c > 2w_m$ asegurará que no se den el aliasing o la superposición, es decir:

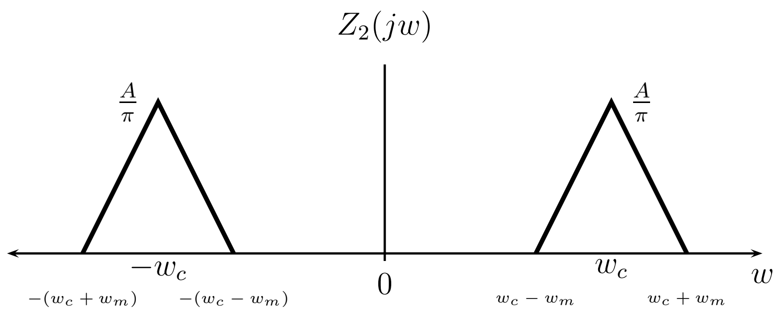
$$w_m < \frac{w_c}{2}$$

el valor *w* más alto permitido: $w_m = \frac{2\pi}{T}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{T}$

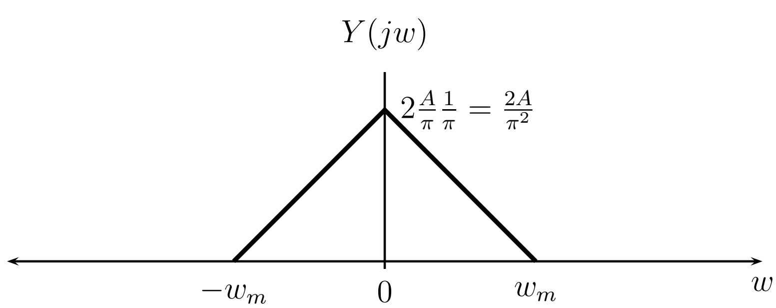
Si $x(t)$ tiene una frecuencia superior a $\frac{\pi}{T}$, existirá un aliasing e $y(t)$ no será proporcional a $x(t)$.

(b) Definamos la salida del filtro, $H_1(jw)$, como $z_2(t)$. $z_2(t)$ es la versión filtrada por un filtro de paso bajo de $z_1(t)$. Gracias al paso de banda de $H_1(jw)$, observamos que $z_2(t)$ sólo contendrá componentes de frecuencia centrados en $\pm(w_c = \frac{2\pi}{T})$ que corresponden a $k = \pm 1$ en $Z_1(jw)$.

La magnitud de $Z_1(jw)$ en $k = \pm 1$ es $a_{k=1} = \frac{sin(\pi/2)}{\pi} = \frac{1}{\pi}$. Por lo tanto, $Z_2(jw)$ es tal como se indica a continuación:



La segunda modulación con $s(t)$ dará de nuevo como resultado la convolución de $Z_2(jw)$ con el tren de impulsos de área a_k . Sólo nos interesan los componentes de baja frecuencia, ya que el resultado se filtra mediante un filtro de paso bajo con $H_2(jw)$. La convolución producirá que dos imágenes de $\frac{A}{\pi}X(jw)$ a partir de $Z_2(jw)$ estén a escala de $\frac{1}{\pi}$ y se superpongan centradas en $w = 0$.
El filtro de paso bajo, $H_2(jw)$, sólo pasará componentes de frecuencia entre $-\frac{\pi}{T}$ y $-\frac{\pi}{T}$
Por lo tanto, $Y(jw)$ tiene la forma siguiente:



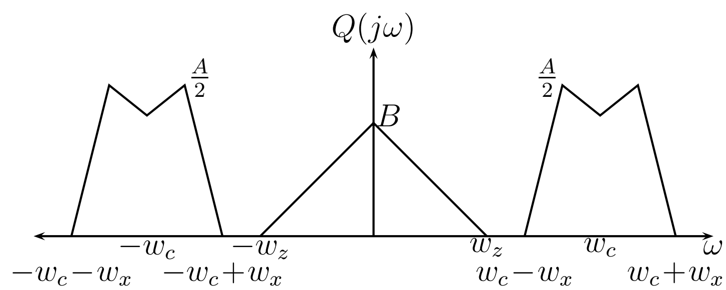
Por el diagrama, observamos que $Y(jw)$ tiene la misma forma y el mismo ancho de banda que $X(jw)$, y que la amplitud se multiplica por $\frac{2A}{\pi^2}$. Por lo tanto, la ganancia de todo el sistema es $= \frac{2A}{\pi^2}$

Problema 6

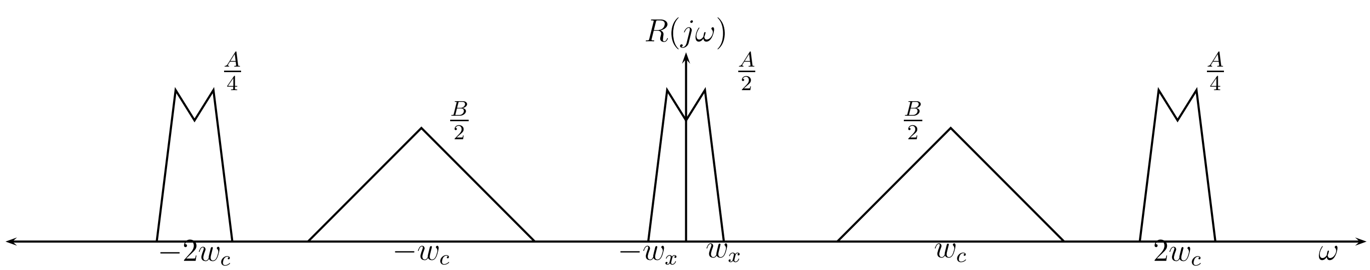
(a) Analicemos el sistema gráficamente en el dominio de frecuencia. Considere cada uno de los pasos:

(i) $p(t) = x(t)\cos(\omega_c t)$
En el dominio de tiempo, multiplicar por $\cos(\omega_c t)$ significa que la transformada de Fourier de $p(t)$ será la suma de dos $X(jw)$ desplazados por ω_c y $-\omega_c$, y la magnitud a una escala de $\frac{1}{2}$.

(ii) $q(t) = p(t) + z(t)$
La transformada de Fourier de $q(t)$ es simplemente la suma de las transformadas de Fourier de $p(t)$ y $z(t)$.



(iii) $r(t) = q(t)\cos(\omega_c t)$
Es decir que $q(t)$ se modula mediante $\cos(\omega_c t)$. Por tanto, que si repetimos el mismo procedimiento del apartado (i), tenemos:



(iv) Filtro $r(t)$ con $H_{LP}(jw)$.
La copia de banda de base de $X(j\omega)$ sólo es no cero entre $-\omega_x$ y ω_x. Podemos recuperarla si no se superpone con el $Z(j\omega)$ desplazado en los lados. Por lo tanto, podemos escribir lo siguiente:

$$\omega_c - \omega_z > \omega_x$$
$$\omega_c > \omega_x + \omega_z$$

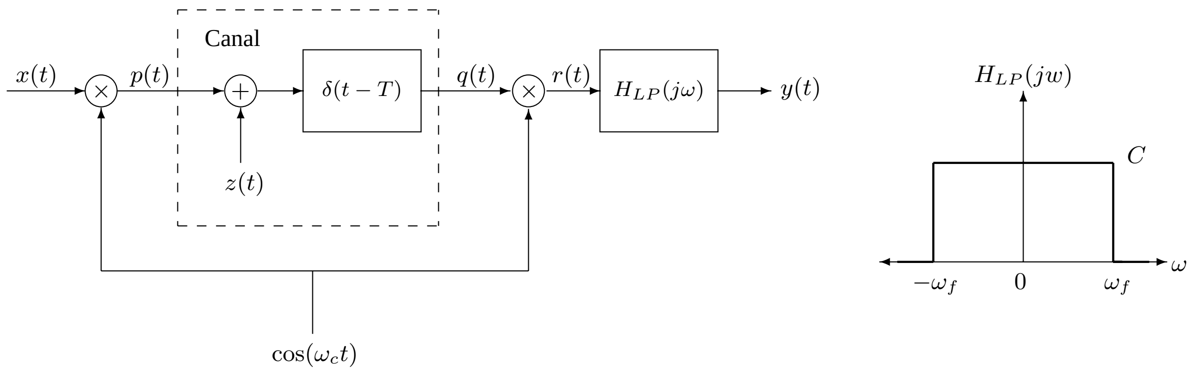
(b) Queremos hallar los parámetros C y ω_f para el filtro de paso bajo. Por la figura del apartado (a) podemos observar que para $\omega \in [-\omega_x, \omega_x], R(j\omega) = \frac{1}{2}X(j\omega)$, así que para recuperar $X(j\omega)$,

$$C = 2.$$

La frecuencia de corte ω_f simplemente tiene que estar entre la copia de la banda de base de $X(j\omega)$ y el $Z(j\omega)$ desplazado. De esta forma:

$$\omega_x \leq \omega_f \leq \omega_c - \omega_z$$

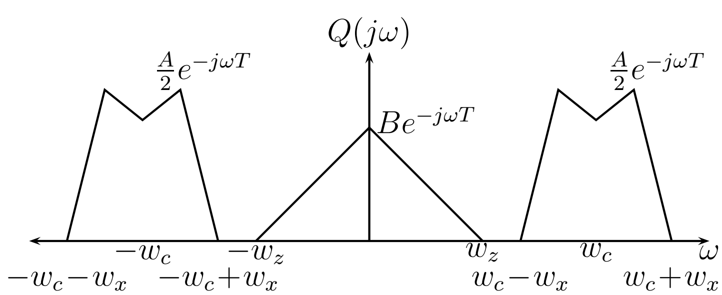
(c) Este es el mismo sistema anterior, a excepción de que tenemos que dar cuenta del retardo que se da en el canal. Podemos hacerlo con $h_d(t) = \delta(t - T)$. A continuación, se presenta el diagrama del sistema con el elemento de retardo.



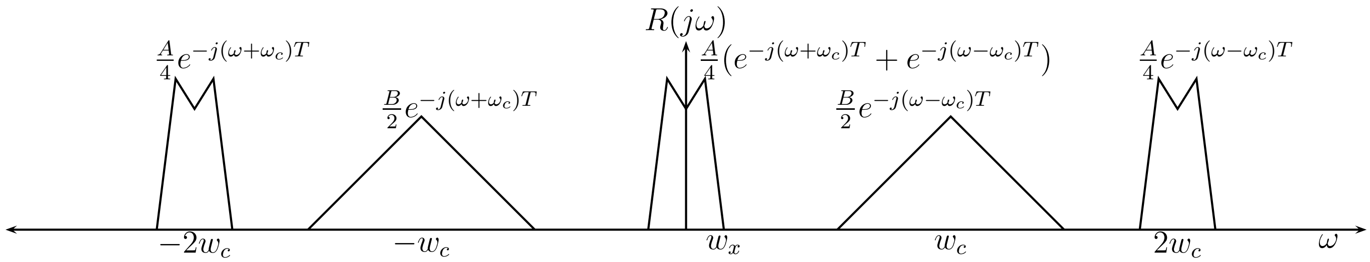
Definamos *s*(*t*) como la señal que hay justo antes del retardo. Entonces:

$$\begin{aligned} S(j\omega) &= P(j\omega) + Z(j\omega) \\ Q(j\omega) &= S(j\omega)H_d(j\omega) = e^{-j\omega T}S(j\omega). \end{aligned}$$

Principalmente estamos repitiendo lo que ya hicimos en los apartados (a) y (b), pero esta vez $Q(j\omega)$ está a escala de $e^{-j\omega T}$.



Si realizamos la convolución, observamos que el nuevo $R(j\omega)$ es:



Como utilizamos los parámetros seleccionados en los apartados (a) y (b), sólo pasará a través del filtro el componente de banda de base (centrado alrededor del origen), que será el mismo que en el apartado (b), excepto que utilizamos el nuevo factor de "altura" del gráfico. Si permitimos que $Y_0(j\omega)$ sea la salida del sistema en el apartado (b), entonces:

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= Y_0(j\omega)\frac{1}{2}(e^{-j(\omega+\omega_c)T} + e^{-j(\omega-\omega_c)T}) \\ &= Y_0(j\omega)e^{-j\omega T}\frac{1}{2}(e^{-j\omega_c T} + e^{j\omega_c T}) \\ &= Y_0(j\omega)e^{-j\omega T}\cos(\omega_c T) \end{aligned}$$

Si recordamos que el sistema sin retardo producía una salida $Y_0(j\omega) = X(j\omega)$, podemos hallar las respuestas de frecuencia del nuevo sistema de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} Y(jw) &= X(j\omega)e^{-j\omega T}\cos(\omega_c T) \\ H(j\omega) &= \frac{Y(jw)}{X(jw)} = e^{-j\omega T}\cos(\omega_c T). \end{aligned}$$