INSTITUTO TECNOLÓGICO DE MASSACHUSETTS
Departamenteo de Ingeniería Eléctrica e Informática

6.003: Señales y sistemas — Otoño 2003

Soluciones del boletín de problemas 4

Ejercicio para estudio en casa - O&W, 3.63

Tenemos un sistema LTI cuya respuesta de frecuencia es:

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq W \\ 0, & |\omega| > W. \end{cases}$$

y que tiene una señal de entrada periódica de tiempo continuo $x(t)$ con las siguiente representación de las series de Fourier:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha^{|k|} e^{jk(\pi/4)t}, \text{ donde } \alpha \text{ es un número real entre } 0 \text{ y } 1$$

¿Cómo debe ser W de grande para que la entrada del sistema tenga al menos un 90% de la energía media por periodo de $x(t)$?

Básicamente, $H(j\omega)$ es un filtro ideal de paso bajo (LPF) y tenemos que hallar la anchura que debe tener para pasar el 90% de su energía media de entrada por periodo (es decir, la potencia media).

En primer lugar, rescribamos la condición anterior relacionada con las potencias medias de la entrada y la salida, con los coeficientes de las series de Fourier a_k y b_k, respectivamente:

$$P_x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 \quad , \quad P_y = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |b_k|^2$$

La condición requerida sería:

$$P_y \geq RP_x \Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} |b_k|^2 \geq R \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 \quad \text{, donde R=0.9} \quad (*)$$

A continuación, calculemos los coeficientes de las series de Fourier de la salida, b_k:

$$\because b_k = a_k H(jk\omega_0) \Rightarrow b_k = \begin{cases} a_k, & |k\omega_0| \leq W \\ 0, & |k\omega_0| > W \end{cases} = \begin{cases} a_k, & |k| \leq W/\omega_0 \\ 0, & |k| > W/\omega_0 \end{cases}$$

Por último, introducimos la expresión de a_k y b_k en la condición requerida y simplificamos.
Si emparejamos la expresión de $x(t)$ con la ecuación de síntesis, podemos deducir que
$\omega_0 = \frac{\pi}{4}$ y $a_k = \alpha^{|k|}$

$$\begin{aligned}
P_x &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\alpha^{|k|}|^2 = 2\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^{2k} - 1 \quad (\because \alpha \text{ es real}) \\
&= \frac{2}{1-\alpha^2} - 1 \quad (\because 0 < |\alpha| < 1)
\end{aligned}$$

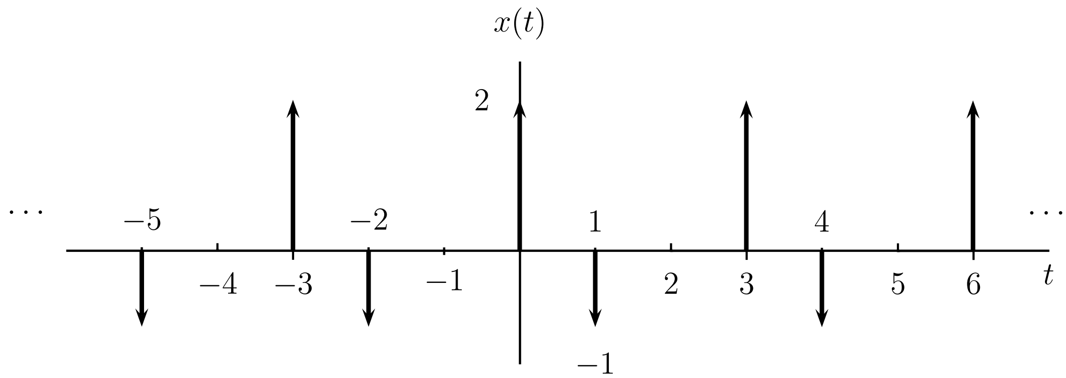
$$\begin{aligned}
P_y &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |b_k|^2 = \sum_{k=-N}^{N} |a_k|^2 \quad \text{, donde } N \text{ es el entero mayor, tal que} \quad N \leq W/\omega_0 \\
&= \sum_{k=-N}^{N} |\alpha^{|k|}|^2 = 2\sum_{k=0}^{N} \alpha^{2k} - 1 \quad (\because \alpha \text{ es real}) \\
&= 2\frac{1-(\alpha^2)^{N+1}}{1-\alpha^2} - 1 \quad \left(\because \sum_{n=0}^{M} \beta^n = \frac{1-\beta^{M+1}}{1-\beta}, \text{ para cualquier complejo } \beta \neq 0\right)
\end{aligned}$$

Introducir $(*)$:

$$\begin{aligned}
2\,\frac{1-(\alpha^2)^{N+1}}{1-\alpha^2} - 1 &\geq R\left(\frac{2}{1-\alpha^2} - 1\right) \\
\frac{2-2\alpha^{2N+2}}{1-\alpha^2} &\geq \left(\frac{2R}{1-\alpha^2} - R + 1\right) \\
\frac{2-2\alpha^{2N+2}}{1-\alpha^2} &\geq \frac{2R + (1-R)(1-\alpha^2)}{1-\alpha^2} \\
2-2\alpha^{2N+2} &\geq R + 1 - (1-R)\alpha^2 \qquad (\because 1-\alpha^2 > 0) \\
2-2\alpha^{2N+2} &\geq 1.9 - 0.1\alpha^2 \qquad \text{(introducir R=0.9)} \\
\alpha^{2N+2} &\leq 0.05 + 0.05\alpha^2 \qquad \text{(simplificar un poco)} \\
(2N+2)\log(\alpha) &\leq \log(0.05 + 0.05\alpha^2) \\
N+1 &\geq \frac{\log(0.05+0.05\alpha^2)}{2\log(\alpha)} \qquad \text{(recuerde que } \alpha < 1 \rightarrow \log(\alpha) < 0) \\
N &\geq \frac{\log(0.05+0.05\alpha^2)}{2\log(\alpha)} - 1
\end{aligned}$$

Una vez seleccionado un entero N que cumpla la desigualdad anterior, se puede seleccionar W de forma que $W \geq N\omega_0$.

Problema 1 Considere el sistema LTI con la respuesta a impulso facilitada en O&W, 3.34. Halle la representación de las series de Fourier de la salida $y(t)$ para la entrada siguiente:



A partir de O&W, 3.34, la respuesta a impulso del sistema LTI es:

$$h(t) = e^{-4|t|}.$$

Por la figura anterior, podemos ver que $x(t)$ tiene un periodo $T = 3 \rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{3}$.

Primero calculamos la respuesta de frecuencia:

$$\begin{aligned}
H(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4|t|}e^{-j\omega t}dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{-4(-t)}e^{-j\omega t}dt + \int_{0}^{\infty} e^{-4(t)}e^{-j\omega t}dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{(4-j\omega)t}dt + \int_{0}^{\infty} e^{(-4-j\omega t)t}dt \\
&= \frac{1}{4-j\omega}e^{(4-j\omega)t}\Big|_{-\infty}^{0} + \frac{1}{-4-j\omega}e^{(-4-j\omega)t}\Big|_{0}^{\infty} \\
&= \frac{1}{4-j\omega}(1-0) + \frac{1}{-4-j\omega}(0-1) \qquad \text{(recuerde que } e^{-\infty+ja} = 0 \text{ para cualquier a real)} \\
&= \frac{1}{4-j\omega} + \frac{1}{4+j\omega} = \frac{4+j\omega+4-j\omega}{16+\omega^2} \\
H(j\omega) &= \frac{8}{16+\omega^2}.
\end{aligned}$$

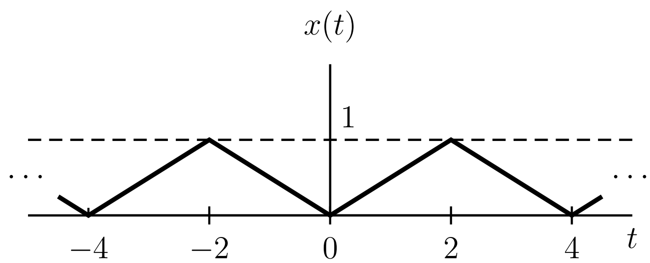
A continuación, hallamos los coeficientes de las series de Fourier de $x(t), a_k$:

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{T}\int_T x(t)\, e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{3}\int_{-1}^{2} [2\delta(t) - \delta(t-1)]\, e^{-jk\omega_0 t} dt \\
&= \frac{1}{3}\left(2e^{-jk\omega_0(0)} - e^{-jk\omega_0(1)}\right) \\
&= \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\, e^{-jk\omega_0}, \text{ para todo } k.
\end{aligned}
$$

Ahora ya podemos hallar b_k, la representación de las series de Fourier de la salida $y(t)$:

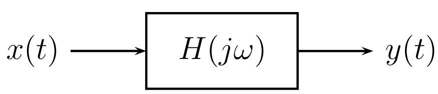
$$
\begin{aligned}
b_k &= a_k H(jk\omega_0) \qquad \text{(O\&W, sección 3.8, pág. 226, en especial la ecuación (3.124))} \\
&= \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\, e^{-jk\omega_0}\right)\left(\frac{8}{16 + (k\omega_0)^2}\right) \\
&= \left(\frac{8}{3}\right) \frac{2 - e^{-jk\frac{2\pi}{3}}}{16 + \left(k\frac{2\pi}{3}\right)^2} \quad , \text{ para todo } k.
\end{aligned}
$$

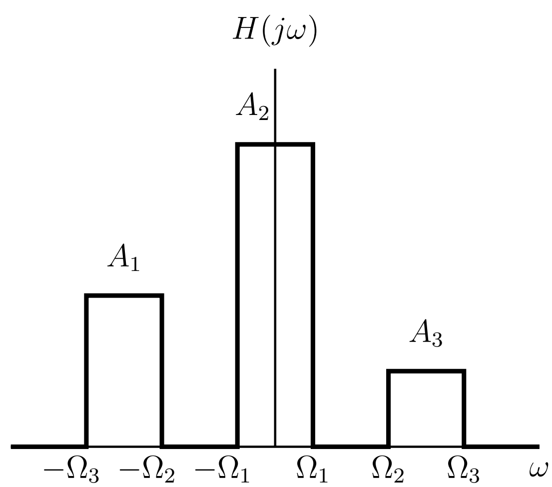
Problema 2 La onda triangular periódica que se muestra a continuación tiene coeficientes de las series de Fourier a_k.



$$a_k = \begin{cases} 2\dfrac{\sin(k\pi/2)}{j(k\pi)^2}e^{-jk\pi/2}, & k \neq 0 \\ \dfrac{1}{2}, & k = 0. \end{cases}$$

Considere el sistema LTI con repuesta de frecuencia $H(j\omega)$ que se indica a continuación:





Determine los valores de A_1, A_2, A_3, Ω_1, Ω_2, y Ω_3 del filtro LTI $H(j\omega)$ tal que:

$$y(t) = 1 - \cos\left(\frac{3\pi}{2}t\right).$$

Al principio, conviene observar que la salida $y(t)$ solamente contiene un componente DC y un único sinusoide con una frecuencia de $\frac{3\pi}{2}$. $H(j\omega)$ es un sistema lineal por lo que la salida sólo tendrá componentes de frecuencia que salgan por la entrada. Sabiendo que la salida $x(t)$ tiene un componente DC y una frecuencia fundamental $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$, diseccionemos $y(t)$ en un componente DC y en exponenciales complejos con frecuencia fundamental $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned} y(t) &= 1 - \cos\left(\frac{3\pi}{2}t\right) = 1 - \frac{e^{j\frac{3\pi}{2}t} - \frac{1}{2}e^{-j\frac{3\pi}{2}t}}{2} \\ &= 1 - \frac{1}{2}e^{j(3)\frac{\pi}{2}t} - \frac{1}{2}e^{j(-3)\frac{\pi}{2}t} \\ &= 1 - \frac{1}{2}e^{j(3)\omega_0 t} - \frac{1}{2}e^{j(-3)\omega_0 t} = \sum_k b_k e^{jk\omega_0 t} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow b_k \begin{cases} 1, & k=0 \\ -\frac{1}{2}, & k=\pm 3 \\ 0, & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

$\because b_k = a_k H(jk\omega_0) \Rightarrow H(jk\omega_0) = \frac{b_k}{a_k}$, para $a_k \neq 0$.

$y(t)$ sólo tiene tres componentes no cero, por lo tanto, $H(j\omega)$ tiene un valor no cero en esos tres componentes, que corresponden a A_1, A_2 y A_3, tal como se indica a continuación:

$$\begin{aligned} H(j(0)\omega_0) &= \frac{b_0}{a_0} = \frac{1}{1/2} = 2 = A_2. \\ H(j(3)\omega_0) &= \frac{b_3}{a_3} = -\frac{1}{2} \div 2\frac{\sin(3\cdot\pi/2)}{j(3\cdot\pi)^2}\, e^{-j(3)\pi/2} \\ &= -\frac{j(9)\pi^2}{4\sin(3\pi/2)}\, e^{j\frac{3\pi}{2}} \\ &= -\frac{j9\pi^2}{4(-1)}(-j) = \frac{9}{4}\pi^2 = A_3. \\ H(j(-3)\omega_0) &= \frac{b_{-3}}{a_{-3}} = -\frac{1}{2} \div 2\frac{\sin(-3\cdot\pi/2)}{j(-3\cdot\pi)^2}\, e^{-j(-3)\pi/2} \\ &= -\frac{j(9)\pi^2}{4\sin(-3\pi/2)}\, e^{j\frac{-3\pi}{2}} \\ &= -\frac{j9\pi^2}{4(1)}(j) = \frac{9}{4}\pi^2 = A_1. \end{aligned}$$

$H(j\omega)$ necesita eliminar el otro componente de frecuencia de $x(t)$ inexistente en la salida $y(t)$.

$$\rightarrow H(jk\omega_0) = 0, \quad \text{para } k \neq 0, \pm 3$$

Para cumplir las condiciones anteriores, se deben seleccionar las frecuencias de corte $\Omega_{1,2,3}$ para que pasen los componentes deseados y se rechacen los no deseados. Las siguientes desigualdades cumplen el requisito:

$$0 < \Omega_1 < (1)\omega_0, \quad (2)\omega_0 < \Omega_2 < (3)\omega_0, \quad (3)\omega_0 < \Omega_3 < (4)\omega_0 \tag{2.1}$$

Será suficiente con seleccionar cualesquiera frecuencias de corte que cumplan (2.1). Digamos, en sentido práctico, que deseamos seleccionar las frecuencias de corte en los puntos medios entre los componentes de frecuencia deseados y los no deseados, lo cual nos proporciona los siguientes valores específicos:

$$\Omega_1 = \frac{(0+1)\omega_0}{2}, \quad \Omega_2 = \frac{(2+3)\omega_0}{2}, \quad \Omega_3 = \frac{(3+4)\omega_0}{2}, \quad \text{donde } \omega_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\rightarrow \Omega_1 = \frac{\pi}{4}, \quad \Omega_2 = \frac{5\pi}{4}, \quad \Omega_3 = \frac{7\pi}{2}.$$

Problema 3 Considere un sistema LTI causal en tiempo discreto cuya entrada $x[n]$ y salida $y[n]$ están relacionadas mediante la siguiente ecuación de diferencias:

$$y[n] - \frac{1}{4}y[n-1] = x[n] + 2x[n-4]$$

Halle la representación de las series de Fourier de la salida $y[n]$ cuando la entrada es:

$$x[n] = 2 + \sin(\pi n/4) - 2\cos(\pi n/2).$$

En primer lugar, hallemos la respuesta de frecuencia del sistema a partir de la ecuación de diferencias inyectando una entrada, $x[n]$, que es una función propia del sistema LTI:

$$x[n] = e^{j\omega n} \rightarrow y[n] = H(e^{j\omega})\, e^{j\omega n}$$

$H(e^{j\omega})$ es la respuesta de frecuencia característica del sistema o la función propia del sistema. Si sustituimos $x[n]$ y $y[n]$ en la ecuación de diferencias tenemos:

$$\begin{aligned}
y[n] - \frac{1}{4}y[n-1] &= x[n] + 2x[n-4] \\
H(e^{j\omega})\, e^{j\omega n} - \frac{1}{4} \cdot H(e^{j\omega})\, e^{j\omega(n-1)} &= e^{j\omega n} + 2 \cdot e^{j\omega(n-4)} \\
H(e^{j\omega})\, e^{j\omega n} - \frac{1}{4} \cdot H(e^{j\omega})\, e^{j\omega n}\, e^{j\omega(-1)} &= e^{j\omega n} + 2 \cdot e^{j\omega n}\, e^{j\omega(-4)} \\
H(e^{j\omega})\, e^{j\omega n} \left[1 - \frac{1}{4}\, e^{-j\omega}\right] &= e^{j\omega n}\left[1 + 2\, e^{-j\omega 4}\right]
\end{aligned}$$

$$\rightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{1 + 2\, e^{-j\omega 4}}{1 - \frac{1}{4}\, e^{-j\omega}}.$$

A continuación, hallamos los coeficientes de las series de Fourier, a_k, de la entrada dada, posiblemente diseccionando la expresión de la entrada en una suma de exponenciales complejos:

$$\begin{aligned}
x[n] &= 2 + \sin(\pi n/4) - 2\cos(\pi n/2) = 2 + \sin(\omega_0 n) - 2\cos(2\omega_0 n), \\
&\qquad \text{donde } \omega_0 = \frac{\pi}{4} \text{ es el factor común mayor para las frecuencias de los sinusoides} \\
&= 2\, e^{j(0)\omega_0 n} + \frac{e^{j\omega_0 n} - e^{-j\omega_0 n}}{2j} - 2 \cdot \frac{e^{j2\omega_0 n} + e^{-j2\omega_0 n}}{2} \\
&= 2\, e^{j(0)\omega_0 n} + \frac{1}{2j}\, e^{j(1)\omega_0 n} - \frac{1}{2j}\, e^{j(-1)\omega_0 n} - e^{j(2)\omega_0 n} - e^{j(-2)\omega_0 n}
\end{aligned}$$

$\because N = 8 \rightarrow a_k$ sólo tiene 8 valores diferenciados y es periódico, con un periodo $N = 8$.

$$\Rightarrow a_k = \begin{cases} -1, & k=-2 \\ -\frac{1}{2j}, & k=-1 \\ 2, & k=0 \\ \frac{1}{2j}, & k=1 \\ -1, & k=2 \\ 0, & k=3,4,5 \end{cases}$$

Por último, hallamos los coeficientes de las series de Fourier, b_k, de la salida $y[n]$:

$$\begin{aligned} b_k &= a_k H(e^{jk\omega_0}) = a_k \cdot \frac{1+2\,e^{-jk\omega_0 4}}{1-\frac{1}{4}\,e^{-jk\omega_0}} = a_k \cdot \frac{1+2\,e^{-jk\frac{\pi}{4}4}}{1-\frac{1}{4}\,e^{-jk\frac{\pi}{4}}} \\ &= a_k \cdot \frac{1+2\,e^{-jk\pi}}{1-\frac{1}{4}\,e^{-jk\frac{\pi}{4}}} \end{aligned}$$

Sólo tenemos algunos coeficientes no cero, con lo cual podemos evaluarlos. Para ello, a veces resulta útil visualizar el vector complejo $e^{jk\theta}$ girando alrededor del círculo unitario mientras se calcula el valor del exponencial complejo. A medida que aumenta el entero k por uno, aumenta el ángulo del vector complejo por un ángulo de θ.

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0 H\left(e^{j(0)\omega_0}\right) = (2)\frac{1+2\,e^{-j(0)\pi}}{1-\frac{1}{4}\,e^{-j(0)\frac{\pi}{4}}} = (2)\frac{1+2}{1-\frac{1}{4}} = \frac{6}{\frac{3}{4}} \\ &= 8 \\ b_1 &= a_1 H\left(e^{j(1)\omega_0}\right) = \left(\frac{1}{2j}\right)\frac{1+2\,e^{-j(1)\pi}}{1-\frac{1}{4}\,e^{-j(1)\frac{\pi}{4}}} = \left(\frac{1}{2j}\right)\frac{1+2(-1)}{1-\frac{1}{4}(\frac{1}{\sqrt{2}}-j\frac{1}{\sqrt{2}})} \\ &= 0.1247 + j\,0.5806 \\ b_{-1} &= a_{-1} H\left(e^{j(-1)\omega_0}\right) = \left(\frac{-1}{2j}\right)\frac{1+2\,e^{-j(-1)\pi}}{1-\frac{1}{4}\,e^{-j(-1)\frac{\pi}{4}}} = \left(\frac{-1}{2j}\right)\frac{1+2(-1)}{1-\frac{1}{4}(\frac{1}{\sqrt{2}}+j\frac{1}{\sqrt{2}})} \\ &= 0.1247 - j\,0.5806 \\ b_2 &= a_2 H\left(e^{j(2)\omega_0}\right) = (-1)\frac{1+2\,e^{-j(2)\pi}}{1-\frac{1}{4}\,e^{-j(2)\frac{\pi}{4}}} = (-1)\frac{1+2(1)}{1-\frac{1}{4}(-j)} \\ &= -2.8235 + j\,0.7059 \\ b_{-2} &= a_{-2} H\left(e^{j(-2)\omega_0}\right) = (-1)\frac{1+2\,e^{-j(-2)\pi}}{1-\frac{1}{4}\,e^{-j(-2)\frac{\pi}{4}}} = (-1)\frac{1+2(1)}{1-\frac{1}{4}(j)} \\ &= -2.8235 - j\,0.7059 \\ b_{3,4,5} &= 0. \end{aligned}$$

Como comprobación a la respuesta, observe que $b_{-k} = b_k^*$ que indica que la salida $y[n]$ es real. Suponemos esto ya que la entrada es real y puesto que el sistema LTI suministra una operación real, es decir, la ecuación de diferencias. También lo suponemos desde un punto de vista matemático porque la entrada es real, es decir, $a_{-k} = a_k^*,$ y $H(e^{-j\omega}) = H^*(e^{j\omega}),$ a partir de la expresión calculada.

Problema 4 Especifique la respuesta de frecuencia de un sistema LTI en tiempo discreto de forma que si la entrada es:

$$x[n] = 2 + \cos(\pi n) - \sin(\pi n/2) + 2\cos(\pi n/4 + \pi/4)$$

la salida sea:

$$y[n] = 4 - 2\sin(\pi n) + 2\cos(\pi n/4).$$

Determinar la respuesta de frecuencia del sistema será una operación directa una vez que desarrollemos las expresiones para $x[n]$ e $y[n]$ en sus componentes exponenciales complejos:

$$\begin{aligned}
x[n] &= 2 + \cos(\pi n) - \sin(\pi n/2) + 2\cos(\pi n/4 + \pi/4) \\
&= 2 + \left(\frac{1}{2}\,e^{j\pi n} + \frac{1}{2}\,e^{-j\pi n}\right) - \left(\frac{1}{2j}\,e^{j\pi n/2} - \frac{1}{2j}\,e^{-j\pi n/2}\right) + 2\left(\frac{1}{2}\,e^{j(\pi n/4+\pi/4)} + \frac{1}{2}\,e^{-j(\pi n/4+\pi/4)}\right) \\
&= 2e^{j0} + \frac{1}{2}\,e^{j\pi n} + \frac{1}{2}\,e^{-j\pi n} - \frac{1}{2j}\,e^{j\pi n/2} + \frac{1}{2j}\,e^{-j\pi n/2} + e^{j\pi n/4}e^{j\pi/4} + e^{-j\pi n/4}e^{-j\pi/4} \qquad (1) \\
y[n] &= 4 - 2\sin(\pi n) + 2\cos(\pi n/4) \\
&= 4 - 2\left(\frac{1}{2j}e^{j\pi n} - \frac{1}{2j}e^{-j\pi n}\right) + 2\left(\frac{1}{2}e^{j\pi n/4} + \frac{1}{2}e^{-j\pi n/4}\right) \\
&= 4e^{j0} - \frac{1}{j}\,e^{j\pi n} + \frac{1}{j}\,e^{-j\pi n} + e^{j\pi n/4} + e^{-j\pi n/4} \qquad (2)
\end{aligned}$$

A continuación, podemos hallar $H(e^{j\omega})$ utilizando los dos enfoques siguientes:

(I) Considere la ecuación (1) como la suma de las funciones propias $e^{j\omega n}$ que comprenden la entrada $x[n]$. Mediante la superposición, la salida $y[n]$ tendrá las mismas funciones propias multiplicadas por los valores propios del sistema, es decir, $e^{j\omega n}H(e^{j\omega})$ (consulte la sección 3.2 de O&W, pág. 183)

$$\begin{aligned}
x[n] &= 2e^{j0} + \frac{1}{2}\,e^{j\pi n} + \frac{1}{2}\,e^{-j\pi n} - \frac{1}{2j}\,e^{j\pi n/2} + \frac{1}{2j}\,e^{-j\pi n/2} + e^{j\pi/4}e^{j\pi n/4} + e^{-j\pi/4}e^{-j\pi n/4} \\
y[n] &= 4e^{j0} - \frac{1}{j}\,e^{j\pi n} + \frac{1}{j}\,e^{-j\pi n} + (0)e^{j\pi n/2} + (0)e^{-j\pi n/2} + e^{j\pi n/4} + e^{-j\pi n/4}
\end{aligned}$$

Si emparejamos las funciones propias de la entrada y la salida, podemos hallar los valores de la respuesta de frecuencia:

$$\rightarrow H(e^{j\omega}) = \begin{cases} -j\,2, & \omega = -\pi \\ e^{j\pi/4}, & \omega = -\frac{\pi}{4} \\ 2, & \omega = 0 \\ e^{-j\pi/4}, & \omega = \frac{\pi}{4} \\ j\,2, & \omega = \pi \\ 0, & \omega = \pm\frac{\pi}{2} \\ ?, & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

El signo de interrogación de la expresión anterior indica que no tenemos información suficiente para determinar la respuesta de frecuencia del sistema a esas frecuencias. La razón es simplemente que la entrada que excitó el sistema no contenía esas frecuencias.

(II) Considere las ecuaciones (1) y (2) como las ecuaciones de síntesis para $x[n]$ e $y[n]$, respectivamente e imagine la frecuencia fundamental, ω_0, como el factor común mayor para las frecuencias de los sinusoides, es decir, $\omega_0 = \frac{\pi}{4}$ y $N = 8$.

$$\begin{aligned} x[n] &= 2e^{j0} + \frac{1}{2}\,e^{j\pi n} + \frac{1}{2}\,e^{-j\pi n} - \frac{1}{2j}\,e^{j\pi n/2} + \frac{1}{2j}\,e^{-j\pi n/2} + e^{j\pi n/4}e^{j\pi/4} + e^{-j\pi n/4}e^{-j\pi/4} \\ &= (2)\,e^{j(0)\omega_0 n} + \left(\frac{1}{2}\right)e^{j(4)\omega_0 n} + \left(\frac{1}{2}\right)e^{j(-4)\omega_0 n} + \left(\frac{-1}{2j}\right)e^{j(2)\omega_0 n} + \left(\frac{1}{2j}\right)e^{j(-2)\omega_0 n} \\ &\quad + \left(e^{j\pi/4}\right)e^{j(1)\omega_0 n} + \left(e^{-j\pi/4}\right)e^{j(-1)\omega_0 n} \\ y[n] &= 4e^{j0} - \frac{1}{j}\,e^{j\pi n} + \frac{1}{j}\,e^{-j\pi n} + e^{j\pi n/4} + e^{-j\pi n/4} \\ &= (4)\,e^{j(0)\omega_0 n} + (j)\,e^{j(4)\omega_0 n} + (-j)\,e^{j(-4)\omega_0 n} + 0 + 0 + (1)\,e^{j(1)\omega_0 n} + (1)\,e^{j(-1)\omega_0 n}, \end{aligned}$$

donde el entero que va entre paréntesis en el exponencial correspondiente al índice k y el número que va entre paréntesis delante del exponencial es el a_k y b_k correspondiente para $x[n]$ e $y[n]$, respectivamente.

$$\because H(e^{jk\omega_0}) = \frac{b_k}{a_k} \rightarrow H(e^{jk\frac{\pi}{4}}) = \begin{cases} -j\,2, & k = -4 \\ e^{j\pi/4}, & k = -1 \\ 2, & k = 0 \\ e^{-j\pi/4}, & k = 1 \\ j\,2, & k = 4 \\ 0, & k = \pm, 2 \\ ?, & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

Problema 5 Calcule la transformada de Fourier de cada una de las isguientes señales:

(a) $x(t) = e^{-|t|}\cos 2t$

Tratar de calcular la transformada de Fourier de *x*(*t*) mediante la ecuación de análisis (O&W, pág. 288) puede requerir una larga integración. En su lugar, utilizaremos las propiedades de la transformada de Fourier.

Sea $x(t) = e^{-|t|}\cos 2t = s(t)p(t)$, donde $s(t) = e^{-|t|}$ y $p(t) = \cos 2t$.
A partir de la propiedad de la multiplicación (O&W, sección 4.5, pág. 322) tenemos:

$$X(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(j\theta)P(j(\omega-\theta))d\theta = \frac{1}{2\pi}S(j\omega) * P(j\omega)$$

A continuación, tenemos que hallar las transformadas de Fourier de *s*(*t*) y *p*(*t*) e introducirlas en la expresión anterior.

A partir del ejemplo 4.2 (O&W, pág. 291): $e^{-a|t|} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \dfrac{2a}{a^2+\omega^2}$

$$\therefore s(t) = e^{-|t|} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} S(j\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$$

A partir de la tabla 4.2 (O&W, pág. 329): $\cos\omega_0 t \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$

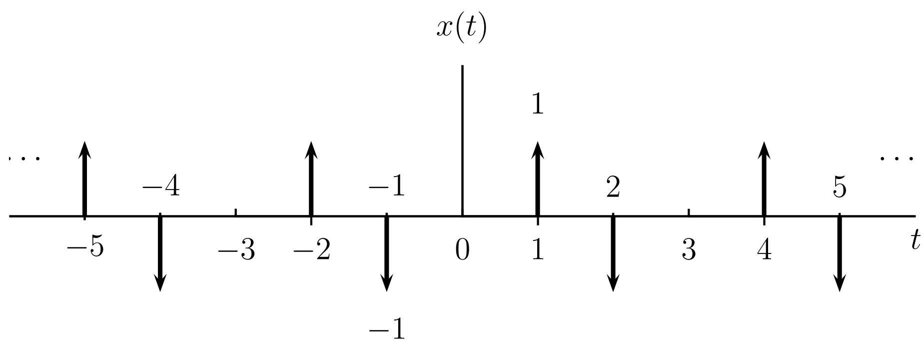
$$\therefore p(t) = \cos 2t \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} P(j\omega) = \pi[\delta(\omega-2)+\delta(\omega+2)]$$

$$\begin{aligned}
X(j\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(j\theta)P(j(\omega-\theta))d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{1+\theta^2}\pi[\delta(\omega-2-\theta)+\delta(\omega+2-\theta)]d\theta \\
&= \frac{1}{1+(\omega-2)^2} + \frac{1}{1+(\omega+2)^2} \quad \left(\text{recordando que} \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\delta(t-t_0)dt = g(t_o)\right)
\end{aligned}$$

Comprobemos de nuevo nuestra respuesta con ayuda de la ecuación de análisis y considerando que la función de coseno se puede expresar como la suma de exponenciales complejos.

$$
\begin{aligned}
X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|} \cos 2t\, e^{-j\omega} dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{t} \cos 2t\, e^{-j\omega} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-t} \cos 2t\, e^{-j\omega} dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{t} \left[\frac{1}{2} e^{j2t} + \frac{1}{2} e^{-j2t}\right] e^{-j\omega} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-t} \left[\frac{1}{2} e^{j2t} + \frac{1}{2} e^{-j2t}\right] e^{-j\omega} dt \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{0} e^{t(1+j2-j\omega)} + e^{t(1-j2-j\omega)} dt + \frac{1}{2} \int_{0}^{\infty} e^{t(-1+j2-j\omega)} + e^{t(-1-j2-j\omega)} dt \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+j2-j\omega} + \frac{1}{1-j2-j\omega} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{-1+j2-j\omega} + \frac{-1}{-1-j2-j\omega} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+j(2-\omega)} + \frac{1}{1-j(2-\omega)} + \frac{1}{1-j(2+\omega)} + \frac{1}{1+j(2+\omega)} \right) \\
&= \frac{1}{1+(2-\omega)^2} + \frac{1}{1+(2+\omega)^2} \quad \text{, que es la misma respuesta.}
\end{aligned}
$$

(b) La señal $x(t)$ indicada a continuación:



Observe que la señal $x(t)$ consta de dos trenes de impulsos con desplazamiento en el tiempo, por lo que utilizaremos la siguiente propiedad de la transformada de Fourier y el par básico de la transformada de Fourier $X(j\omega)$ (véanse las tablas 4.1 y 4.2, O&W, págs. 328-29):

$$
x(t-t_o) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} e^{-j\omega t_o} X(j\omega) \quad , \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)
$$

$$
\begin{aligned}
x(t) &= x_1(t) + x_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT - 1) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT + 1) \quad \text{, donde T=3} \\
\rightarrow X(j\omega) &= \left(e^{-j\omega} - e^{j\omega}\right) \frac{2\pi}{3} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{3}\right) = \frac{4\pi}{3j} \sin\omega \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{3}\right).
\end{aligned}
$$

Problema 6 Determine la señal de tiempo continuo correspondiente a cada una de las transformadas siguientes:

(a) $X(j\omega) = j\left[\delta(\omega+1) - \delta(\omega-1)\right] - 3\left[\delta(\omega-\pi) + \delta(\omega+\pi)\right]$

A partir de la transformada de Fourier de los sinusoides de la tabla 4.2 (O&W, pág. 3.29):

$$\cos\omega_0 t \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \pi\left[\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)\right] \quad , \quad \sin\omega_0 t \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{\pi}{j}\left[\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)\right]$$

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= j\left[\delta(\omega+1) - \delta(\omega-1)\right] - 3\left[\delta(\omega-\pi) + \delta(\omega+\pi)\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\frac{\pi}{j}\left[\delta(\omega-1) - \delta(\omega+1)\right] - \frac{3}{\pi}\pi\left[\delta(\omega-\pi) + \delta(\omega+\pi)\right] \\ &\rightarrow \; x(t) = \frac{1}{\pi}\sin t - \frac{3}{\pi}\cos\pi t. \end{aligned}$$

(b) $X(j\omega) = 2\sin(2\omega - \pi/2)$

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= 2\sin(2\omega-\pi/2) = 2\left(\frac{1}{2j}\,e^{j(2\omega-\frac{\pi}{2})} - \frac{1}{2j}\,e^{-j(2\omega-\frac{\pi}{2})}\right) \\ &= \frac{1}{j}\,e^{j2\omega}e^{-j\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{j}\,e^{-j2\omega}e^{j\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{j}\,e^{j2\omega}(-j) - \frac{1}{j}\,e^{-j2\omega}(j) = -e^{j2\omega} - e^{-j2\omega} \\ &\rightarrow \; x(t) = -\delta(t+2) - \delta(t-2) \quad \text{, de la tabla 4.2 (O\&W, pág. 3.29).} \end{aligned}$$

Por otra parte, también podemos expresar $X(j\omega)$ de la forma:

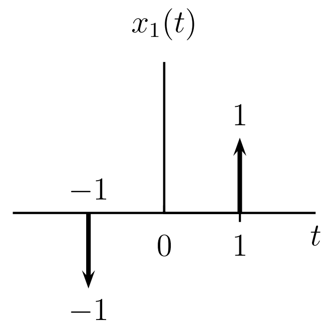
$$X(j\omega) = 2\sin(2\omega-\pi/2) = -2\cos(2\omega)$$

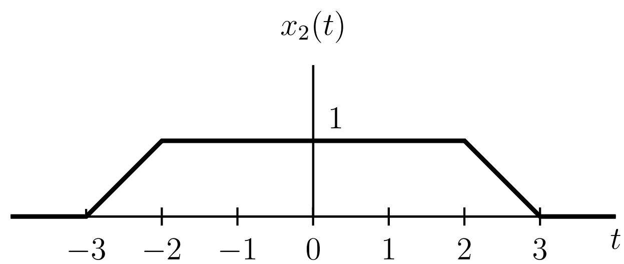
Utilizando la propiedad de la dualidad (O&W, sección 4.3.6, pág. 309):

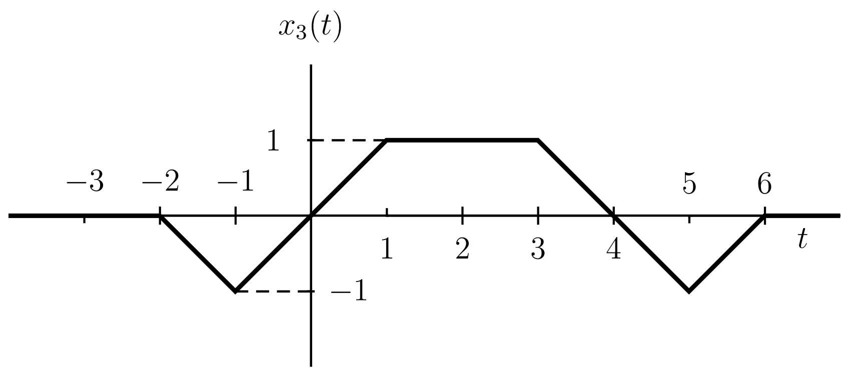
$$\frac{1}{2}\delta(t-t_o) + \frac{1}{2}\delta(t+t_0) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \cos\omega t_o$$

$$\rightarrow x(t) = -2\left[\frac{1}{2}\delta(t-2) + \frac{1}{2}\delta(t+2)\right] = -\delta(t-2) - \delta(t+2).$$

Problema 7 Responda a las preguntas planteadas en O&W, 4.24 (a) para cada una de las señales siguientes:







Determine cual de las señales representadas tienen transformadas de Fourier que cumplan cada una de las condiciones que se indican a continuación, en el caso de que exista alguna de estas señales:

(1) $\Re e\{X(j\omega)\} = 0$

Antes de comprobar esta y otras condiciones, repasemos una propiedad útil de la transformada de Fourier de una señal real $x(t)$:

$\mathcal{E}v\{x(t)\} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \Re e\{X(j\omega)\}, \mathcal{O}d\{x(t)\} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} j\Im m\{X(j\omega)\}$ (O&W, sección 4.3.3, pág. 303).

A continuación, para comprobar esta condición, observe que $X(j\omega)$ no tendrá parte real sólo si $x(t)$ es una función impar, es decir, $x(t)$ solamente tiene un componente impar $\rightarrow x(-t) = -x(t)$. Mediante un examen, es fácil ver que sólo es impar $x_1(t)$. Por lo tanto, esta condición es verdadera para $x_1(t)$ y falsa para $x_2(t)$ y $x_3(t)$. Observe que $x_3(t)$ no se puede describir como par o impar, lo que significa que tiene componentes pares e impares y, por consiguiente, su transformada de Fourier debería tener tanto partes imaginarias como reales.

(2) $\Im m\{X(j\omega)\} = 0$

Al igual que en la condición anterior, $X(j\omega)$ no tendrá parte imaginaria sólo si $x(t)$ es una función par, es decir, $x(t)$ sólo tiene un componente par $\rightarrow x(-t) = x(t)$.
Mediante un examen, $x_2(t)$ es la única señal par y, por tanto, esta condición es verdadera para $x_2(t)$ y falsa para $x_1(t)$ y $x_3(t)$.

(3) Existe un α real tal que $e^{j\alpha\omega}X(j\omega)$ es real.

De nuevo, la única forma de que una señal real tenga una transformada real de Fourier es que dicha señal sea puramente par. El exponencial complejo que se multiplica por $X(j\omega)$ señala al desplazamiento de tiempo (véase O&W, sección 4.3.2, pág. 301). Por lo tanto, esta consición prueba si se puede convertir la señal en par desplazándola en el tiempo.

Esta condición sólo puede ser verdadera para una señal aperiódica si la señal tiene componentes pares e impares. La razón es que para que una señal aperiódica sea par o impar debe existir una simetría. Realizar un desplazamiento de tiempo de dicha señal destruiría esa simetría de forma que la señal no podría ser descrita después como par o impar. Por otra parte, esta afirmación no es cierta en el caso de las señales periódicas. Por ejemplo, las funciones de seno y de coseno son impares y pares, respectivamente, y las unas se puede convertir en las otras mediante un desplazamiento de tiempo (por ejemplo, mediante un desplazamiento de tiempo de un cuarto de periodo).

Volviendo a las tres señales de las que disponemos:
$x_1(t)$ es impar y no puede convertirse en par mediante un desplazamiento de tiempo, como explicamos.
$x_2(t)$ ya es par $\rightarrow$ cumple la condición, con $\alpha = 0$.
$x_3(t)$ es simétrica par aproximadamente en $t = 2$ $\rightarrow$ cumple la condición, con $\alpha = 2$.

(4) $\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)d\omega = 0$

Manipulemos un poco la integral para observar que esta condición simplemente significa que $x(0) = 0$:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)d\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega(0)}d\omega = 2\pi\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega(0)}d\omega\right] \\
&= 2\pi\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega\right]_{t=0} \\
&= 2\pi\, x(0) \quad \text{(ecuación de síntesis: O\&W, sección 4.1.1, pág. 288)}
\end{aligned}$$

Al examinar los valores de las señales en $t = 0$, podemos ver que esta condición es verdadera para $x_1(t)$ y $x_3(t)$ y falsa para $x_2(t)$.

(5) $\int_{-\infty}^{\infty} \omega X(j\omega) d\omega = 0$

Al igual que en la condición anterior, manipulemos un poco la integral:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \omega X(j\omega) d\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} \omega X(j\omega) e^{j\omega(0)} d\omega = \frac{2\pi}{j} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} j\omega X(j\omega) e^{j\omega(0)} d\omega \right] \\
&= \frac{2\pi}{j} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} j\omega X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \right]_{t=0} \\
&= \frac{2\pi}{j} \frac{d}{dt} x(t) \bigg|_{t=0} \quad \text{, de la propiedad de diferenciación en el tiempo}
\end{aligned}$$

Si comprobamos la condición en la que $x_i'(0) = 0$, podemos ver que es verdadera para $x_1(t)$ y $x_2(t)$ y falsa para $x_3(t)$.

(6) $X(j\omega)$ es periódico.

Una forma de comprobar esta condición sería utilizando la relación de Parseval para señales aperiódicas:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega \qquad \text{(O\&W, sección 4.3.7, pág. 312)}$$

El valor calculado en cada lado de la ecuación anterior es la energía de la señal.

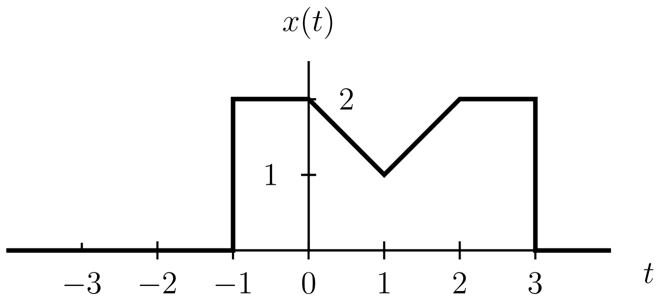
En general, una señal finita real tendría energía finita si la señal fuese limitada en el tiempo, es decir si existiese $\alpha > 0$, tal que $x(t) = 0$, para $|t| > \alpha$. Por el contrario, una señal finita real periódica tiene potencia finita y energía infinita.

Igualmente, una señal con una transformada de Fourier periódica tiene energía infinita, lo que significa, según el teorema de Parseval, que una señal con energía finita no tendrá una transformada de Fourier periódica. Para consultar la discusión sobre este tema, véase la sección 4.1.2, O&W, pág. 289.

Si utilizamos este enfoque, podemos ver que $x_2(t)$ y $x_3(t)$ tienen energía finita, es decir, $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 d < \infty$, y, por consiguiente no tienen una tranformada de Fourier periódica.

Un impulso es no finito, por lo que no podemos aplicar la prueba anterior en $x_1(t)$. Sin embargo, observe que *x*(*t*) tiene un gran parecido con la transformada de Fourier de una onda sinusoidal (véase la tabla 4.3, O&W, pág. 329). Por dualidad, esto indica que $X_3(j\omega)$ será sinusoidal y, por consiguiente, es periódico.

Problema 8 O&W, 4.25.
$X(j\omega)$ indica la transformada de Fourier de la señal *x*(*t*) que se muestra en la figura P4.25.



(a) $X(j\omega)$ se puede escribir como $A(j\omega)e^{j\theta(j\omega)}$, donde $A(j\omega)$ y $\theta(j\omega)$ son reales. Halle $\theta(j\omega)$.
$X(j\omega) = A(j\omega)e^{j\theta(j\omega)} = |X(j\omega)|e^{j\angle X(j\omega)}$
$\because x(t)$ es simétrico aproximadamente *t* = 1 (a partir de la figura P4.25, trazada de nuevo anteriormente).
$\rightarrow$ una señal $g(t) = x(t+1)$ es simétrica aproximadamente t=0
$\rightarrow g(t)$ es par $\rightarrow G(j\omega)$ es real.

$$\therefore x(t) = g(t-1) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(j\omega) = G(j\omega)e^{-j\omega(1)} = A(j\omega)e^{j\theta(j\omega)}$$

Antes de repasar el último paso para hallar $\theta(j\omega)$, subrayemos un matíz importante:
Si suponemos que $A(j\omega) = |X(j\omega)|$ y $\theta(j\omega) = \angle X(j\omega)$, pude que resulte imposible hallar $\theta(j\omega)$ sin calcular, en realidad, $\angle G(j\omega)$. Sin embargo, hemos de resolver este problema sin evaluar explícitamente ninguna de las transformadas de Fourier. La razón es que, aunque $G(j\omega)$ es real, no significa que $\angle G(j\omega) = 0$. Esto es así porque $G(j\omega)$ tendría un valor negativo en algún rango de ω. En este caso, $\angle G(j\omega) = \pm\pi$, ya que, por definición, la magnitud tiene que ser positiva.
Afortunadamente, existe una solución para este dilema: la única restricción que tenemos es que $A(j\omega)$ y $\theta(j\omega)$ sean reales. Si incluimos la señal de $X(j\omega)$ en $A(j\omega)$, en cuyo caso $A(j\omega)$ sigue siendo real, pero no necesariamente positivo, entonces ya lo tenemos. En este caso:

$$\because X(j\omega) = G(j\omega)e^{-j\omega(1)} = A(j\omega)e^{j\theta(j\omega)} \text{ y } \because G(j\omega) \text{ es real}$$

$\therefore$ una correspondencia posible de LHS y RHS es:

$$A(j\omega) = G(j\omega) \quad \text{y} \quad e^{j\theta(j\omega)} = e^{-j\omega(1)} = e^{-j\omega}$$
$$\rightarrow \theta(j\omega) = -\omega.$$

(b) Halle $X(j0)$

$$\begin{aligned} X(j0) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega(0)}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt = (\text{área total bajo la curva}) \\ X(j0) &= 2[3-(-1)] - (1)(1) = 7. \end{aligned}$$

(c) Halle $\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)d\omega$.

$$\because x(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)d\omega \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)d\omega = 2\pi x(0) = 2\pi(2) = 4\pi.$$

(d) Evalúe $\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\frac{2\sin\omega}{\omega}\, e^{j2\omega}d\omega$.

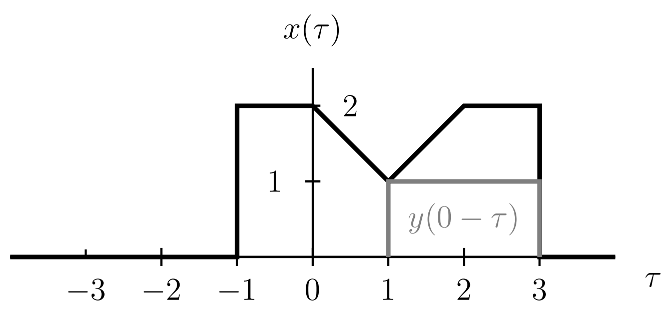
Sea $Y(j\omega) = \frac{2\sin\omega}{\omega}\, e^{j2\omega}$, por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\frac{2\sin\omega}{\omega}\, e^{j2\omega}d\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)Y(j\omega)d\omega \\
&= 2\pi\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)Y(j\omega)e^{j\omega(0)}d\omega\right] \\
&= 2\pi\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)Y(j\omega)e^{j\omega t}d\omega\right]_{t=0} \\
&= 2\pi\left[x(t)*y(t)\right]_{t=0} \quad \text{(véase la sección 4.4 de O\&W, pág. 314)}
\end{aligned}$$

Sabiendo que $g(t) = \begin{cases} 0, & |t| < T_1 \\ 1, & |t| > T_1 \end{cases} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{2\sin\omega T_1}{\omega}$ (de la tabla 4.2 de O&W, pág. 329 o el ejemplo 4.4, pág. 293), por lo tanto:

$$y(t) = \begin{cases} 1, & -3 < t < -1 \\ 0, & \text{de lo contrario} \end{cases} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} Y(j\omega) = \frac{2\sin\omega(1)}{\omega}e^{j\omega(2)}$$

$\rightarrow x(t)*y(t)|_{t=0} = \int_{1}^{3} x(\tau)d\tau = 3.5$ (como muestra la siguiente figura que indica la convolución)



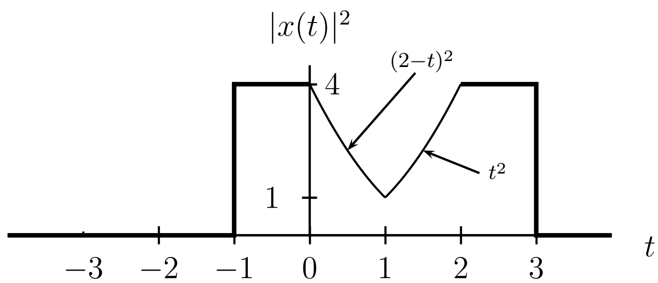
$$\rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\frac{2\sin\omega}{\omega}\, e^{j2\omega}d\omega = 2\pi(3.5) = 7\pi.$$

(e) Evalúe $\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$

A partir del teorema de Parseval:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega \qquad \text{(O\&W, sección 4.3.7, pág. 312)}$$

$$\begin{aligned}
\rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \\
&= 2\pi \left[\int_{-1}^{0} (2)^2 dt + \int_{0}^{1} (2-t)^2 dt + \int_{1}^{2} (t)^2 dt + \int_{2}^{3} (2)^2 dt \right] \\
&= 2\pi \left[4 + \left.\frac{(2-t)^3}{-3}\right|_0^1 + \left.\frac{t^3}{3}\right|_1^2 + 4 \right] = 2\pi \left[4 - (\frac{1}{3} - \frac{8}{3}) + \frac{8}{3} - \frac{1}{3} + 4 \right] \\
&= 2\pi \left(\frac{38}{3} \right) = \frac{76\pi}{3}.
\end{aligned}$$



Observe que una propiedad útil de la transformada de Fourier que hemos utilizado muchas veces es ahora la siguiente:

$$2\pi x(0) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) d\omega, \text{ y por dualidad : } \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(j0).$$

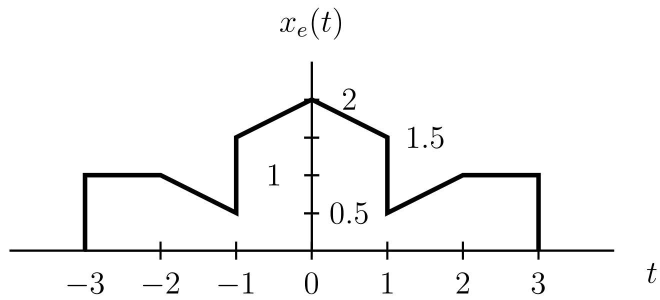
(f) Dibuje la transformada inversa de Fourier de $\Re e\{X(j\omega)\}$.

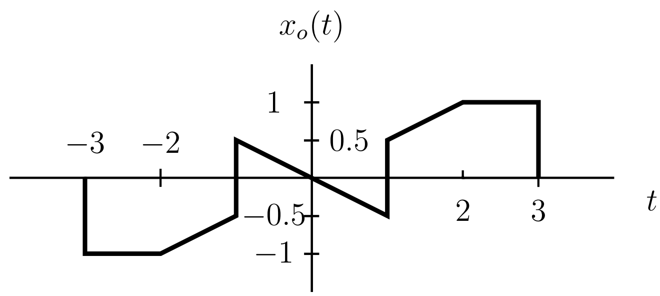
La clave para responder a esta pregunta está en recordar que la parte real de una transformada de Fourier corresponde a la parte par de la señal (como se discutió en el problema 7):

$$\mathcal{E}v\{x(t)\} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \Re e\{X(j\omega)\}, \mathcal{O}d\{x(t)\} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} j\Im m\{X(j\omega)\} \quad \text{(O\&W, sección 4.3.3, pág. 303).}$$

Para resolver la parte par, utilizamos la fórmula siguiente:

$$x_e = \mathcal{E}v\{x(t)\} = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)] \quad , \quad x_o = \mathcal{O}d\{x(t)\} = \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)]$$





Conviene comprobar que $x_o(t) + x_e(t) = x(t)$. Observe que el dibujo para la parte impar de $x(t)$ que se incluye aquí a modo de ejemplo no era necesario en el problema original.

Como apunte final, podemos vernos tentados a hallar la transformada inversa de Fourier de $\Re e\{X(j\omega)\}$ desplazando $x(t)$ a la izquierda una unidad y, de este modo, haciendo que sea simétrico, lo cual nos daría una transformada real de Fourier. Sería más fácil convercerse uno mismo de la falsedad de ese método, si recuerda que el desplazamiento de una señal en el tiempo modifica el ángulo de su transformada de Fourier, pero no afecta a la magnitud. Esto significa que la parte real de la transformada de Fourier de una señal cambia con el desplazamiento de tiempo de esa misma señal. (Sugerencia: $Ae^{j\theta} = A\cos\theta + jA\sin\theta$).