Señales y sistemas

Otoño 2003

Clase 17

4 de noviembre de 2003

1. Motivación y definición de la transformada (bilateral) de Laplace.
2. Ejemplos de las transformadas de Laplace y sus regiones de convergencia (ROC).
3. Propiedades de las ROC.

Necesidad de la transformada de Laplace

- La transformada de Fourier en tiempo continuo tiene numerosas utilidades, como:
  - — Analizar la respuesta de frecuencia de los sistemas LTI.
  - — Muestreo.
  - — Modulación.

    ⋮
- ¿Por qué todavía necesitamos otra transformada?

- Una visión de la transformada de Laplace es considerarla como una *extensión* de la de Fourier que permite el análisis de una clase más amplia de señales y sistemas.

- En concreto, la transformada de Fourier *no sirve* para clases de señales grandes (e importantes) ni para sistemas *inestables*, es decir, cuando:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt = \infty$$

Necesidad de la transformada de Laplace (continuación)

- En muchas aplicaciones, es necesario tratar con sistemas *inestables*. Por ejemplo:
  - — Estabilización de un péndulo invertido.
  - — Estabilización de un avión o un trasbordador espacial.

    ⋮

  - — En algunas aplicaciones se *desea* una inestabilidad, por ejemplo, en osciladores y láser.

- ¿Cómo analizamos dichas señales y sistemas?

  Recuerde la propiedad de función propia de los sistemas LTI de la clase 5:

$$e^{st} \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow H(s)e^{st}$$

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-st}dt \qquad \text{(assuming this converges)}$$

(suponiendo que converja)

- — e^{st} es una función propia de *cualquier* sistema LTI.
- — $s = \sigma + j\omega$ puede ser, en general, complejo

La transformada (bilateral) de Laplace

$$x(t) \longleftrightarrow X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt = \mathcal{L}\{x(t)\}$$

$s = \sigma + j\omega$ is a *complex* variable – Now we explore the full range of s
(es una variable *compleja* – ahora exploramos el rango completo de s)

Ideas básicas:

necesaria integrabilidad absoluta

(1) $$X(s) = X(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t)e^{-\sigma t}] e^{-j\omega t} dt = \mathcal{F}\{x(t)e^{-\sigma t}\}$$

(2) Una cuestión crítica a la hora de tratar con transformadas de Laplace es la convergencia:

— Por lo general, $X(s)$ sólo existe para *algunos* valores de s, y se ubica en lo que se denomina la *región de convergencia* (ROC).

$$\mathrm{ROC} = \{s = \sigma + j\omega \text{ so that } \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{|x(t)e^{-\sigma t}|}_{\substack{\text{Depends} \\ \text{only on } \sigma \\ \text{not on } \omega}} dt < \infty\}$$

(de forma que)

(Sólo depende de σ, no de ω)

condición de integrabilidad absoluta

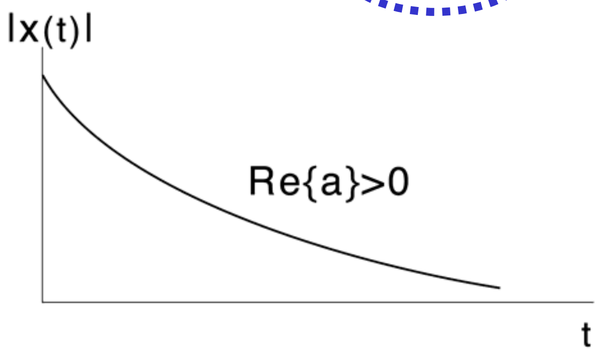
(3) Si $s = j\omega$ se encuentra en la ROC (es decir, $\sigma = 0$):

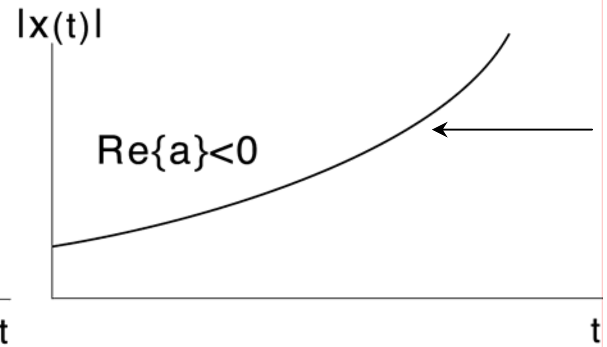
$$X(s)\big|_{s=j\omega} = \mathcal{F}\{x(t)\}$$

Ejemplo 1:

$$x_1(t) = e^{-at}u(t) \qquad (a - \text{an arbitrary real or complex number})$$

(***a*** – un número arbitrario real o complejo)





Inestable:

- no existe *transformada de Fourier*
- pero sí existe *transformada de Laplace*

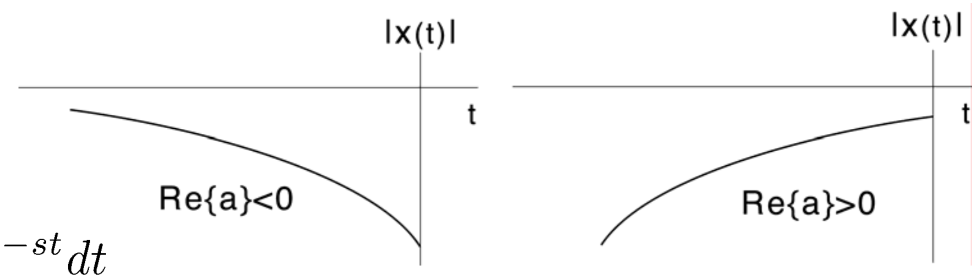
$$
\begin{aligned}
X_1(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(t)e^{-st}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(s+a)t}dt \\
&= -\frac{1}{s+a}e^{-(s+a)t}\Big|_0^{\infty} = -\frac{1}{s+a}[e^{-(s+a)\infty} - 1]
\end{aligned}
$$

Esto converge sólo si *Re*(*s*+*a*) > 0, es decir, *Re*(*s*) > -*Re*(*a*)

$$\Downarrow$$

$$X_1(s) = \frac{1}{s+a}, \quad \underbrace{\Re e\{s\} > -\Re e\{a\}}_{\text{ROC}}$$

Ejemplo 2:



$$
\begin{aligned}
x_2(t) &= -e^{-at}u(-t) \\
X_2(s) &= -\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(-t)e^{-st}dt \\
&= -\int_{-\infty}^{0} e^{-(s+a)t}dt \\
&= +\frac{1}{s+a}e^{-(s+a)t}\Big|_{-\infty}^{0} = \frac{1}{s+a}[1-e^{(s+a)\infty}]
\end{aligned}
$$

Esto converge sólo si $Re(s+a) < 0$, es decir, $Re(s) < -Re(a)$

$$X_2(s) = \frac{1}{s+a}, \quad \underbrace{\Re e\{s\} < -\Re e\{a\}}_{\text{ROC}}$$ - Same as $X_1(s)$, but different ROC

(Igual que $X_1(s)$, pero con distinta ROC)

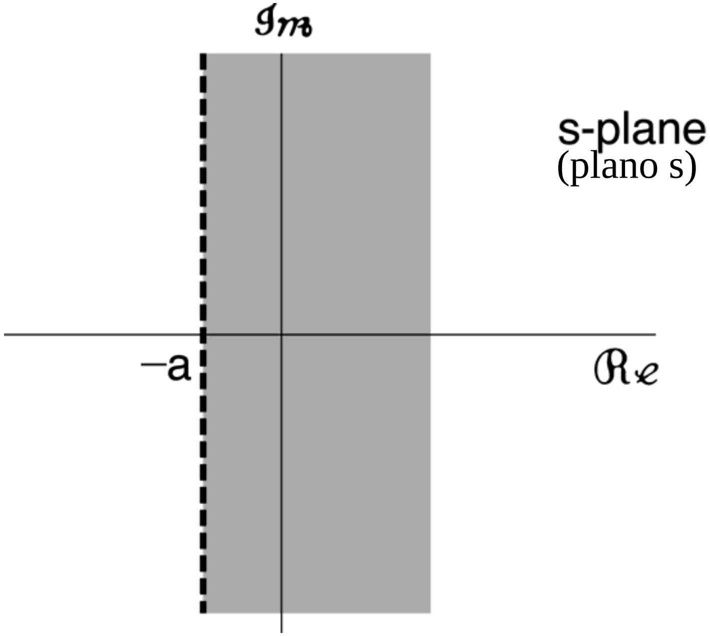
Punto clave (y diferencia clave de la *TF*): son necesarios $X(s)$ *y* ROC para determinar exclusivamente $x(t)$. No sucede lo mismo con la *TF*.

Visualización gráfica de la ROC

Ejemplo 1

$$X_1(s) = \frac{1}{s+a}, \quad \Re e\{s\} > -\Re e\{a\}$$

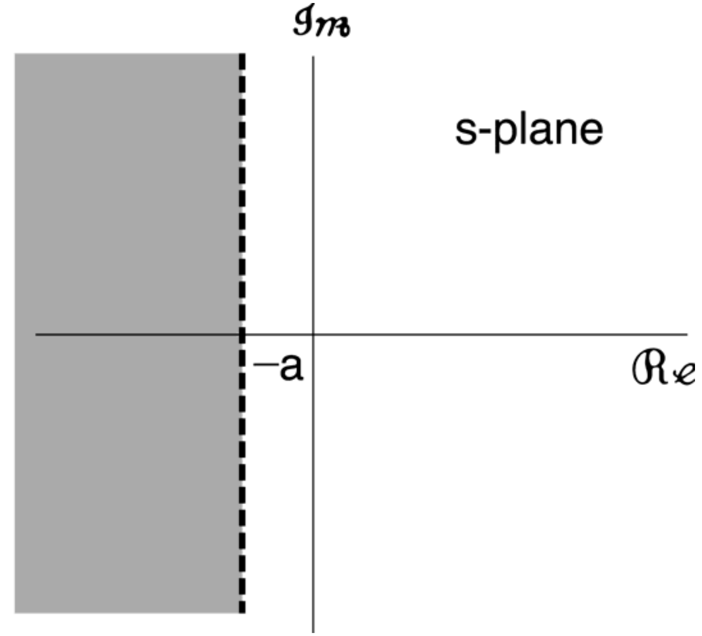
$x_1(t) = e^{-at}u(t)$ - right-sided signal
(señal del lado derecho)



Ejemplo 2

$$X_2(s) = \frac{1}{s+a}, \quad \Re e\{s\} < -\Re e\{a\}$$

$x_2(t) = -e^{-at}u(-t)$ - left-sided signal
(señal del lado izquierdo)



Transformadas racionales

- Muchas (pero no todas) de las transformadas de Laplace que nos interesan son funciones racionales de *s* (ej., ejemplos 1 y 2; en general, las respuestas a impulsos de los sistemas LTI descritas por las ecuaciones diferenciales de coeficiente de constantes lineales), donde:

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)}, \quad N(s), D(s) - \text{polynomials in } s$$

(polinomios en *s*)

- Raíces de $N(s)$ = *ceros* de $X(s)$

- Raíces de $D(s)$ = *polos* de $X(s)$

- Cualquier $x(t)$ que consista en una combinación lineal de exponenciales complejos para $t > 0$ y para $t < 0$ (ej., como en los ejemplos 1 y 2) incluye una transformada racional de Laplace.

Ejemplo 3

$$x(t) = 3e^{2t}u(t) - 2e^{-t}u(t)$$

$$X(s) = \int_0^\infty [3e^{2t} - 2e^{-t}]e^{-st}dt$$

$$= 3\underbrace{\int_0^\infty e^{-(s-2)t}dt}_{\text{Requires } \Re e\{s\} > 2} - 2\underbrace{\int_0^\infty e^{-(s+1)t}dt}_{\text{Requires } \Re e\{s\} > -1}$$

(Es necesario)

$$\Downarrow$$

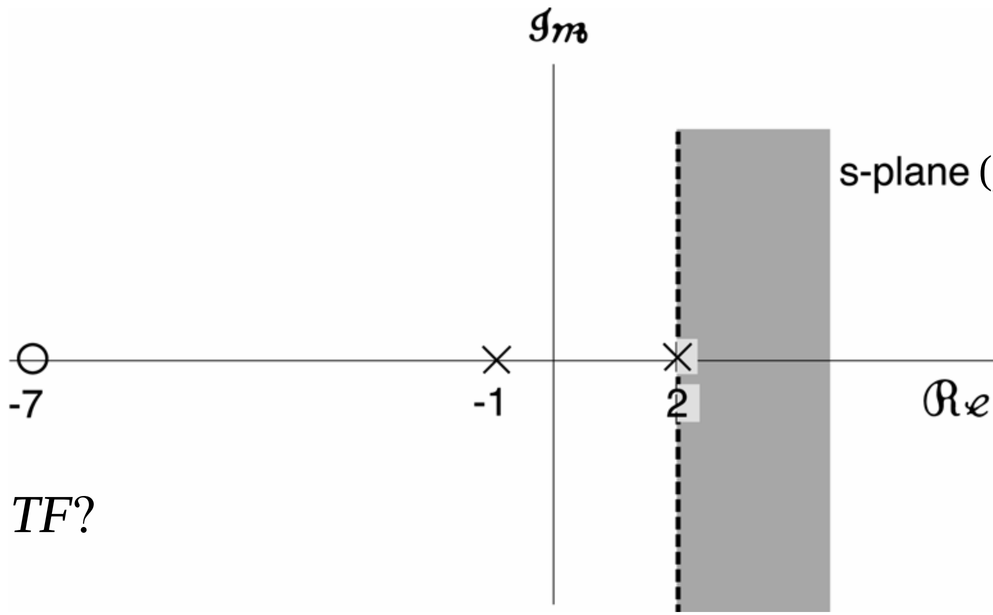
Es necesaria una → intersección de la ROC para AMBAS

$$X(s) = \frac{3}{s-2} - \frac{2}{s+1} = \frac{s+7}{(s-2)(s+1)} = \frac{s+7}{s^2-s-2} \quad \Re e\{s\} > 2$$

Notación:

× — *polo*

○ — *cero*



s-plane (plano s)

P: ¿Incluye $x(t)$ una *TF*?

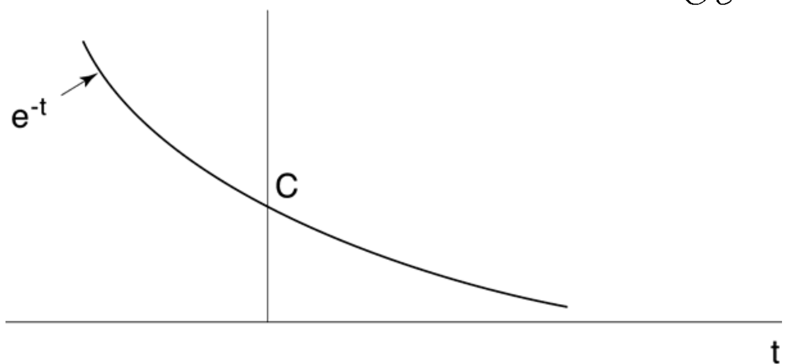
Las transformadas de Laplace y las ROC

- Algunas señales no incluyen transformadas de Laplace (no tienen ROC)

(a) $x(t) = Ce^{-t}$ for all t since $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)e^{-\sigma t}|dt = \infty$ for all σ

(para todo t, puesto que) (para todo)

$|x(t)e^{-\sigma t}| = Ce^{-(\sigma+1)t}$



(b) $x(t) = e^{j\omega_0 t}$ for all t (para todo) $\quad$ *FT (TF)*: $X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)e^{-\sigma t}|dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma t}dt = \infty \text{ for all } \sigma$$

(para todo)

$X(s)$ sólo se define en la ROC; no permitimos impulsos en las TL

Propiedades de la ROC

- La ROC sólo puede adoptar un número reducido de formas distintas.

1) La ROC consiste en una colección de líneas paralelas al eje $j\omega$ en el plano s (es decir, la ROC depende sólo de σ).
¿Por qué?

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)e^{-st}|dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)e^{-\sigma t}|dt < \infty \text{ depends only on } \sigma = \Re e\{s\}$$

(sólo depende de σ)

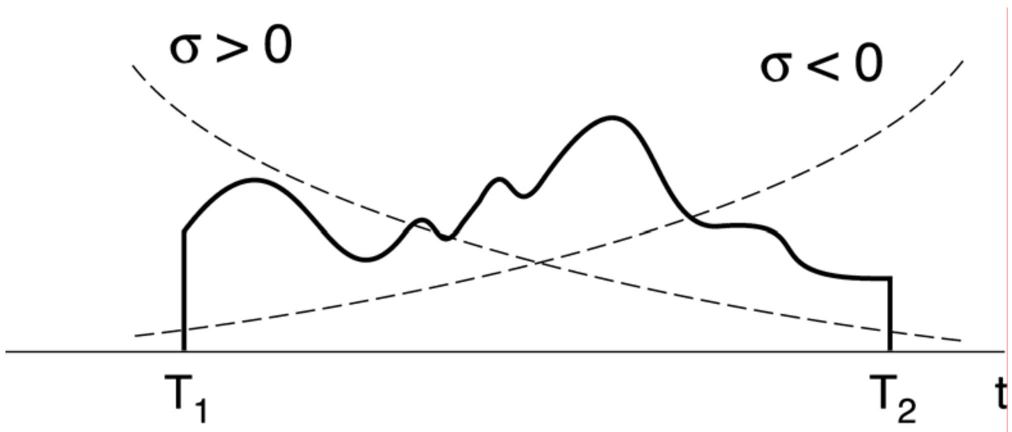
2) Si $X(s)$ es racional, la ROC no contiene ningún polo.
¿Por qué?

Los polos se ubican donde $D(s) = 0$

$$\Rightarrow \;\; X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \infty$$ No es convergente.

Más propiedades

3) Si $x(t)$ tiene duración finita y es totalmente integrable, la ROC constituye todo el plano s.



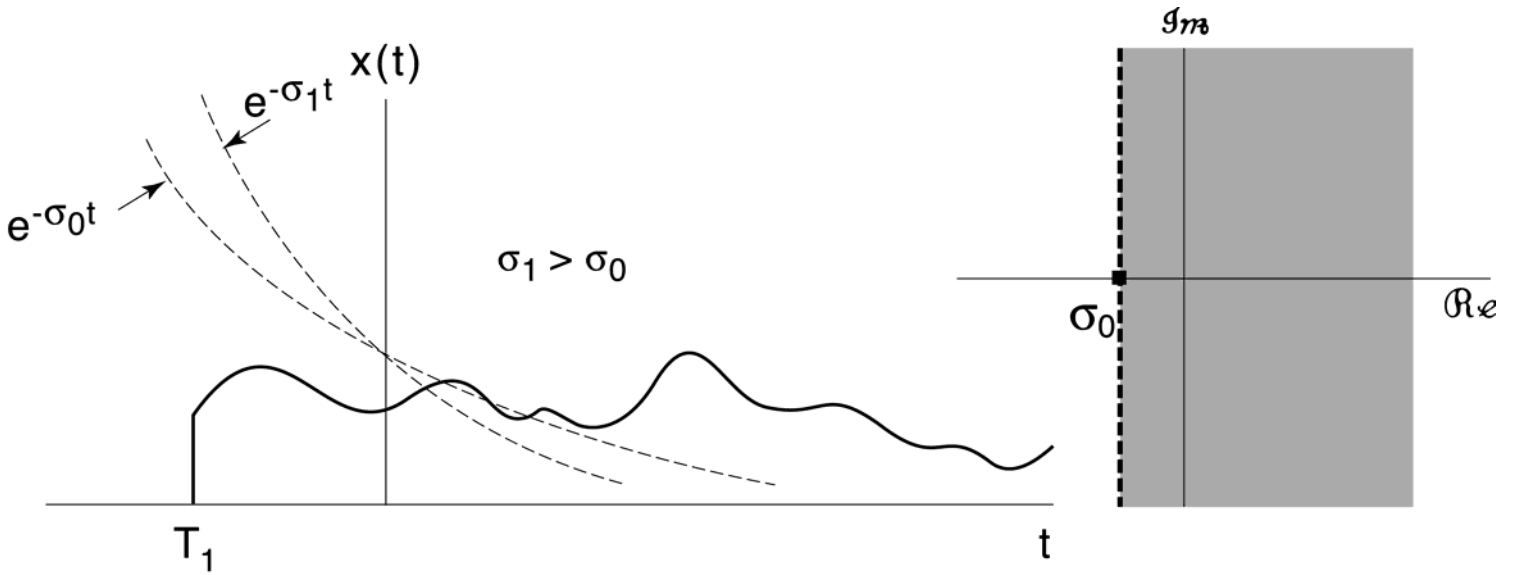
$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt = \underbrace{\int_{T_1}^{T_2} x(t)e^{-st}dt}_{\text{A finite integration interval}}$$

(Un intervalo de integración finita)

$$< \infty \quad \text{if} \int_{T_1}^{T_2} |x(t)|dt < \infty$$

Propiedades de la ROC que dependen del lado en el que usted se ubique (I)

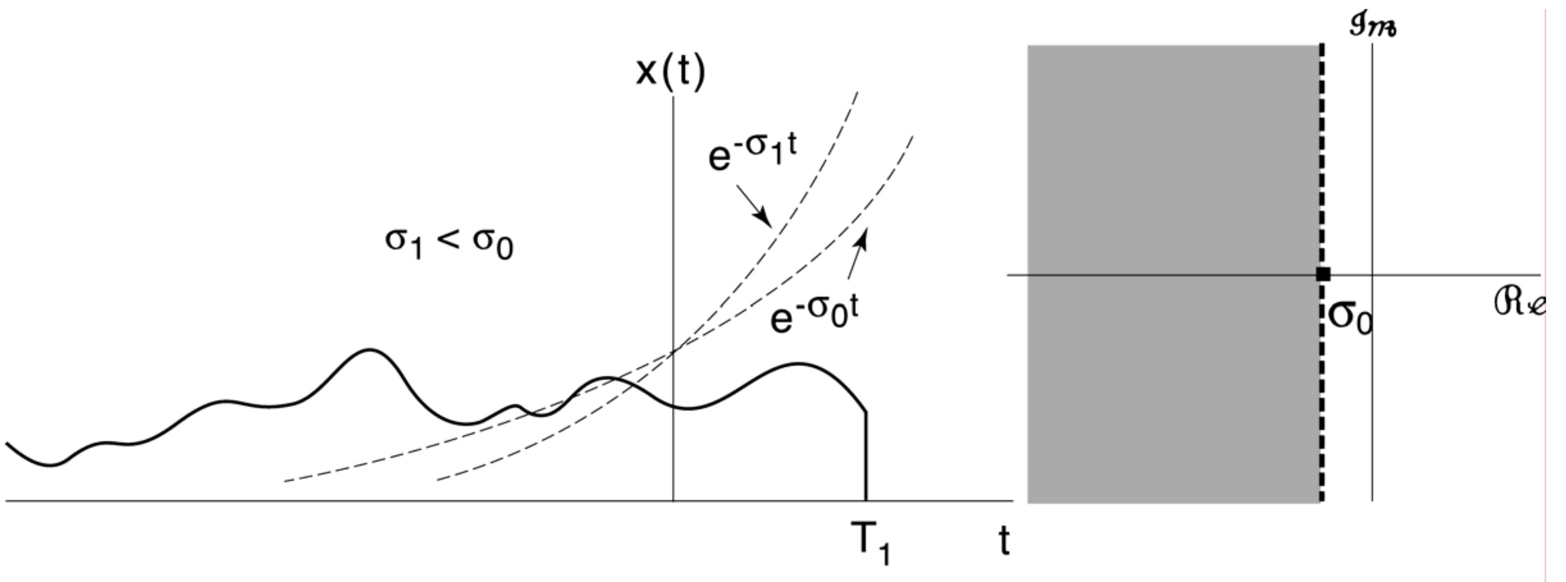
4) Si $x(t)$ está en el lado derecho (es decir, si es cero *antes* de algún tiempo), y si $Re(s) = \sigma_o$ se ubica en la ROC, todos los valores de s para los que $Re(s) > \sigma_o$ también se ubican en la ROC.



La ROC se ubica en el lado derecho del plano (RHP)

Propiedades de la ROC que dependen del lado en el que usted se ubique (II)

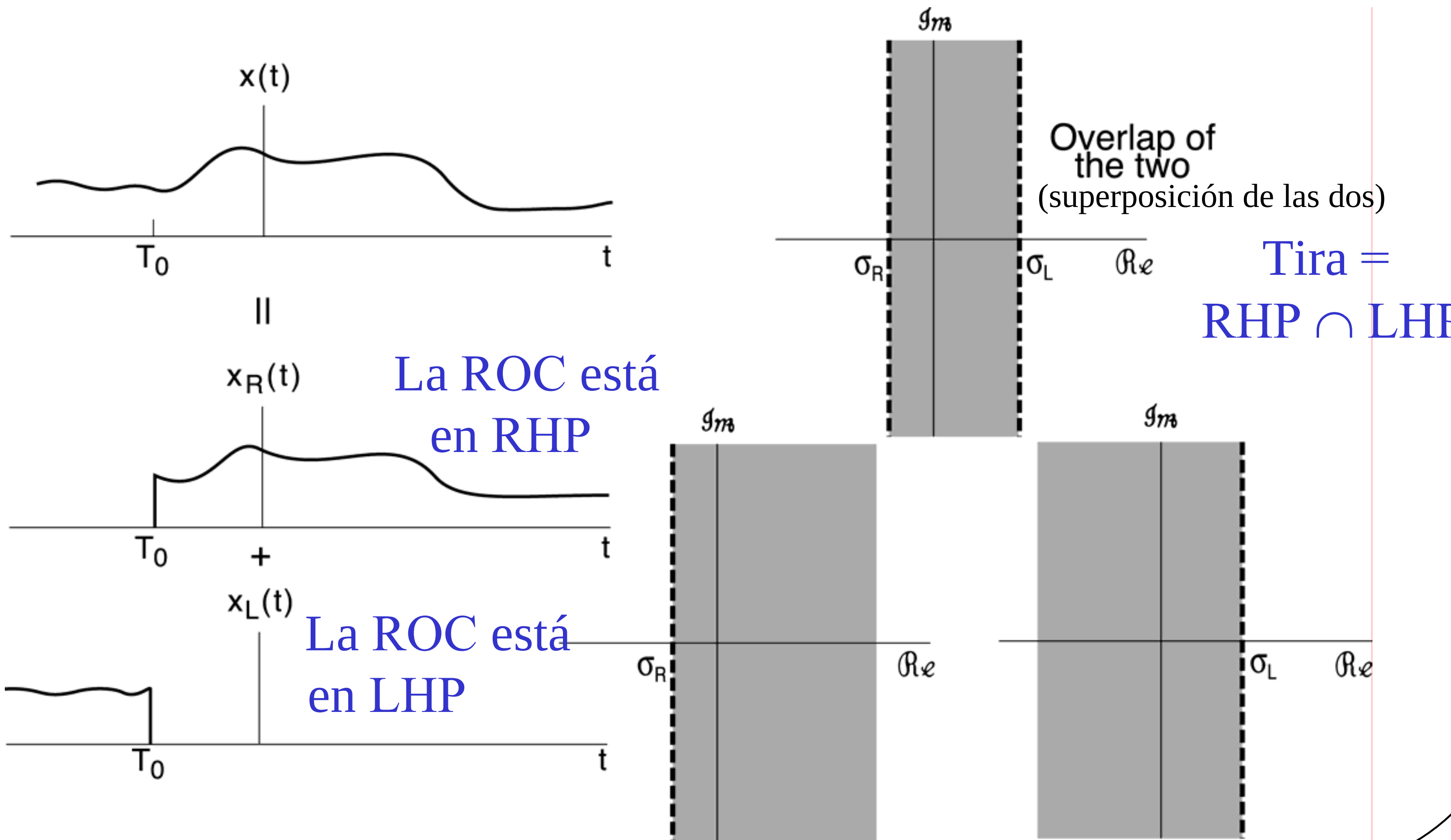
5) Si $x(t)$ está en el lado izquierdo (es decir, si es cero *después* de algún tiempo), y si $Re(s) = \sigma_o$ se ubica en la ROC, todos los valores de s para los que $Re(s) < \sigma_o$ también se ubican en la ROC.



La ROC se ubica en el lado izquierdo del plano (LHP)

Más propiedades de las ROC

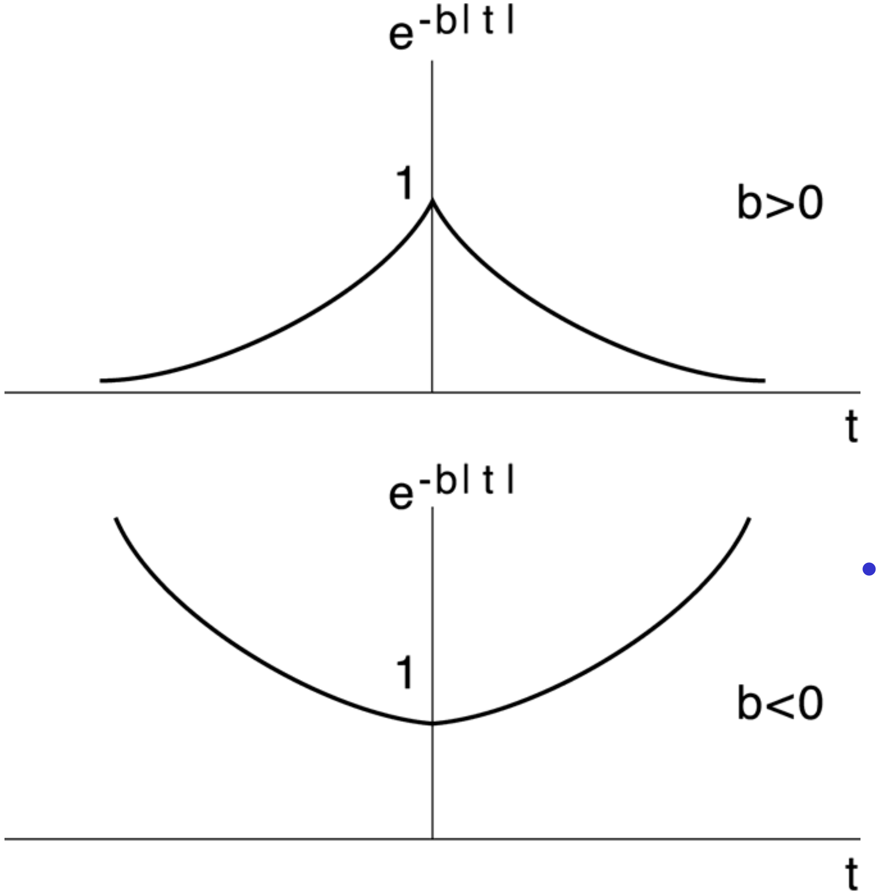
6) Si $x(t)$ tiene dos lados y si la línea $Re(s) = \sigma_o$ se ubica en la ROC, ésta consiste en una tira en el plano s que incluye la línea $Re(s) = \sigma_o$.



Ejemplo:

$$x(t) = e^{-b|t|}$$

¿Intuición?



• Ok: multiplicar por la constante (e^{0t}) y será integrable

• Parece que está mal: ningún $e^{\sigma t}$ amortiguará ambos lados

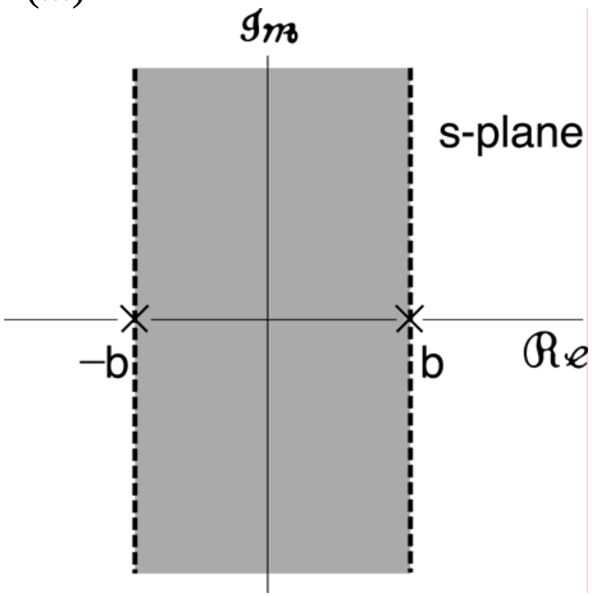
Ejemplo (continuación):

$$x(t) = e^{bt}u(-t) + e^{-bt}u(t)$$

$$e^{bt}u(-t) \Downarrow -\frac{1}{s-b},\ \Re e\{s\} < b \qquad e^{-bt}u(t) \Downarrow \frac{1}{s+b},\ \Re e\{s\} > -b$$

Overlap if $b > 0 \Rightarrow X(s) = \frac{-2b}{s^2-b^2}$, with ROC:

(Se superpone si (...) , con la ROC:)



¿Qué sucede si $b < 0$? $\Rightarrow$ No hay superposición $\Rightarrow$ No hay transformada de Laplace

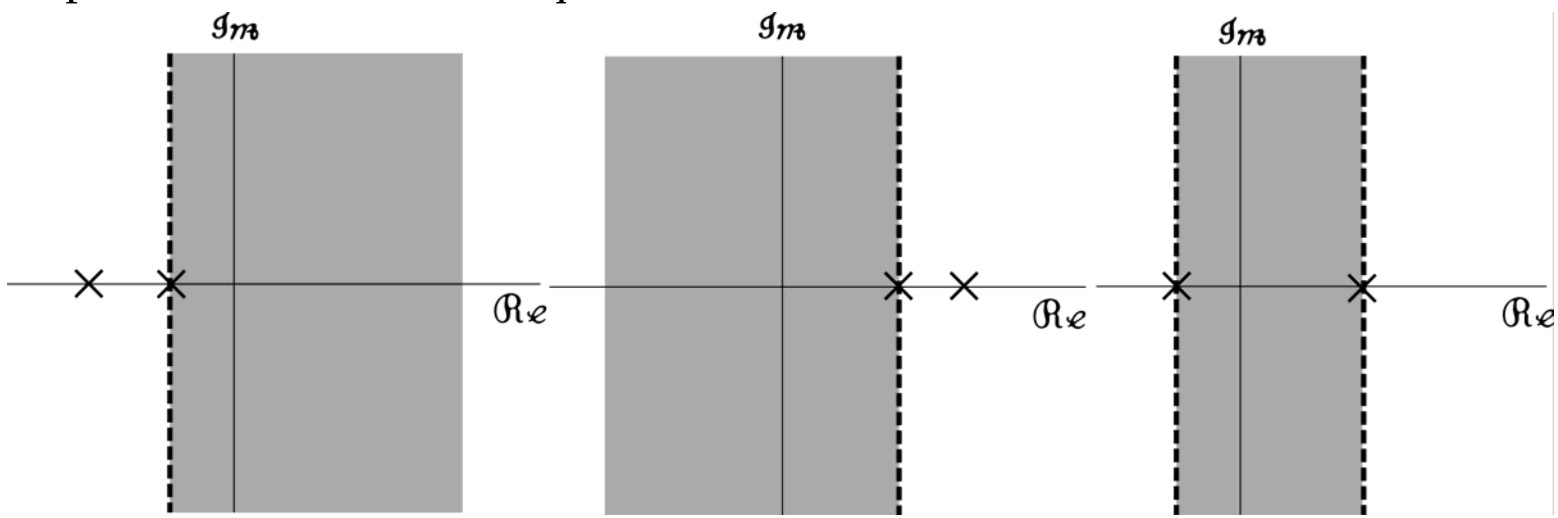
Propiedades, propiedades

7) Si $X(s)$ es racional, su ROC está rodeada por polos o se extiende al infinito. Además, no hay ningún polo de $X(s)$ en la ROC.

8) Suponga que $X(s)$ es racional. Por tanto:

(a) Si $x(t)$ se encuentra en el lado derecho, la ROC está a la derecha del polo situado más a la derecha.

(b) Si $x(t)$ se encuentra a la izquierda, la ROC está a la izquierda del polo situado más a la izquierda.



(a) (b) (c)

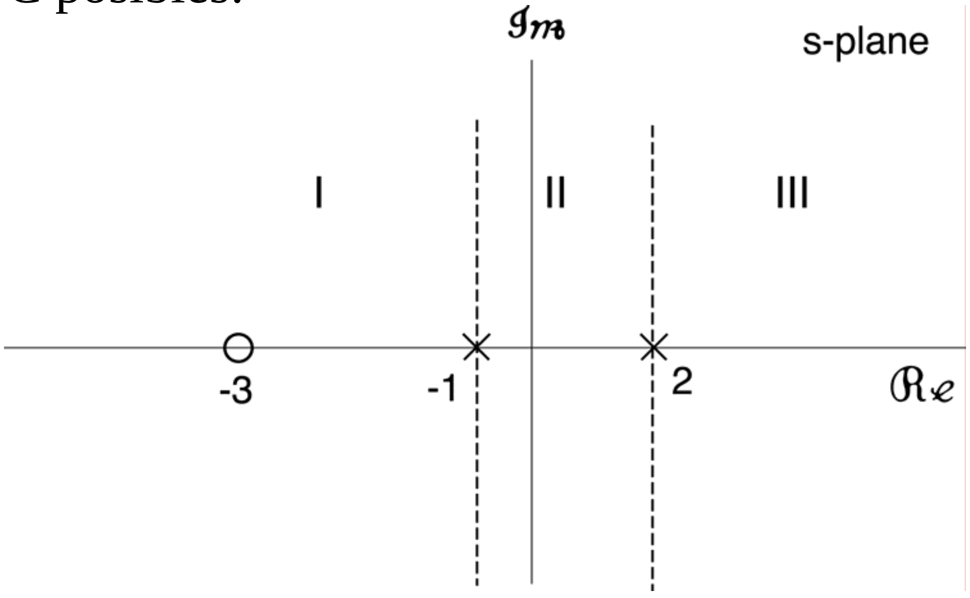
9) Si la ROC de $X(s)$ incluye el eje $j\omega$, existe la *TF* de $x(t)$.

9) Si la ROC de $X(s)$ incluye el eje $j\omega$, existe la *TF* de $x(t)$.

Ejemplo:

$$X(s) = \frac{(s+3)}{(s+1)(s-2)}$$

Tres ROC posibles:



¿Existe la transformada de Fourier?

$x(t)$ está la derecha	ROC:	III	No
$x(t)$ está a la izquierda	ROC:	I	No
$x(t)$ se extiende por todo el tiempo	ROC:	II	Sí