Señales y sistemas

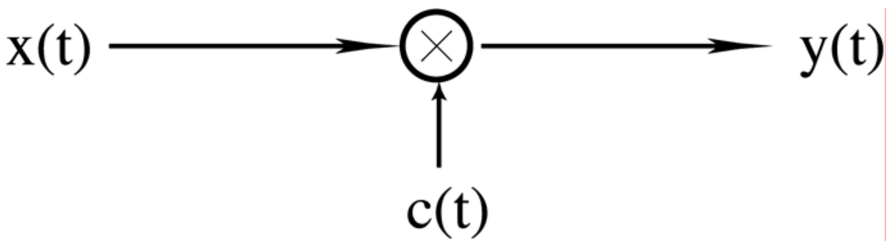
Otoño 2003

Clase 16

30 de octubre de 2003

1. AM con un portador periódico arbitrario.
2. Portador de tren de impulsos multiplexado por división de tiempo.
3. Modulación sinusoidal de frecuencia.
4. AM sinusoidal en tiempo discreto.
5. Muestreo en tiempo discreto, decimación e interpolación.

AM con un portador *periódico* arbitrario



$c(t)$ – periodic with period T, carrier frequency $\omega_c = \frac{2\pi}{T}$
(periódico con periodo *T*, frecuencia del portador ...)

Remember: periodic in $t \longleftrightarrow$ discrete in ω
(Recuerde periódico *t*) (discreto en ...)

$$C(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_c) \quad \left(a_k = \frac{1}{T} \text{ for impulse train } \right)$$

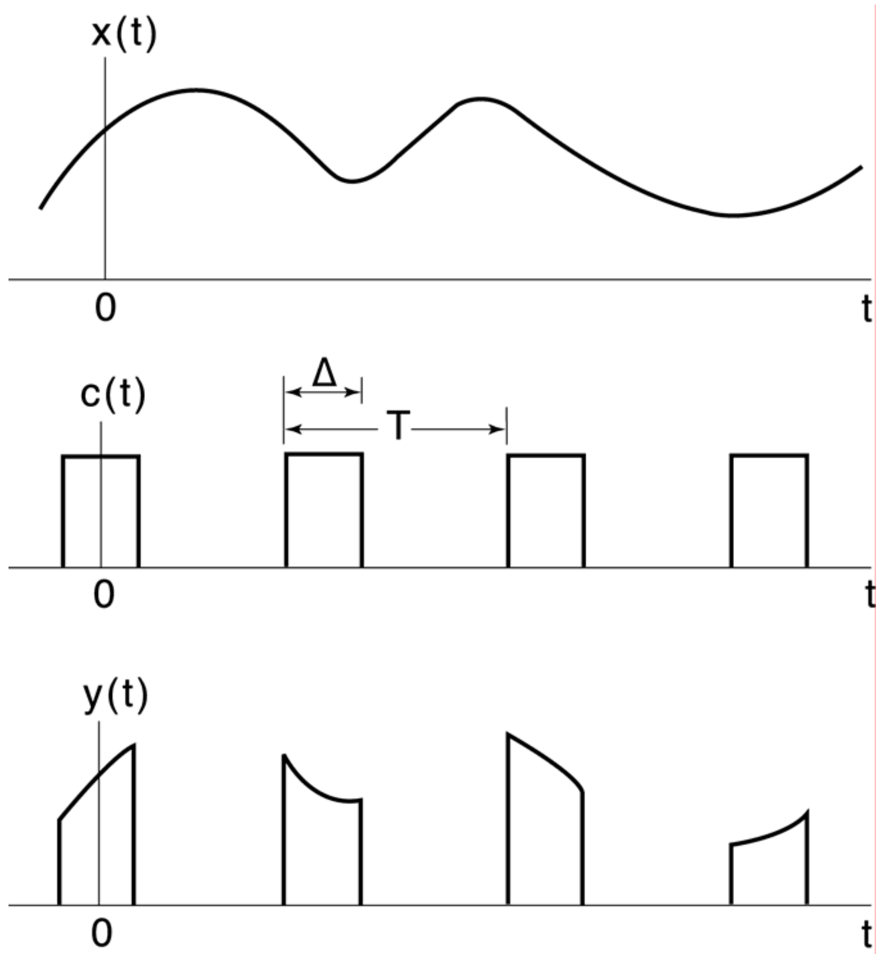
(para el tren de impulsos)

$$\Downarrow$$

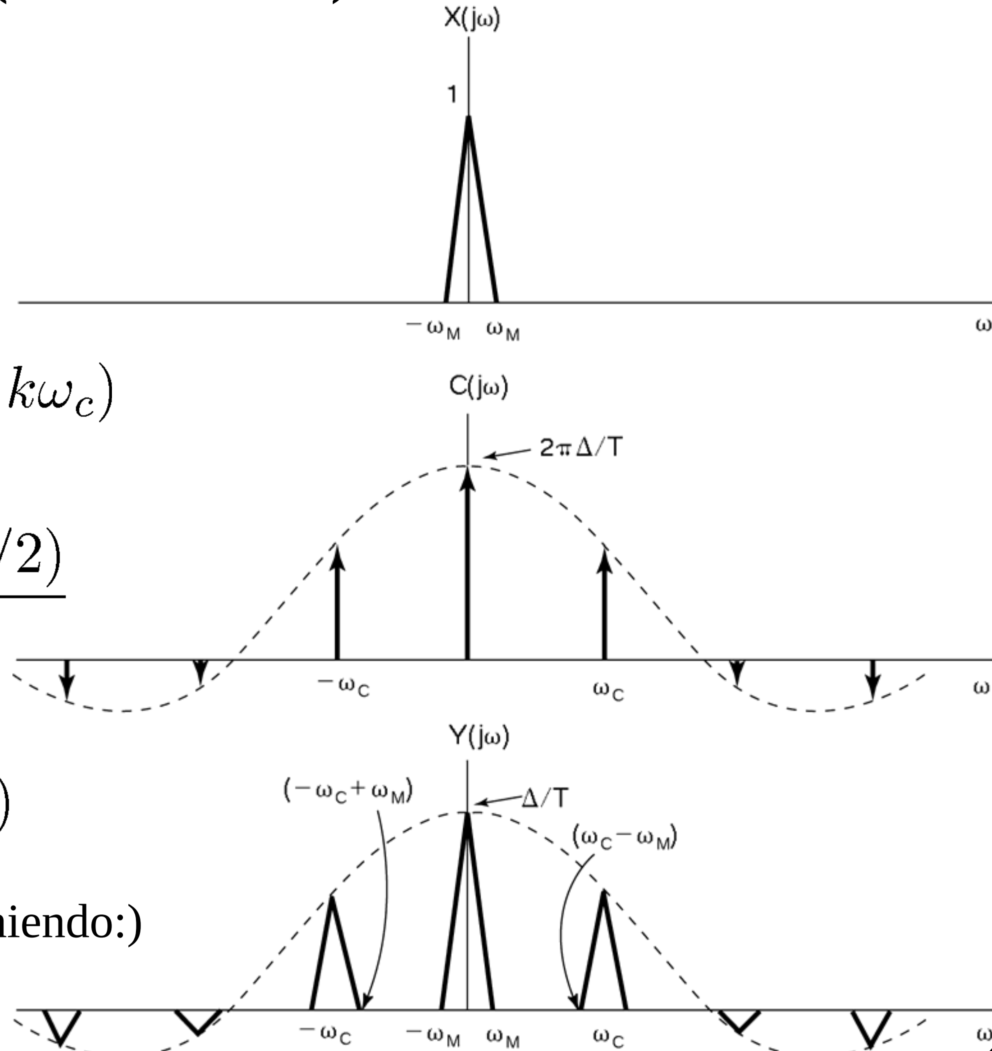
$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * C(j\omega) = X(j\omega) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_c) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k X(j(\omega - k\omega_c)) \end{aligned}$$

Modulación de un tren de impulsos rectangulares (periódico)

$$y(t) = x(t) \cdot c(t)$$



Modulación de un portador de tren de impulsos rectangulares (continuación)



$$C(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_c)$$

and (y)

$$a_0 = \frac{\Delta}{T}, \quad a_k = \frac{\sin(k\omega_c \Delta/2)}{\pi k}$$

para impulso rectangular

$$Y(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * C(j\omega)$$

Drawn assuming:(Suponiendo:)

$\omega_c > 2\omega_M$

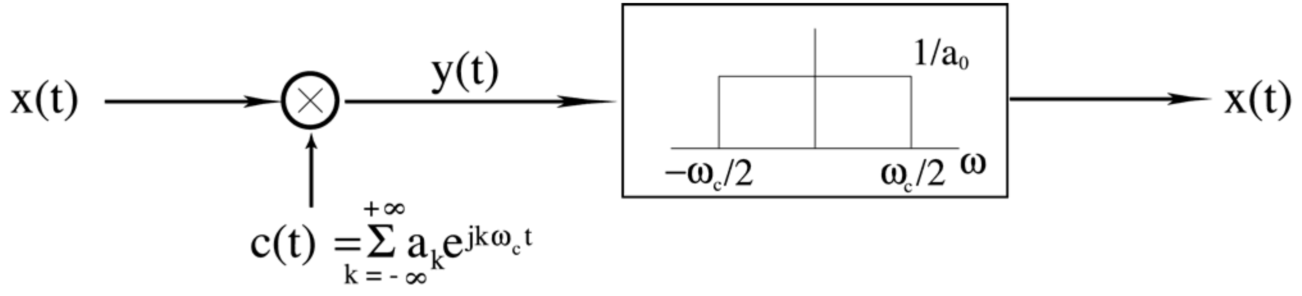
Nyquist rate is met

(que se cumple la frecuencia de Nyquist)

Observaciones

1) Obtenemos una imagen similar con cualquier $c(t)$ periódico con periodo T.

2) Siempre que $\omega_c = 2\pi/T > 2\omega_M$, no se da superposición en las réplicas escaladas y desplazadas de $X(j\omega)$. Por consiguiente, suponiendo que $a_o \neq 0$:



$x(t)$ se puede recuperar pasando $y(t)$ por un LPF.

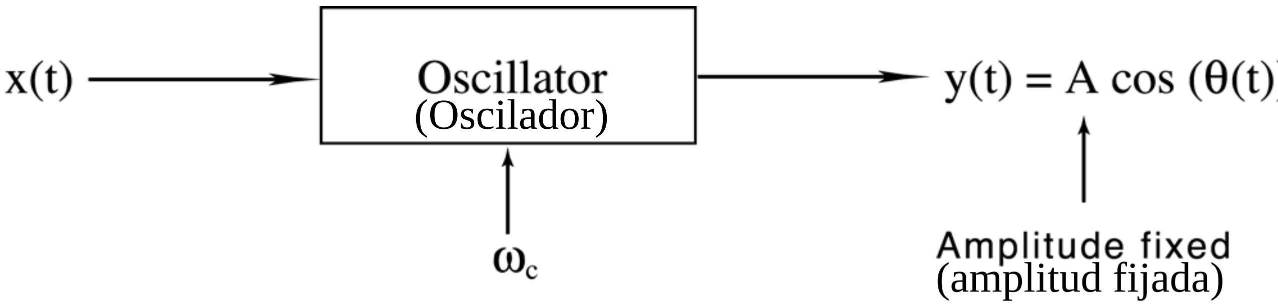
3) La modulación de tren de impulsos es la base del multiplexado por división de tiempo.

– Asignar intervalos de *tiempo*, no de *frecuencia*, a distintos canales, *por ejemplo*, teléfonos inalámbricos AT&T.

4) En realidad, sólo necesita *muestras* $\{x(nT)\}$ cuando $\omega_c > 2\,\omega_M$

$\Rightarrow$ Modulación de amplitud de impulsos

*F*recuencia sinusoidal de *M*odulación (FM)

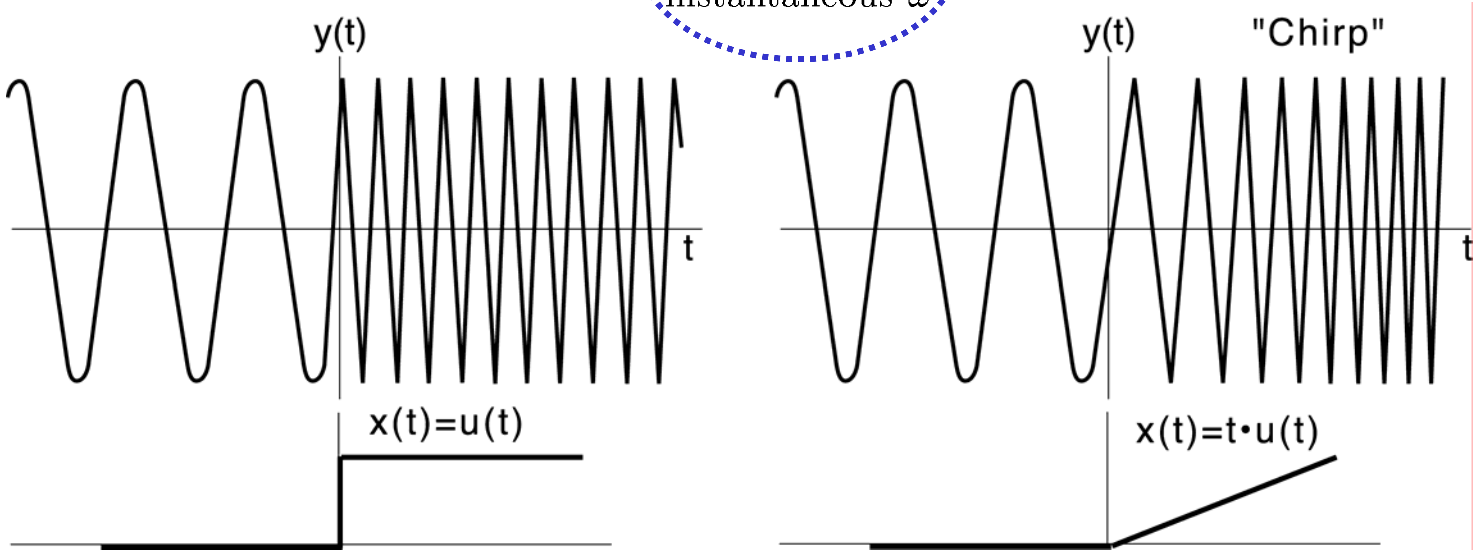


Phase modulation: $\theta(t) = \omega_c t + \theta_0 + k_p x(t)$
(Modulación de fase)

Frequency modulation: $\frac{d\theta}{dt} = \underbrace{\omega_c + k_f x(t)}_{\text{instantaneous } \omega}$
(Modulación de frecuencia)

x(t) es la señal que va a transmitirse

FM

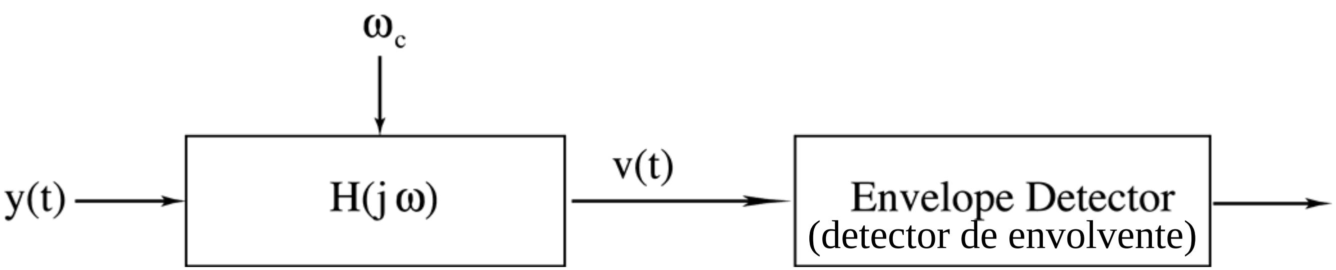


FM sinusoidal (continuación)

- La potencia transmitida no depende de $x(t)$: potencia media = $A^2/2$
- El ancho de banda de $y(t)$ *puede* depender de la *amplitud* de $x(t)$
- Demodulación:

a) Seguimiento directo de la fase $\theta(t)$ (mediante un bucle de enganche de fase).

b) Uso de un sistema LTI que actúa como un diferenciador.



$H(j\omega)$ — diferenciador sintonizable de banda limitada, sobre el ancho de banda de $y(t)$

$$H(j\omega) \cong j\omega$$

$$\Downarrow$$

$$v(t) \cong \frac{dy(t)}{dt} = -\underbrace{(\omega_c + k_f x(t))}_{d\theta/dt} A \sin\theta(t)$$

… parece una detección de envolvente AM

AM sinusoidal en tiempo discreto

Multiplicación $\leftrightarrow$ Convolución periódica

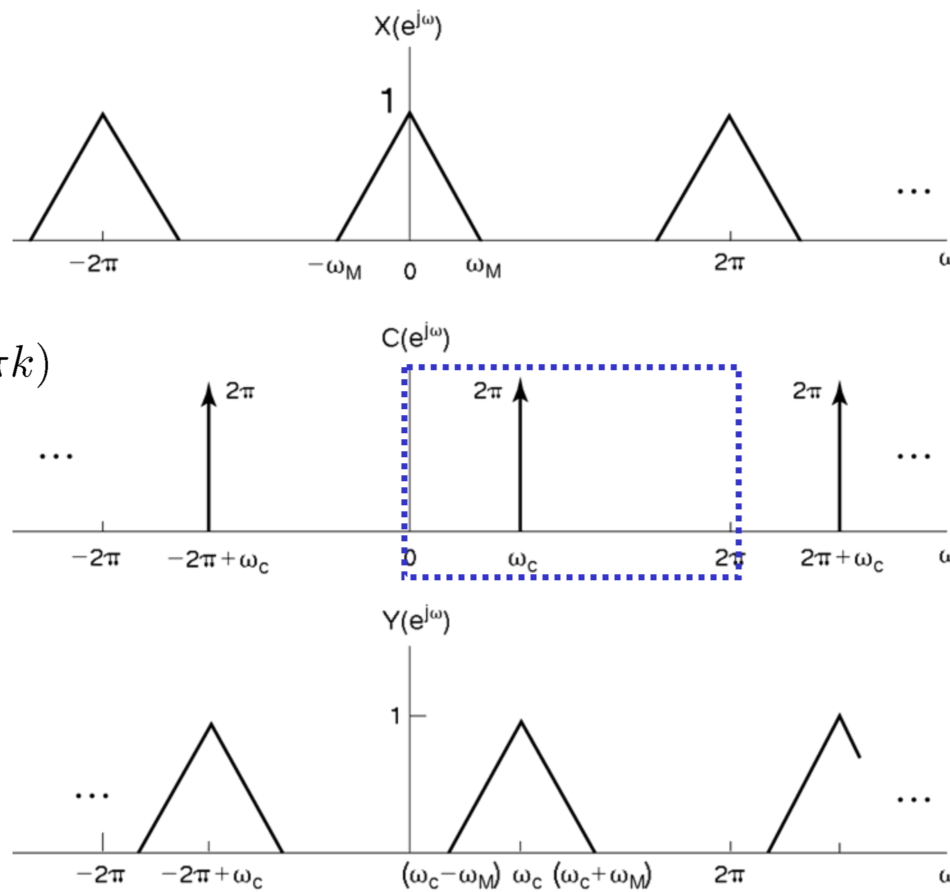
$$y[n] = x[n] \cdot c[n] \leftrightarrow Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\theta}) C(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$

Ejemplo 1:

$$c[n] = e^{j\omega_c n}$$

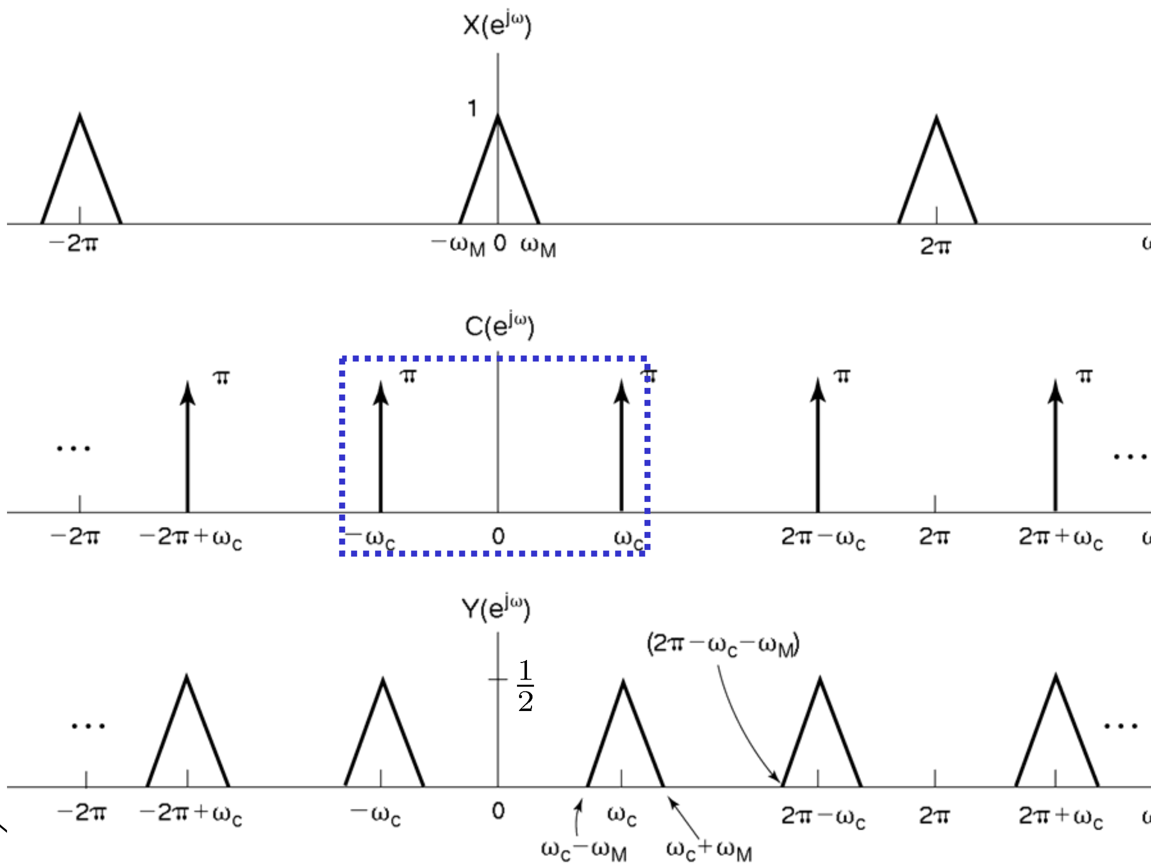
$$\Rightarrow C(e^{j\omega}) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_c + 2\pi k)$$

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) \otimes C(e^{j\omega})$$



Ejemplo : AM sinusoidal

$$\begin{aligned} c[n] &= \cos\omega_c n \\ C(e^{j\omega}) &= \pi\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\omega_c+2\pi k)+\delta(\omega+\omega_c+2\pi k)\right\} \end{aligned}$$



Drawn assuming:
(trazado suponiendo)

$$\omega_c-\omega_M>0 \quad \text{and (y)}$$
$$2\pi-\omega_c-\omega_M>\omega_c+\omega_M$$

i.e.,

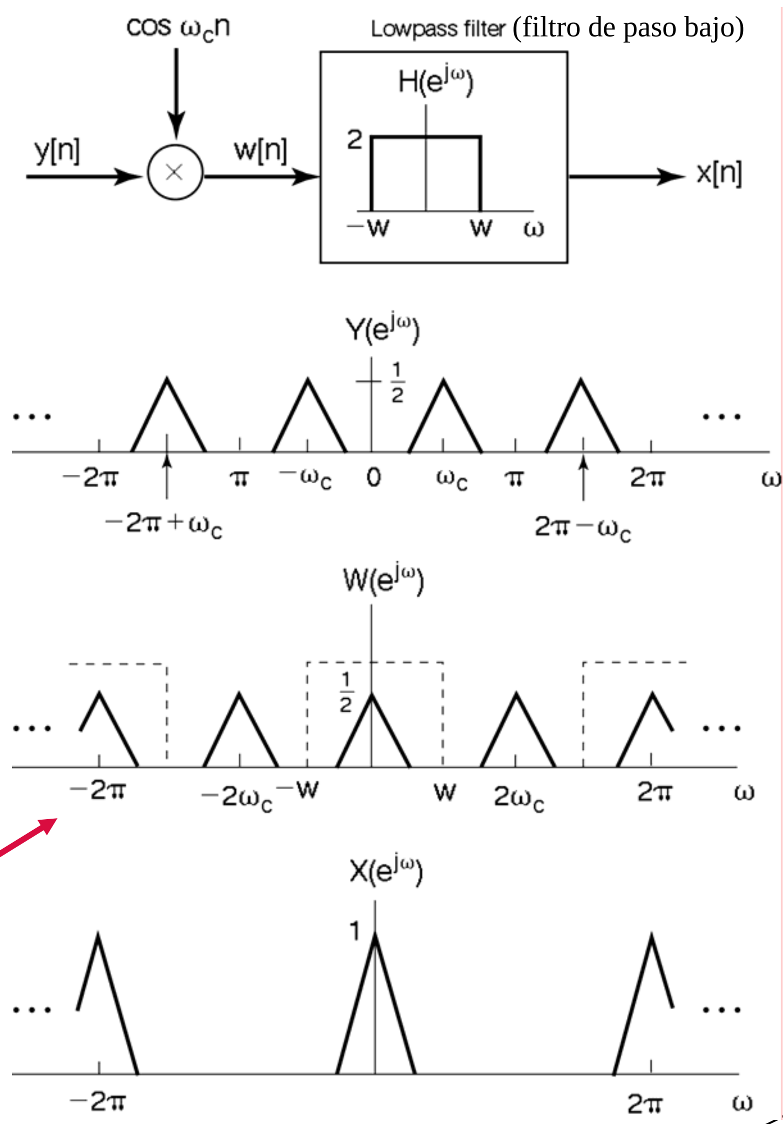
$$\omega_M<\omega_c<\pi-\omega_M$$
$$\Rightarrow \omega_M<\pi/2$$

$$Y(e^{j\omega})=\frac{1}{2\pi}X(e^{j\omega})\otimes C(e^{j\omega})$$

No hay superposición de los espectros desplazados

Ejemplo 2 (continuación): Demodulación

Posible siempre que no exista superposición de las réplicas desplazadas de $X(e^{j\omega})$:



i.e., $\omega_c - \omega_M > 0$
(es decir)
and $\omega_c + \omega_M < 2\pi - \omega_c - \omega_M$
(y)
$\Rightarrow \omega_M < \omega_c < \pi - \omega_M$

$$W(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} Y(e^{j\omega}) \otimes C(e^{j\omega})$$

Trazado engañoso – presentado para un caso muy particular de $\omega_c = \pi/2$

Ejemplo3: un portador periódico arbitrario en tiempo discreto

$$c[n] \quad = \quad \sum_{k=<N>} a_k e^{j2\pi kn/N} = c[n+N], \quad \omega_c = \frac{2\pi}{N}$$

$$C(e^{j\omega}) \quad = \quad 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$$

$$Y(e^{j\omega}) \quad = \quad \frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) \otimes C(e^{j\omega}) - \text{ periodic convolution}$$

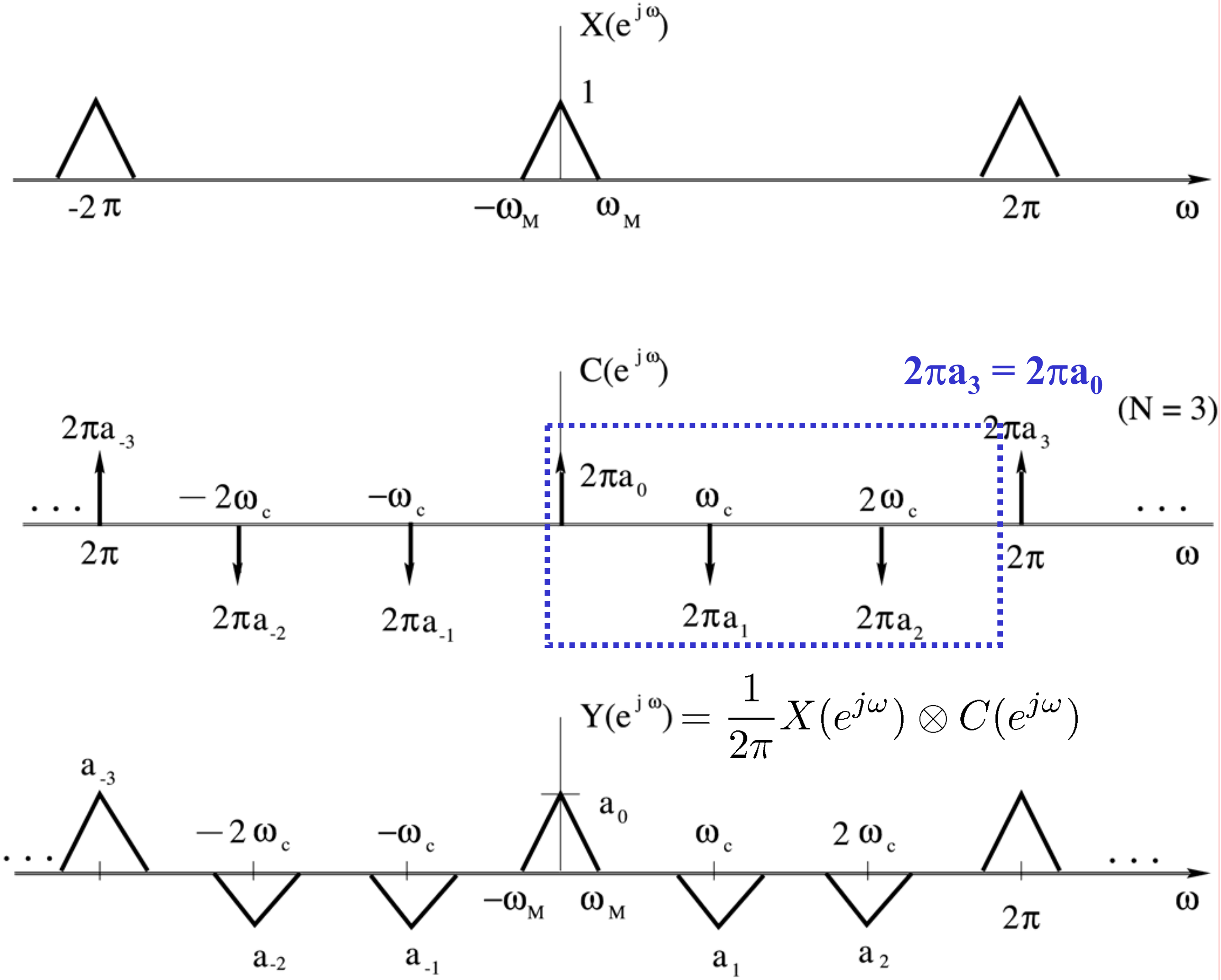
(convolución periódica)

$$= \quad \frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) * \sum_{k=0}^{N-1} 2\pi a_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right) - \text{regular convolution}$$

(convolución regular)

$$= \quad \sum_{k=0}^{N-1} a_k X(e^{j(\omega - 2\pi k/N)})$$

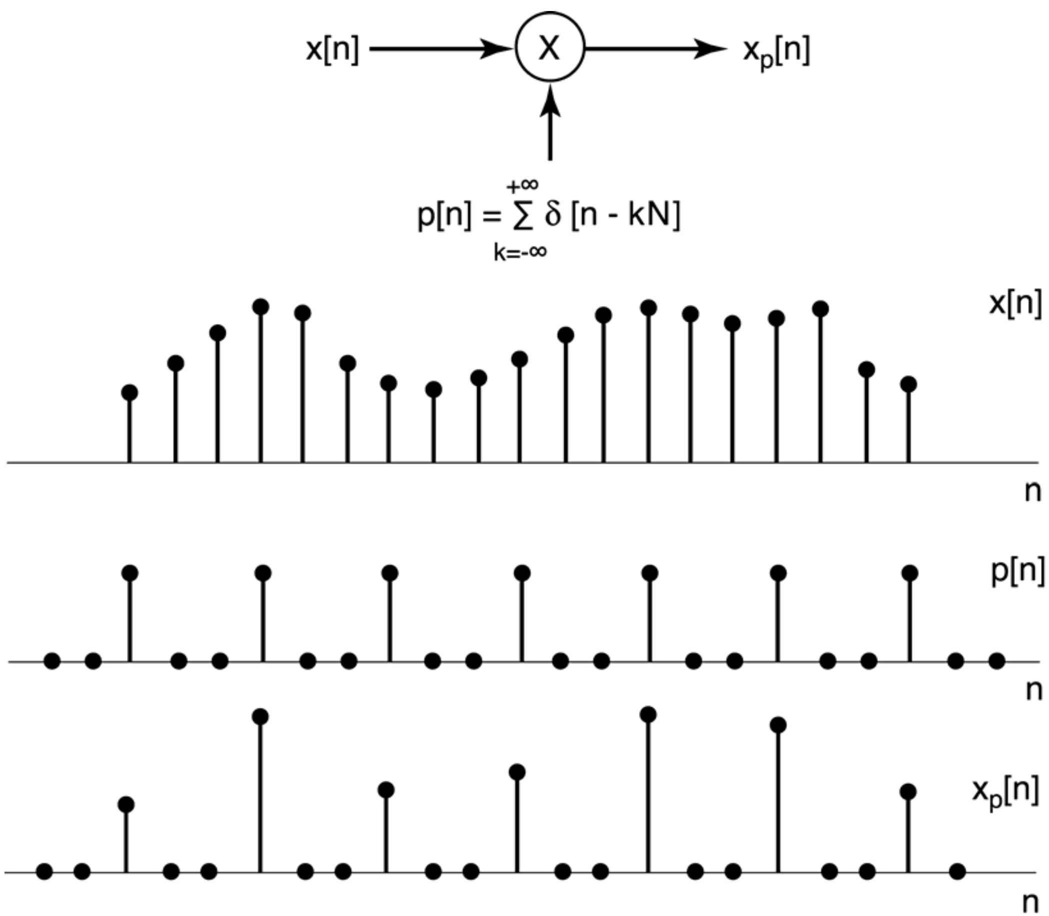
Ejemplo 3 (continuación):



No se da superposición cuando: $\omega_c > 2\omega_M$ (frec. de Nyquist) $\Rightarrow \omega_M < \pi/N$

Muestreo en tiempo discreto

Motivación: reducir el número de puntos de datos que han de transmitirse o almacenarse, *por ejemplo* en una grabación de música en CD.



Muestreo en tiempo discreto (continuación)

$$p[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-kN] \longleftrightarrow P(e^{j\omega}) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s), \quad \omega_s = \frac{2\pi}{N}$$

Note: (Observe:) $x_p[n] = x[n] \cdot p[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[kN]\delta[n-kN]$

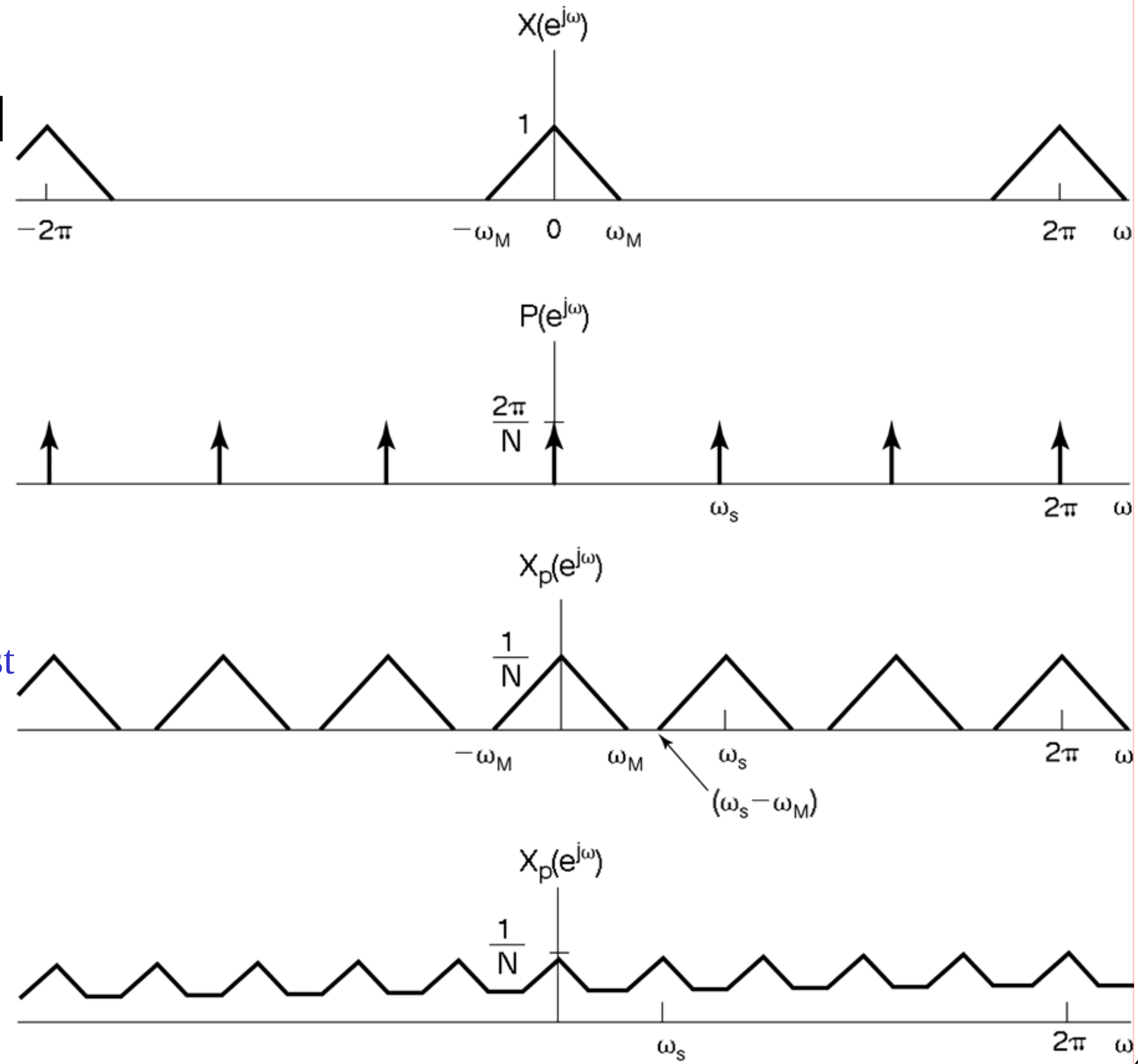
$$x_p[n] = \begin{cases} x[n], & \text{if } n \text{ is integer multiple of } N \text{ (si } n \text{ es un entero múltiplo de } N) \\ 0, & \text{otherwise (de lo contrario)} \end{cases} \Rightarrow \text{ Pick one out of } N \text{ (Seleccione uno de } N)$$

$$X_p(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) \otimes P(e^{j\omega}) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(e^{j(\omega - k\omega_s)})$$

$-$ periodic with period (periódico con periodo) $\omega_s = \frac{2\pi}{N}$

Teorema de muestreo en tiempo discreto

Podemos reconstruir $x[n]$
si $\omega_s = 2\pi/N > 2\omega_M$

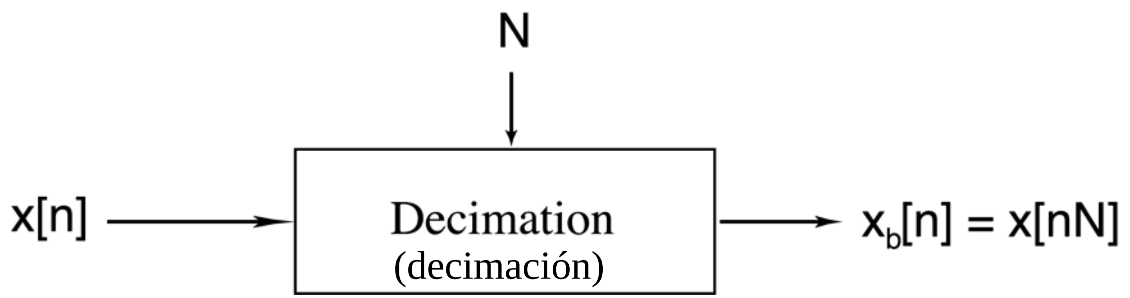


Trazado suponiendo que
$\omega_s > 2\omega_M$
Se cumple la frec. de Nyquist
$\Rightarrow \quad \omega_M < \pi/N$

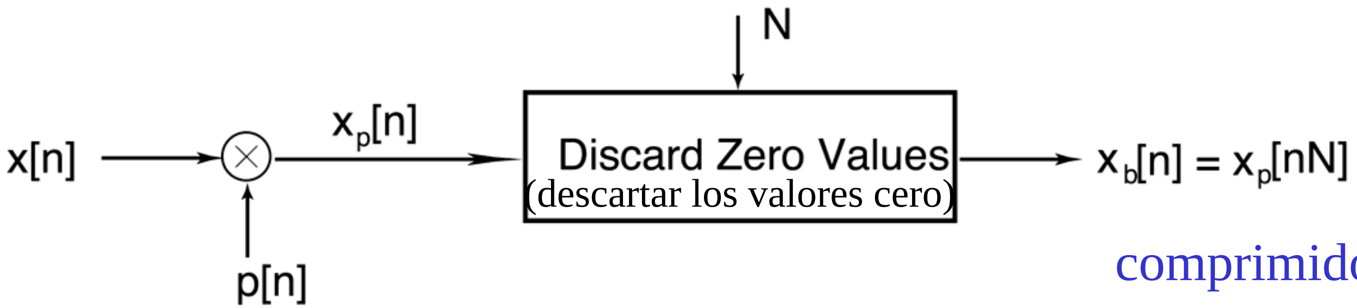
Trazado suponiendo que
$\omega_s < 2\omega_M$
Aliasing

Decimación — ***Downsampling (o submuestreo)***

$x_p[n]$ tiene (n - 1) valores cero entre los valores no cero:
¿Por qué mantenerlos?

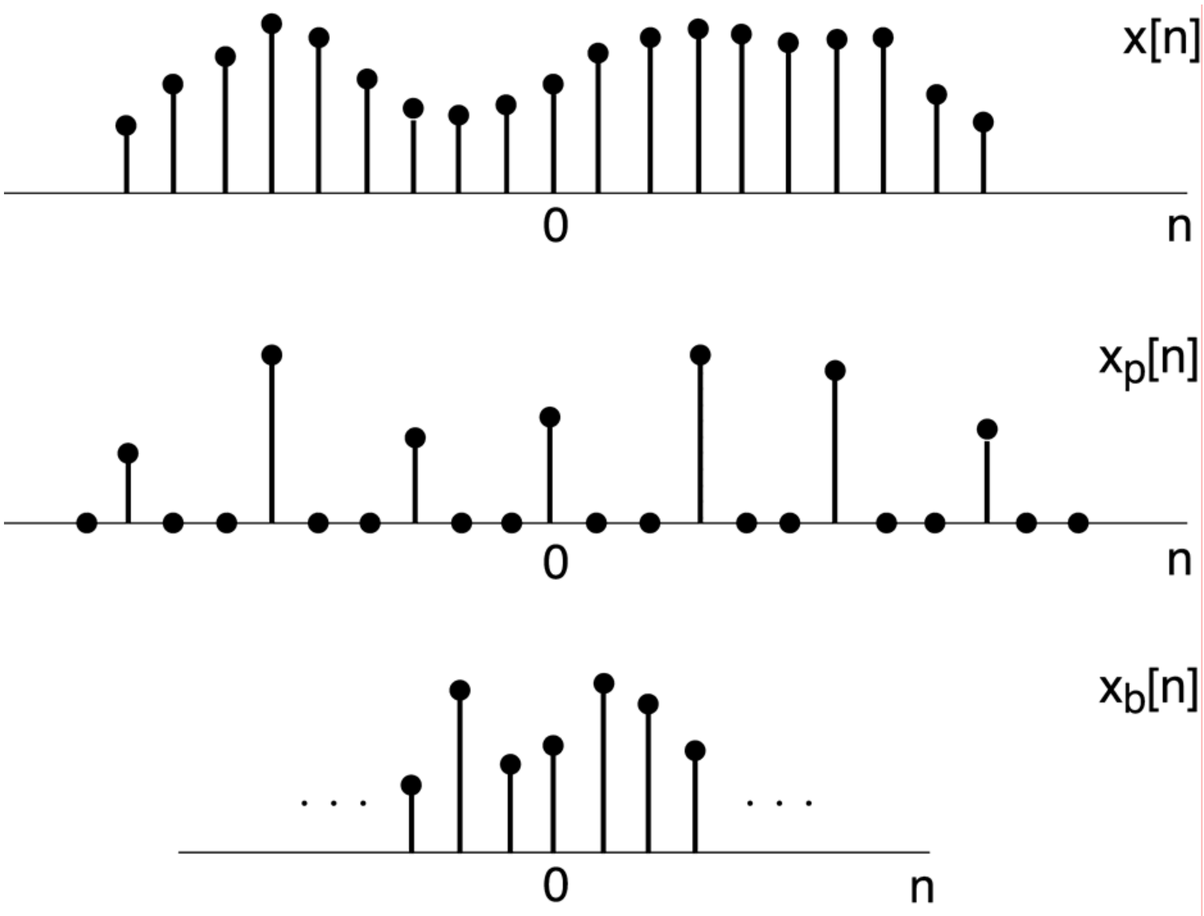


Resulta útil considerar esto como un muestreo seguido de un descarte de los valores cero.



comprimido en
tiempo por N

Ilustración de la decimación en el dominio del tiempo (para $N = 3$)



Decimación en el dominio de la frecuencia

$$X_b(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_b[k]e^{-j\omega k} \quad (x_b[k] = x_p[kN])$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_p[kN]e^{-j\omega k} \qquad \text{Let } n = kN \text{ or } k = n/N$$

(Sea)

$$= \sum_{\substack{n=\text{ an integer}\\ \text{multiple of } N}} x_p[n]e^{-j\omega(n/N)}$$

(n= un entero múltiplo de N)

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_p[n]e^{-j(\omega/N)n} \qquad (\text{Since } x_p[n \neq kN] = 0)$$

(Dado que...)

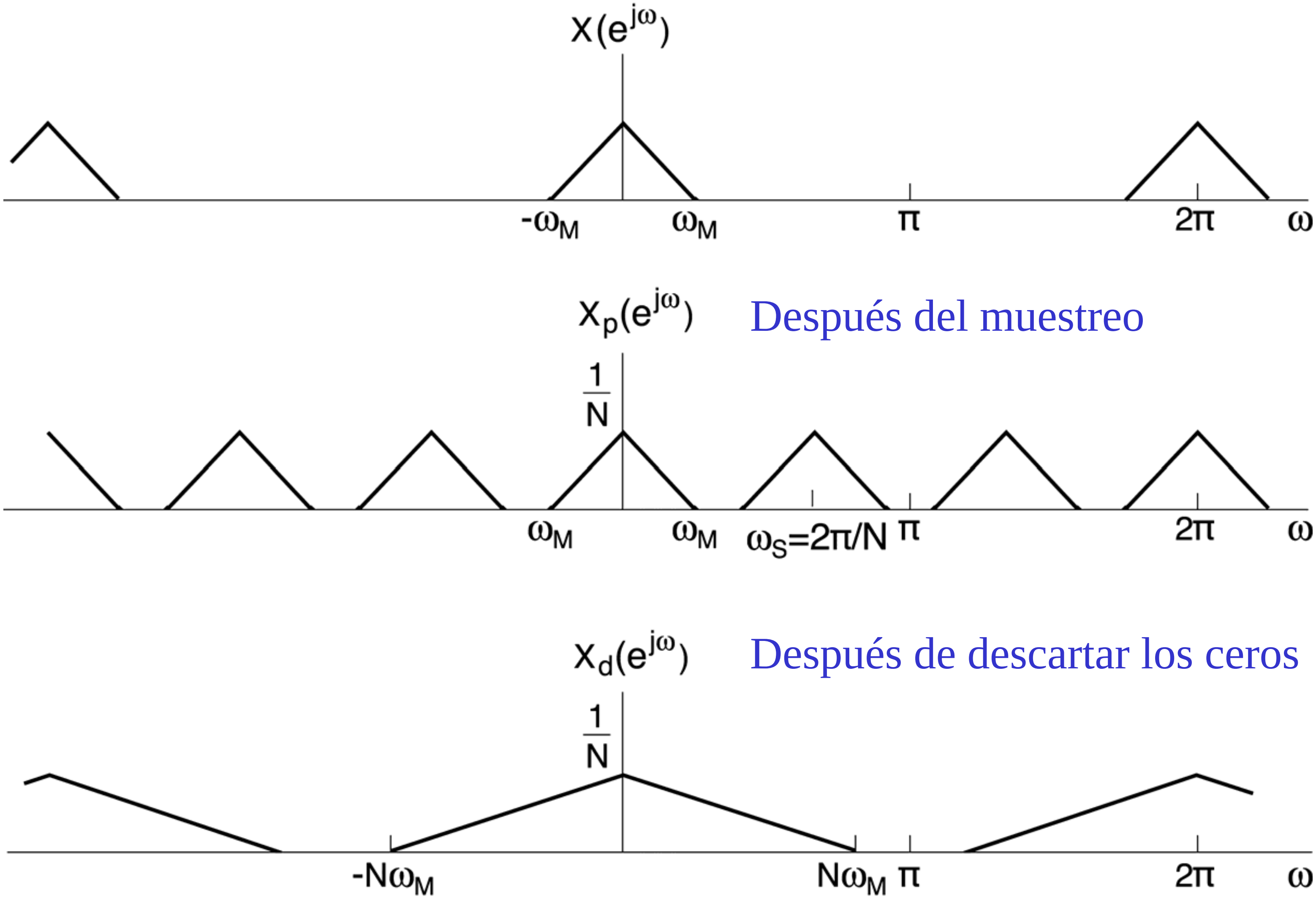
$$= X_p(e^{j(\omega/N)})$$

Recortar en tiempo
Aumentar en frecuencia

- still periodic with period 2π
(sigue siendo un periódico con periodo 2π)

since $X_p(e^{j\omega})$ is periodic with period $2\pi/N$
(Dado que (...) es periódico con periodo ...)

Ilustración de la decimación en el dominio de la frecuencia



La operación inversa: el upsampling (*ej.*, reproducción de CD)