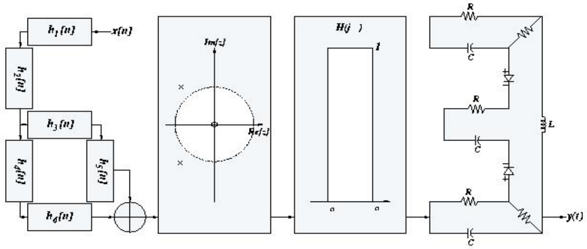


Señales y sistemas

Otoño 2003

Clase 8

30 de septiembre de 2003

1. Derivación del par de transformada de Fourier de tiempo continuo.
2. Ejemplos de transformadas de Fourier.
3. Transformadas de Fourier de señales periódicas.
4. Propiedades de la transformada de Fourier de tiempo continuo (TC).

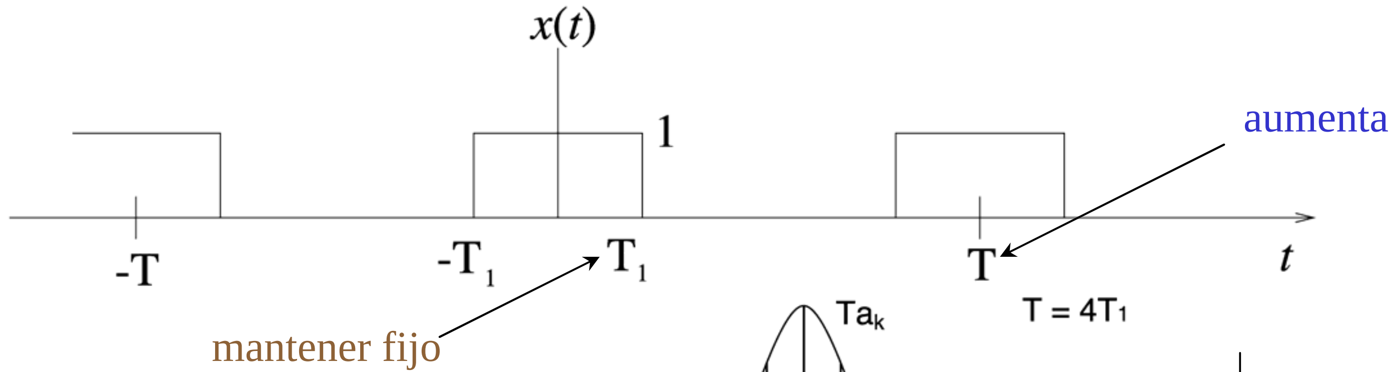
Derivación de Fourier de la transformada de Fourier de tiempo continuo

- $x(t)$ - una señal aperiódica
  - trátela como el límite de una señal periódica tal que $T \to \infty$
- Para una señal periódica, los componentes armónicos están separados $\omega_0 = 2\pi/T$
- Como $T \to \infty$, $\omega_0 \to 0$ y los componentes armónicos están espaciados cada vez más cerca en frecuencia:

$$\Downarrow$$

Series de Fourier $\longrightarrow$ Integral de Fourier

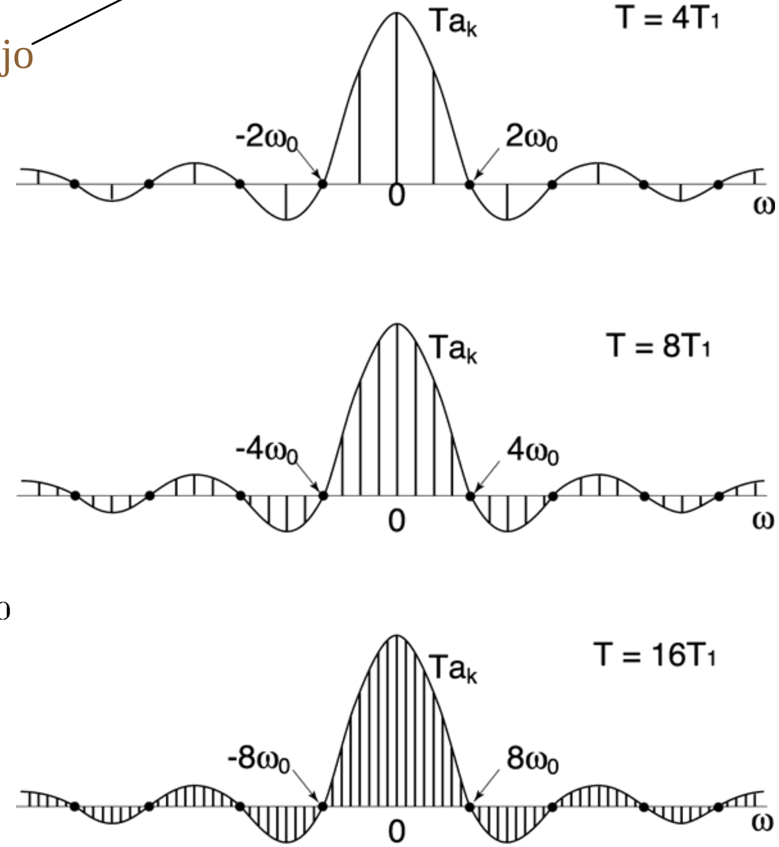
Ejemplo de motivación: onda cuadrada



$$a_k = \frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T}$$

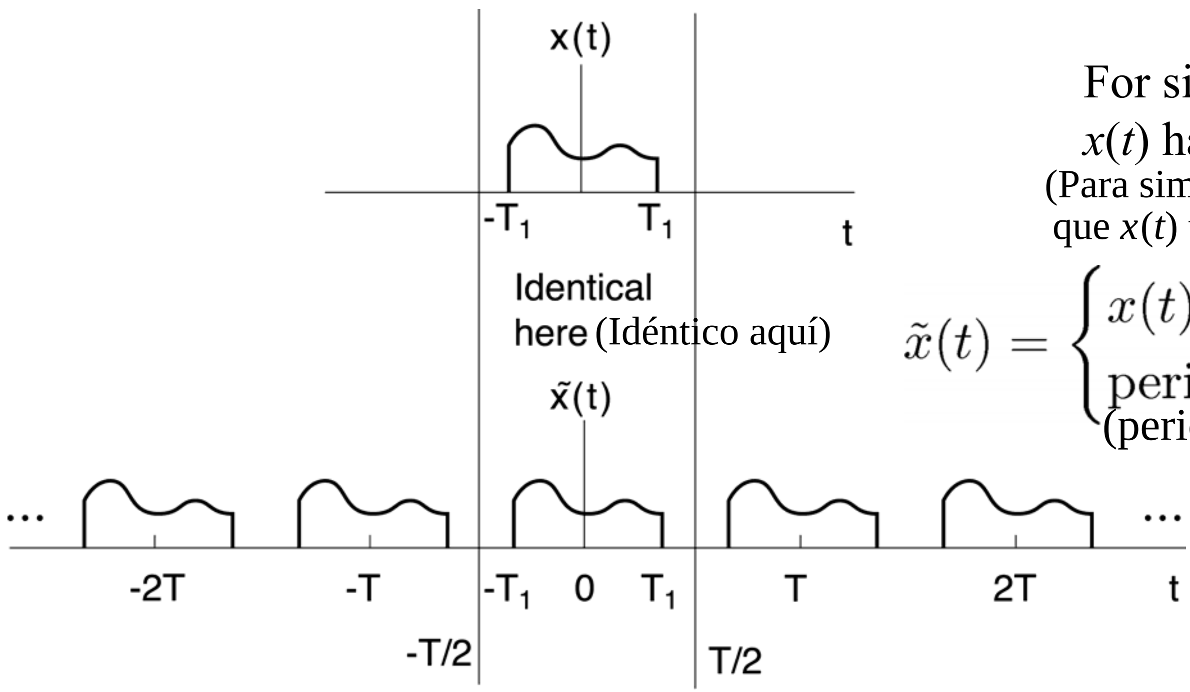
$$\Downarrow$$

$$Ta_k = \left.\frac{2\sin\omega T_1}{\omega}\right|_{\omega=k\omega_0}$$



Los puntos de frecuencia discreta se vuelven más densos en ω a medida que aumenta T

Por tanto, sigamos con la derivación ...



For simplicity, assume
$x(t)$ has a finite duration.
(Para simplificar las cosas, suponga que $x(t)$ tiene una duración finita)

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} x(t), & -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \\ \text{periodic, (periódico)} & |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

As $T \to \infty$, $\tilde{x}(t) = x(t)$ for all t
(Puesto que T) (para todo)

Derivación (continuación)

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \qquad \left(\omega_0 = \frac{2\pi}{T}\right)$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \tilde{x}(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

$\uparrow$

$\tilde{x}(t) = x(t)$ in this interval
(en este intervalo)

$$= \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt \qquad (1)$$

If we define
(Si definimos)

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

then Eq.(1) $\Rightarrow$
(entonces, la ecuación 1)

$$a_k = \frac{X(jk\omega_0)}{T}$$

Derivación (continuación)

Thus, for $-\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$
(Por consiguiente, para)

$$x(t) = \tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{T} X(jk\omega_0)}_{a_k} e^{jk\omega_0 t}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \omega_0 X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$$

$$\Downarrow$$

As $T \to \infty$, $\sum \omega_0 \to \int d\omega$, we get the CT Fourier Transform pair
(Dado que *T* ...) (..., obtenemos el par de transformada de Fourier en tiempo continuo)

$$\boxed{\begin{array}{ll} x(t) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega & \text{Synthesis equation (Ecuación de síntesis)} \\ X(j\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt & \text{Analysis equation (Ecuación de análisis)} \end{array}}$$

¿Para qué tipo de señales podemos hacer esto?

(1) Funciona también incluso si $x(t)$ tiene duración infinita pero cumple:

a) Energía finita $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$

En este caso, hay energía *cero* en el error

$$e(t) = x(t) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \quad \text{Then (Entonces)} \int_{-\infty}^{\infty} |e(t)|^2 dt = 0$$

b) Condiciones de Dirichlet

(i) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega = x(t)$ at points of continuity (en puntos de continuidad)

(ii) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega =$ midpoint at discontinuity (punto medio en la discontinuidad)

(iii) Gibb's phenomenon (Fenómeno de Gibbs)

c) Si permitimos los impulsos en $x(t)$ o $X(j\omega)$, podemos representar *más* señales incluso.

Ej. Nos permite considerar la *TF* para las señales *periódicas*

Ejemplo 1

(a) $x(t) = \delta(t)$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega$$

— Synthesis equation for $\delta(t)$
(Ecuación de síntesis para ...)

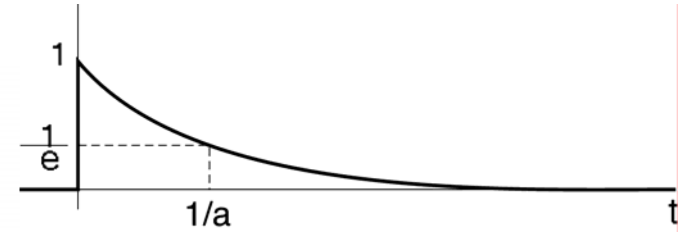
(b) $x(t) = \delta(t - t_0)$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) e^{-j\omega t} dt$$

$$= e^{-j\omega t_0}$$

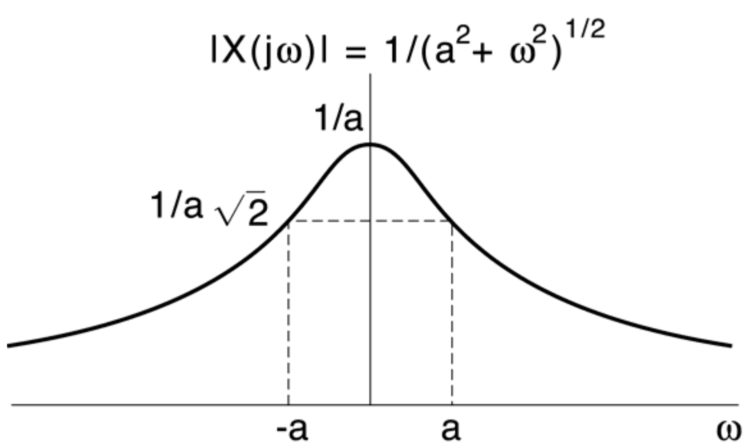
Ejemplo 2: función exponencial

$$x(t) = e^{-at}u(t), a > 0$$

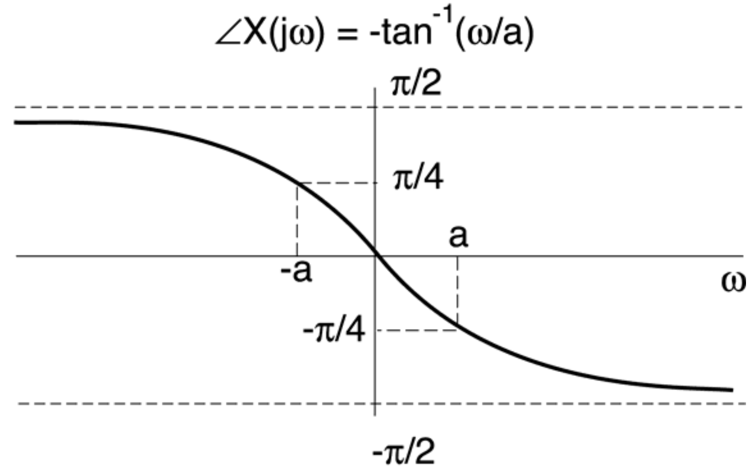


$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{0}^{\infty} \underbrace{e^{-at}e^{-j\omega t}}_{e^{-(a+j\omega)t}} dt$$

$$= -\left(\frac{1}{a+j\omega}\right) e^{-(a+j\omega)t}\Big|_{0}^{\infty} = \frac{1}{a+j\omega}$$



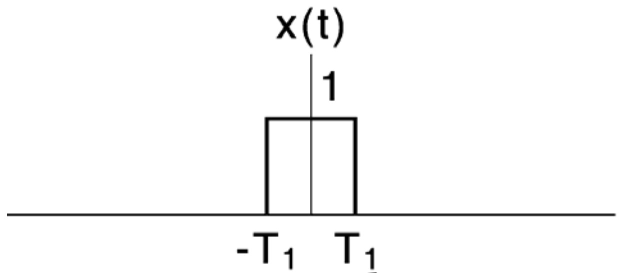
Simetría par

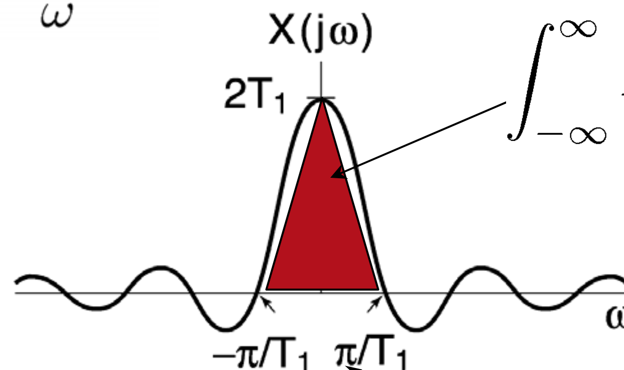


Simetría impar

Ejemplo 3: pulso cuadrado en el dominio del tiempo

$$X(j\omega) = \int_{-T_1}^{T_1} e^{-j\omega t}dt = \frac{2\sin\omega T_1}{\omega}$$





$$\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)d\omega$$

Observe la relación inversa entre las dos anchuras $\Rightarrow$ principio de incertidumbre

Datos útiles acerca de la TF en tiempo continuo

$$X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt$$

Example above: (Ejemplo anterior) $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt = 2T_1 = X(0)$

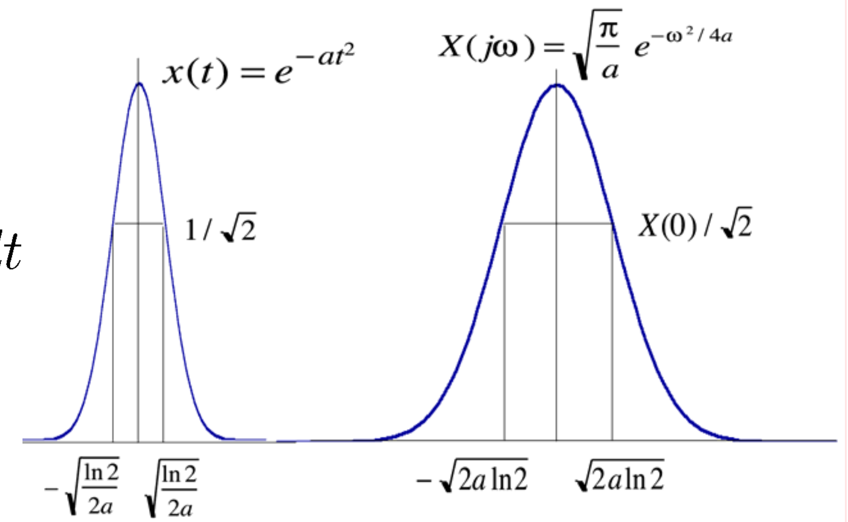
$$x(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)d\omega$$

Ex. above: (Ej. anterior) $x(0) = 1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)d\omega$

$= \frac{1}{2\pi} \times$ (Area of the triangle) (Área del triángulo)

Ejemplo 4: $x(t) = e^{\ at^2}$ — una fórmula de Gauss, esencial en probabilidad, óptica, etc.

$$
\begin{aligned}
X(j\omega) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} e^{-j\omega t}\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\left[t^2 + j\frac{\omega}{a}t + \left(\frac{j\omega}{2a}\right)^2\right] + a\left(\frac{j\omega}{2a}\right)^2} dt \\
&= \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\left(t+\frac{j\omega}{2a}\right)^2} dt\right]}_{\sqrt{\pi}/a} \cdot e^{-\frac{\omega^2}{4a}} \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}
\end{aligned}
$$



(Anchura del impulso en t)•
(Anchura del impulso en ω)
$\Rightarrow \Delta t \bullet \Delta\omega \sim (1/a^{1/2}) \bullet (a^{1/2}) = 1$

También una fórmula de Gauss

Principio de incertidumbre. No puede hacer que Δt y $\Delta\omega$ sean arbitrariamente pequeños.

Transformadas de Fourier en tiempo continuo de señales periódicas

Suppose
(Suponga que,)

$$X(j\omega) = \delta(\omega - \omega_0)$$

$$\Downarrow$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} e^{j\omega_0 t}$$

— periódico en *t* con frecuencia ω_o

That is
(Es decir,)

$$\boxed{e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_0)}$$

— Toda la energía se concentra en una frecuencia — ω_o

More generally (En términos más generales,)

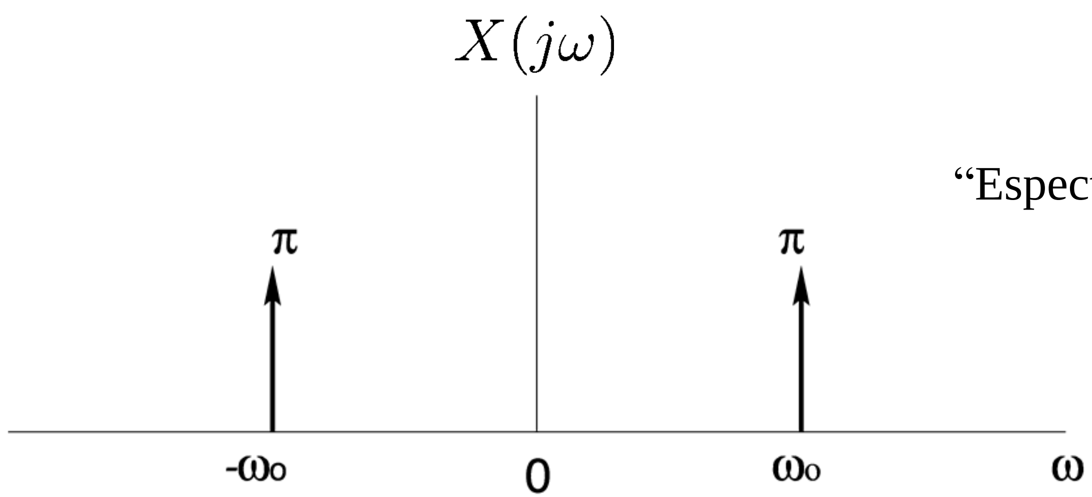
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \leftrightarrow X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

Ejemplo 4:

$$x(t) = \cos \omega_0 t = \frac{1}{2} e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 t}$$

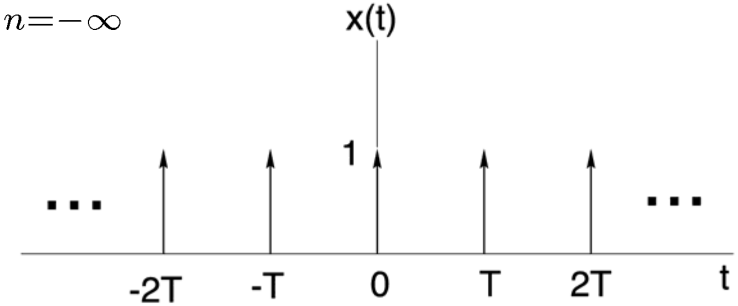
$$\updownarrow$$

$$X(j\omega) = \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)$$



"Espectro de línea"

Ejemplo 5: $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$ — Función de muestreo

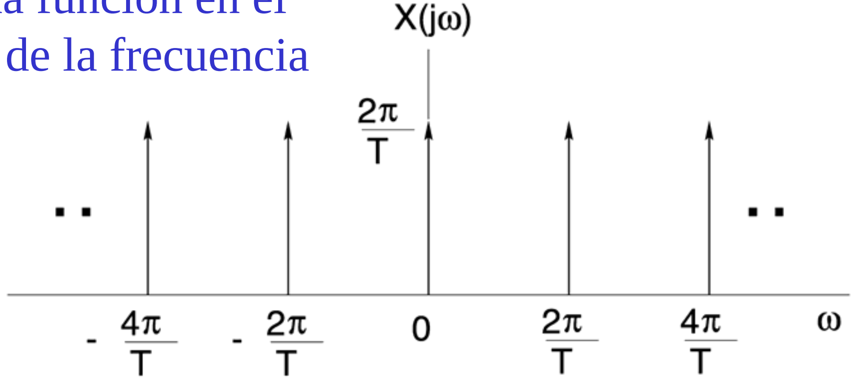


$$x(t) \leftrightarrow a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}$$

$$\Downarrow$$

$$X(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{2\pi}{T}}_{2\pi a_k} \delta(\omega - \underbrace{\frac{k2\pi}{T}}_{k\omega_0})$$

La misma función en el dominio de la frecuencia



Nota: (periodo en t) T
$\Leftrightarrow$ (periodo en ω) $2\pi/T$
De nuevo, relación inversa

Propiedades de la transformada de fourier en tiempo continuo

1) Linealidad $$ax(t) + by(t) \leftrightarrow aX(j\omega) + bY(j\omega)$$

2) Desplazamiento de tiempo $x(t - t_0) \leftrightarrow e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$

$$\text{Proof: } \int_{-\infty}^{\infty} x(\underbrace{t - t_0}_{t'})e^{-j\omega t}dt = e^{-j\omega t_0} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(t')e^{-j\omega t'}dt'}_{X(j\omega)}$$

Magnitud de la *TF* sin cambios

$$|e^{-j\omega t_0} X(j\omega)| = |X(j\omega)|$$

Cambio lineal en la fase de la *TF*

$$\angle(e^{-j\omega t_0} X(j\omega)) = \angle X(j\omega) - \omega t_0$$

Propiedades (continuación)

3) Simetría de conjugación

$$x(t) \text{ real} \leftrightarrow X(-j\omega) = X^*(j\omega)$$

$$\Downarrow$$

$$|X(-j\omega)| = |X(j\omega)|$$ *Par*

$$\angle X(-j\omega) = -\angle X(j\omega)$$ *Impar*

$$Re\{X(-j\omega)\} = Re\{X(j\omega)\}$$ *Par*

$$Im\{X(-j\omega)\} = -Im\{X(j\omega)\}$$ *Impar*

Siguen apareciendo propiedades ...

4) Escalado de tiempo

$$x(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(j\frac{\omega}{a}\right)$$

$$\Downarrow\ a = -1$$

$$x(-t) \longleftrightarrow X(-j\omega)$$

$$\Downarrow$$

E.g. $a > 1 \rightarrow at > t$ compressed in time $\Leftrightarrow$ stretched in frequency

(Ej. (...) --> comprimido en el tiempo <--> extendido en la frecuencia)

a) *x*(*t*) real y par

$$x(t) = x(-t)$$

$$\Rightarrow X(j\omega) = X(-j\omega) = X^*(j\omega) - \text{ Real \& even}$$

(Real y par)

b) *x*(*t*) real e impar

$$x(t) = -x(-t)$$

$$\Rightarrow X(j\omega) = -X(-j\omega) = -X^*(j\omega) - \text{ Purely imaginary \& odd}$$

(Imaginario puro y par)

c)

$$\begin{array}{ccccc} X(j\omega) & = & Re\{X(j\omega)\} & + & jIm\{X(j\omega)\} \\ & & \uparrow & & \uparrow \\ \textbf{For real } x(t) & = & Ev\{x(t)\} & + & Od\{x(t)\} \end{array}$$

(Para *x*(*t*) real)