INSTITUTO TECNOLÓGICO DE MASSACHUSSETS
Departamento de Ingeniería Eléctrica e Informática

6.003: Señales y sistemas – Otoño 2003

Soluciones del boletín de problemas 1

(E1) (O&W, 1.54)

(a) Para el caso de $r = 1$ tenemos:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{n=N-1} 1 &= 1 + 1^1 + 1^2 + \cdots + 1^{N-1} \\ &= N\end{aligned}$$

Para $r \neq 1$, si llevamos a cabo la división larga, observamos que:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-r} &= 1 + r + r^1 + r^2 + \cdots + r^{N-1} + \frac{r^N}{1-r} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} r^n + \frac{r^N}{1-r} \\ \sum_{n=0}^{N-1} r^n &= \frac{1-r^N}{1-r}\end{aligned}$$

(b) Utilizando la fórmula que derivamos para $r \neq 1$, tenemos:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} r^n &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N-1} r^n \\ &= \lim_{N\to\infty} \frac{1-r^N}{1-r} \\ &= \frac{1}{1-r} - \lim_{N\to\infty} \frac{r^N}{1-r}\end{aligned}$$

Si $|r| < 1$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{r^N}{1-r} = 0$$

Por lo tanto,

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$$

(c)

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} n\alpha^n &= \alpha + 2\alpha^2 + 3\alpha^3 + \cdots \\ &= \alpha\left(1 + 2\alpha + 3\alpha^2 + \cdots\right)\end{aligned}$$

A continuación, podemos separar los contenidos de los paréntesis del lado derecho (RHS) de la ecuación anterior tal como se indica a continuación:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} n\alpha^n &= \alpha\left(1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha + 2\alpha^2 + 3\alpha^3 + \cdots\right) \\ &= \alpha\left(1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots\right) + \alpha\left(\alpha + 2\alpha^2 + 3\alpha^3 + \cdots\right)\end{aligned}$$

Observe que los contenidos del segundo paréntesis del RHS son precisamente la expresión que tratamos de evaluar:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} n\alpha^n &= \alpha\left(1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \sum_{n=0}^{\infty} n\alpha^n\right) \\ (1-\alpha)\sum_{n=0}^{\infty} n\alpha^n &= \alpha\left(1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots\right) \\ &= \alpha\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n\end{aligned}$$

Utilizando el resultado del apartado (b) para $|\alpha| < 1$,

$$\begin{aligned}(1-\alpha)\sum_{n=0}^{\infty} n\alpha^n &= \frac{\alpha}{1-\alpha} \\ \sum_{n=0}^{\infty} n\alpha^n &= \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}\end{aligned}$$

(d)

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=k}^{\infty} \alpha^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n - \sum_{n=0}^{k-1} \alpha^n \\
&= \frac{1}{1-\alpha} - \frac{1-\alpha^k}{1-\alpha} \\
&= \frac{\alpha^k}{1-\alpha}.
\end{aligned}
$$

Problema 1

(a) En este problema, convertimos la parte en forma cartesiana a forma polar y procedemos a partir de ahí:

$$\begin{aligned}\angle\ \left(\sqrt{3}+j\right) &= \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\\ &= \pi/6\\ |\sqrt{3}+j| &= \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}\\ &= 2\\ \sqrt{3}+j &= 2\mathrm{e}^{\pi/6}.\end{aligned}$$

Si introducimos esto en la expresión que deseamos evaluar, obtenemos:

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{3}+j\right)^5\mathrm{e}^{-j\pi/3} &= \left(2\mathrm{e}^{j\pi/6}\right)^5\mathrm{e}^{-j\pi/3}\\ &= 2^5\mathrm{e}^{j5\pi/6}\cdot\mathrm{e}^{-j\pi/3}\\ &= 32\mathrm{e}^{j\pi/2}\end{aligned}$$

Podemos representar esto de forma gráfica como se indica a continuación:

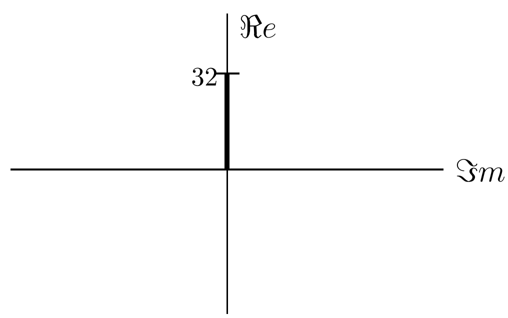


Figura 1.1a: diagrama de magnitud y de fase

Problema 2

(a) Se puede resolver este problemas por etapas. Primero invertimos la señal:

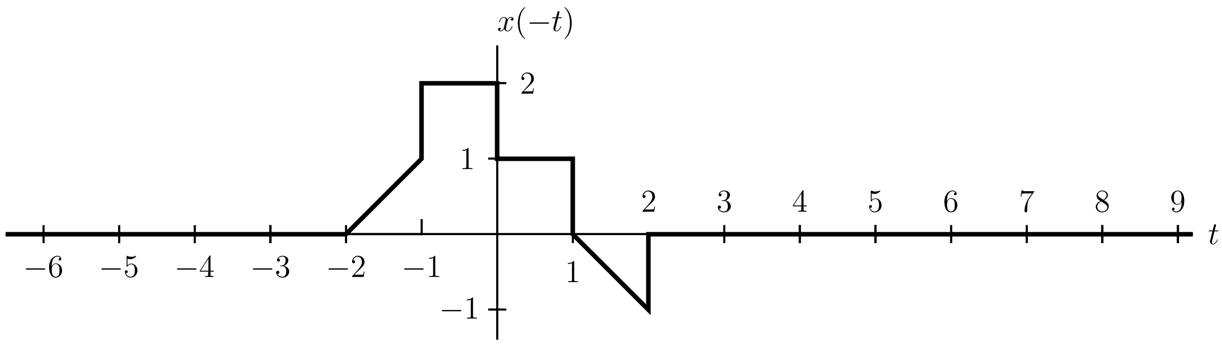


Figura 2.a.1: $x(-t)$

A continuación, realizamos el eje de tiempo a escala $\frac{1}{3}$:

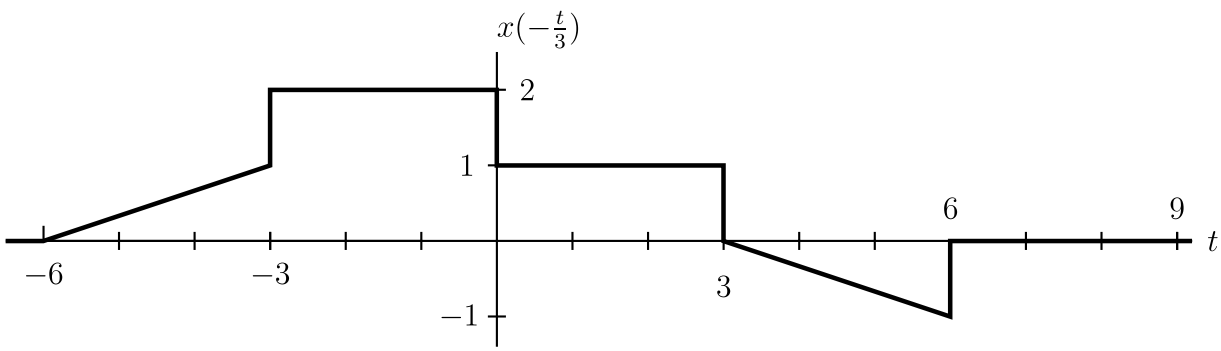


Figura 2.a.2: $x(-\frac{t}{3})$

A continuación, cambiamos por 3 ya que el eje de tiempo se ha reducido por 3:

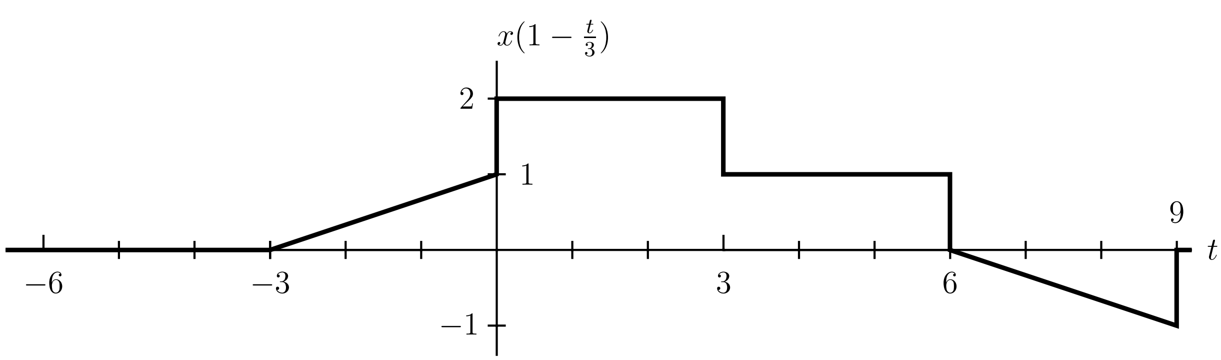


Figura 2.a.3: $x(1-\frac{t}{3})$

(b) En este apartado, trazamos las señales individuales implicadas y tomamos la suma de los productos:

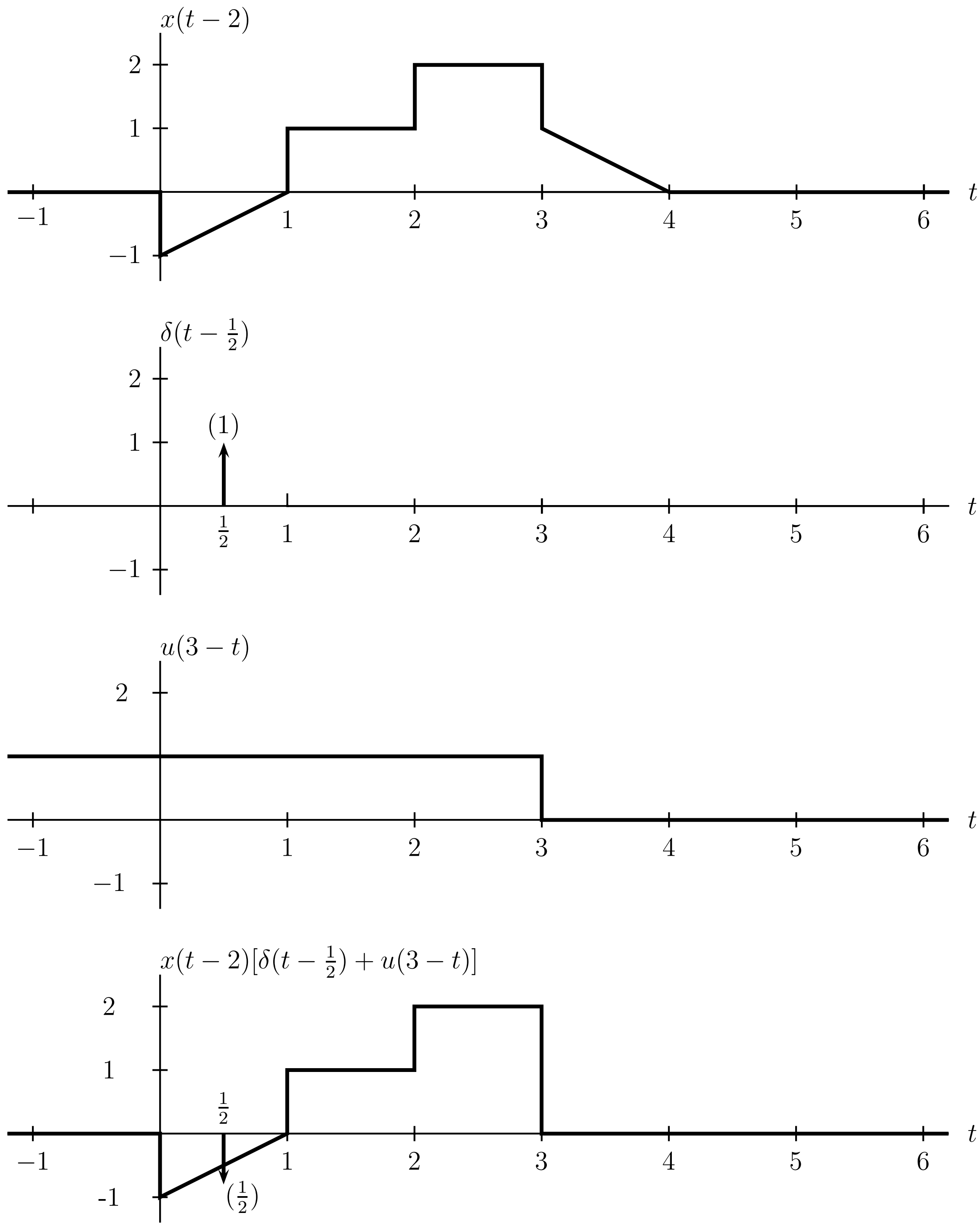
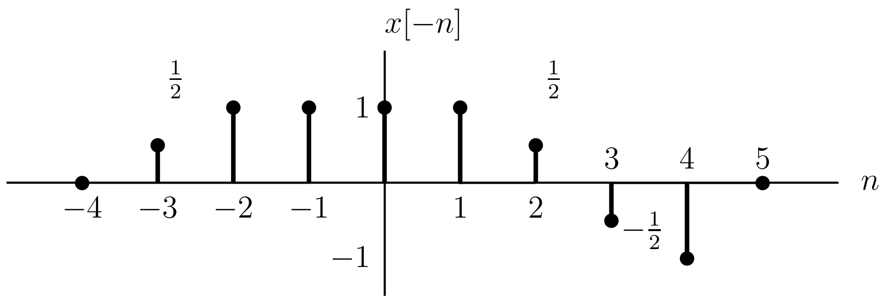
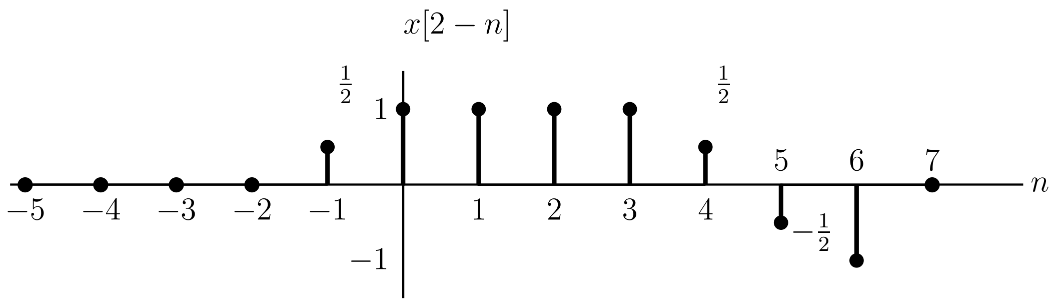


Figura 2.b: $x(t-2)[\delta(t-\frac{1}{2})+u(3-t)]$

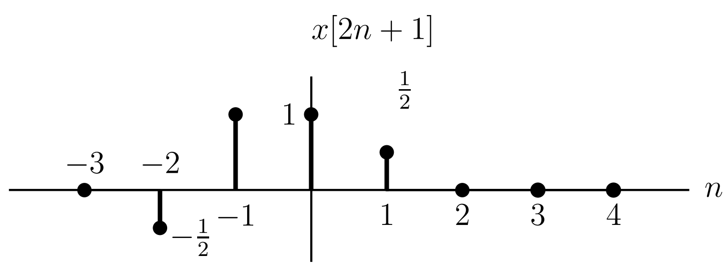
Problema 3

(a) Se puede resolver este problema en dos etapas. Primero invertimos la señal y, a continuación, cambiamos por 2:





(b) Todo lo que tenemos que hacer con la expresión es tomar cada muestra impar. Cuando introduzca $n = 0, n = 1, n = 2 \cdots$ en la expresión $2n + 1$, obtendrá las muestras impares de la señal original, tal como se indica a continuación:



Problema 4

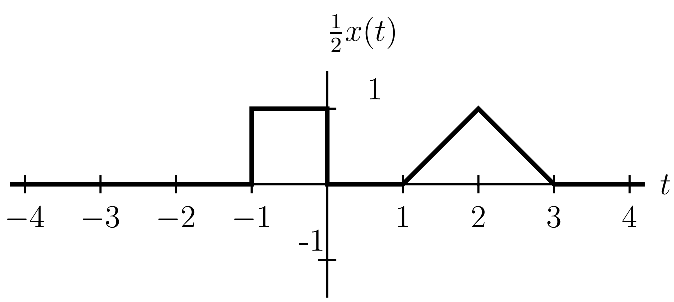
Para hallar la parte par $x_e(t)$ de una señal $x(t)$, utilizamos la siguiente relación:

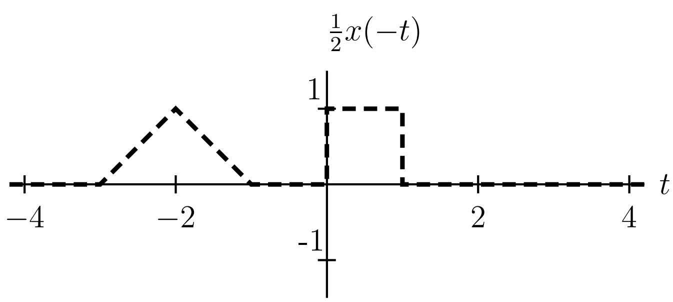
$$x_e(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2}.$$

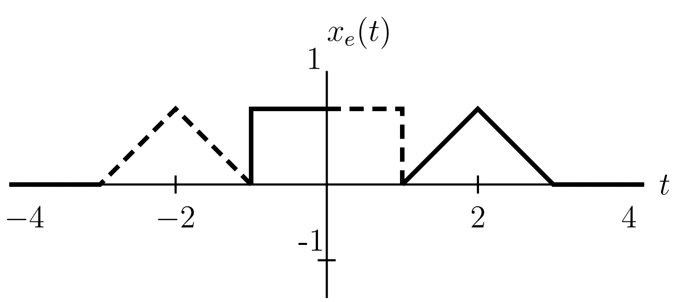
Igualmente, para la parte impar $x_o(t)$, utilizamos la siguiente relación:

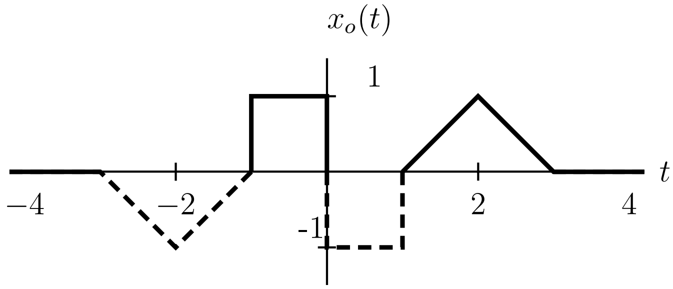
$$x_o(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2}.$$

Utilizando estas expresiones para las partes impar y par, obtenemos las siguientes imágenes:









El valor de la parte par (y en realidad el de la parte impar) en $t = 0$ es ambiguo, ya que depende de la definición del diagrama para $x(t)$ en $t = 0$. En los diagramas de esta solución se supone que el valor de $x(t)$ en $t = 0$ está a medio camino entre 0 y 2, es decir, 1. Si utiliza una definición distinta, puede obtener una parte par discontinua en $t = 0$. Esto se considera también cierto siempre que sea consistente con el supuesto del valor de $x(t)$ en la discontinuidad. Por ejemplo, si supone que $x(0) = 2$, el diagrama de la parte par tendrá una “punta” en $t = 0$ de altura 2.

Problema 5

(a) Para resolver si una señal en tiempo continuo $x(t)$ es periódica, es necesario hallar un valor no cero finito de T de modo que $x(t) = x(t+T)$ para todo t. El valor menor de T que cumpla esta regla corresponde al periodo fundamental.

Esta función es bastante directa. Sabemos que la función $\sin(4t-1)$ es periódica, con un periodo $\frac{\pi}{2}$. Dado que los ciclos positivo y negativo de los sinusoides tienen la misma forma, el cuadrado de esta función, es decir, $x(t) = [\sin(4t-1)]^2$ es periódico, con un periodo fundamental $\frac{\pi}{4}$.

Además, podemos utilizar la relación siguiente:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin 2x,$$

que es periódica, con un periodo $\frac{\pi}{4}$.

(b) Para una función en tiempo discreto $x[n]$, es necesario hallar un *entero* N finito de modo que $x[n] = x[n+N]$ para todo n. El entero N más pequeño para el cual se mantiene esta regla es el periodo fundamental. Si no podemos hallar tal N, la función no es periódica.

Necesitamos:

$$\cos\left[4(n+N) + \frac{\pi}{4}\right] \quad = \quad \cos\left[4n + \frac{\pi}{4}\right]$$

Para que se mantenga la fórmula anterior, debe ser cierto lo siguiente para algunos enteros k.

$$\begin{aligned} 4n + 4N + \frac{\pi}{4} &= 4n + \frac{\pi}{4} + 2\pi k \\ N &= \frac{\pi}{2}k \end{aligned}$$

Puesto que π no es un número racional, no podemos hallar un entero N que cumpla esto. Por lo tanto, la función no es periódica.

(c) Podemos utilizar los mismos pasos que anteriormente, aunque podemos empezar hallando el periodo fundamental de una ecuación más simple $y[n] = \cos\left(\frac{2\pi n}{7}\right)$.

Necesitamos que se mantenga lo siguiente:

$$\cos\left(\frac{2\pi n}{7}\right) = \cos\left(\frac{2\pi(n+N)}{7}\right)$$

Por tanto, es necesario que se mantenga lo siguiente para al menos un valor entero de k.

$$\begin{aligned} \frac{2\pi n}{7} + 2\pi k &= \frac{2\pi(n+N)}{7} \\ k &= \frac{N}{7} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $N = 7, 14, 21, \cdots$ cumple esto.

Ahora, para $x[n] = (-1)^n \cos\left(\frac{2\pi(n+N)}{7}\right)$ observamos inmediatamente que su periodo tiene que ser un número par, ya que $(-1)^n$ toma el valor de 1 para el par n y de -1 para el impar n. Por lo tanto, el periodo fundamental es 14.

Problema 6

En este problema, suponga que $y_1(t), y_2(t), y_3(t), y_4(t)$ son las salidas de los sistemas en tiempo continuo cuando las entradas son $x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t)$, respectivamente. Además, a y b son cualesquiera números (posiblemente complejos), t_0 es cualquier número real y n_0 es cualquier entero.

(a) (1) **Sin memoria - NO:** evidentemente, este no es un sistema sin memoria porque $y(t)$ depende de $x(t+3)$, que es un valor futuro.

(2) **Invariante en el tiempo - NO:** considere la salida $y_1(t)$ y una versión de ésta con desplazamiento de tiempo $y_1(t+t_0)$, tal como se indica a continuación:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= x_1(t+3) - x_1(1-t) \\ y_1(t+t_0) &= x_1(t+t_0+3) - x_1(1-t-t_0) \end{aligned}$$

Si $x_2(t) = x_1(t+t_0)$ es la entrada, la salida viene dada por:

$$\begin{aligned} y_2(t) &= x_2(t+3) - x_2(1-t) \\ &= x_1(t+3+t_0) - x_2(1-t+t_0) \\ &\neq y_1(t+t_0) \end{aligned}$$

Por lo tanto, no es invariante en el tiempo.

(3) **Lineal - SI:**
Si $x_3(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$:

$$\begin{aligned} y_3(t) &= x_3(t+3) + x_3(1-t) \\ &= ax_1(t+3) + bx_2(t+3) + ax_1(1-t) + bx_2(1-t) \\ &= ax_1(t+3) + ax_1(1-t) + bx_2(t+3) + bx_2(1-t) \\ &= ay_1(t) + by_2(t) \end{aligned}$$

Por consiguiente, este sistema es lineal.

(4) **Causal - NO:** evidentemente, este sistema es no causal porque $y(t)$ depende de $x(t+3)$, que es un valor futuro de la entrada.

(5) **Estable - SI:** dado que $y(t)$ es una suma finita de la entrada $x(t)$ en distintos tiempos de retardo, si $x(t)$ es limitado, también lo es $y(t)$.

(b) (1) **Sin memoria - SI:** es un sistema sin memoria ya que $y[n]$ depende sólo de $x[n]$.

(2) **Invariante en el tiempo - NO:**

$$y_1[n] = \begin{cases} (-1)^n x_1[n], & x_1[n] \geq 0 \\ 2x_1[n], & x_1[n] > 0 \end{cases}$$

Por lo tanto, si $x_1[n] = x[n + n_0]$,

$$y_1[n] = \begin{cases} (-1)^n x[n + n_0], & x[n + n_0] \geq 0 \\ 2x[n + n_0], & x[n + n_0] > 0 \end{cases}$$

pero,

$$y[n + n_0] = \begin{cases} (-1)^{n+n_0} x[n + n_0], & x[n + n_0] \geq 0 \\ 2x[n + n_0], & x[n + n_0] > 0 \end{cases}$$

Por tanto, si n_0 es par, $y[n + n_0] \neq y_1[n]$. Por consiguiente, no es invariante en el tiempo.

(3) **Lineal - NO:** digamos que $x[0] = 1$, entonces $y[0] = 1$. Ahora, $x_1[0] = -1 \cdot x[0] = -1$, entonces:

$$\begin{aligned} y_1[0] &= -2 \\ &\neq -y[0] \end{aligned}$$

Por consiguiente, no es lineal.

(4) **Causal - SI:** puesto que es un sistema sin memoria, también es causal.

(5) **Estable - SI:** cualquier valor de $y[n]$ es precisamente una versión a escala de la entrada. Por tanto, si $x[n]$ es limitado, también lo es $y[n]$.

(c) (1) **Sin memoria - NO:** no es un sistema sin memoria porque $y[n]$ depende de la señal de entrada desde el índice de tiempo n a ∞.

(2) **Invariante en el tiempo - SI:**
Si $x_1[n] = x[n + n_0]$:

$$\begin{aligned} y_1[n] &= \sum_{k=n}^{\infty} x[k + n_0] \\ &= \sum_{k=n+n_0}^{\infty} x[k] \\ &= y[n + n_0] \end{aligned}$$

Por consiguiente, es invariante en el tiempo.

(3) **Lineal - SI:** sea $x_3[n] = ax_1[n] + bx_2[n]$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} y_3[n] &= \sum_{k=n}^{\infty} x_3[n] \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} ax_1[n] + \sum_{k=n}^{\infty} bx_2[n] \\ &= ay_1[n] + by_2[n] \end{aligned}$$

Por consiguiente, el sistema es lineal. Además, dado que la salida es simplemente una suma de la entrada a distintos retardos de tiempo, podemos concluir que el sistema es lineal.

(4) **Causal - NO:**

No es causal porque $y[n]$ depende de $x[n], x[n+1] \cdots x[\infty]$.

(5) **Stable - NO:** la salida es una suma infinita de la secuencia de entrada en retardos de tiempo $n \to \infty$. Por consiguiente, si la señal de entrada es limitada (ej. $x[n] = 1$), la salida podría no ser limitada.

Problema 7

Puesto que estamos tratando con un sistema LTI, es necesario expresar la señal de entrada $x_2(t)$ en términos de una combinación lineal y de desplazamiento de tiempo de la entrada cuya salida es conocida, es decir, $x_1(t)$. $x_2(t)$ se puede expresar como la suma de $x_a(t) = -2x_1(t-2)$ y $x_b(t) = -x_1(t-1)$, tal como se indica a continuación:

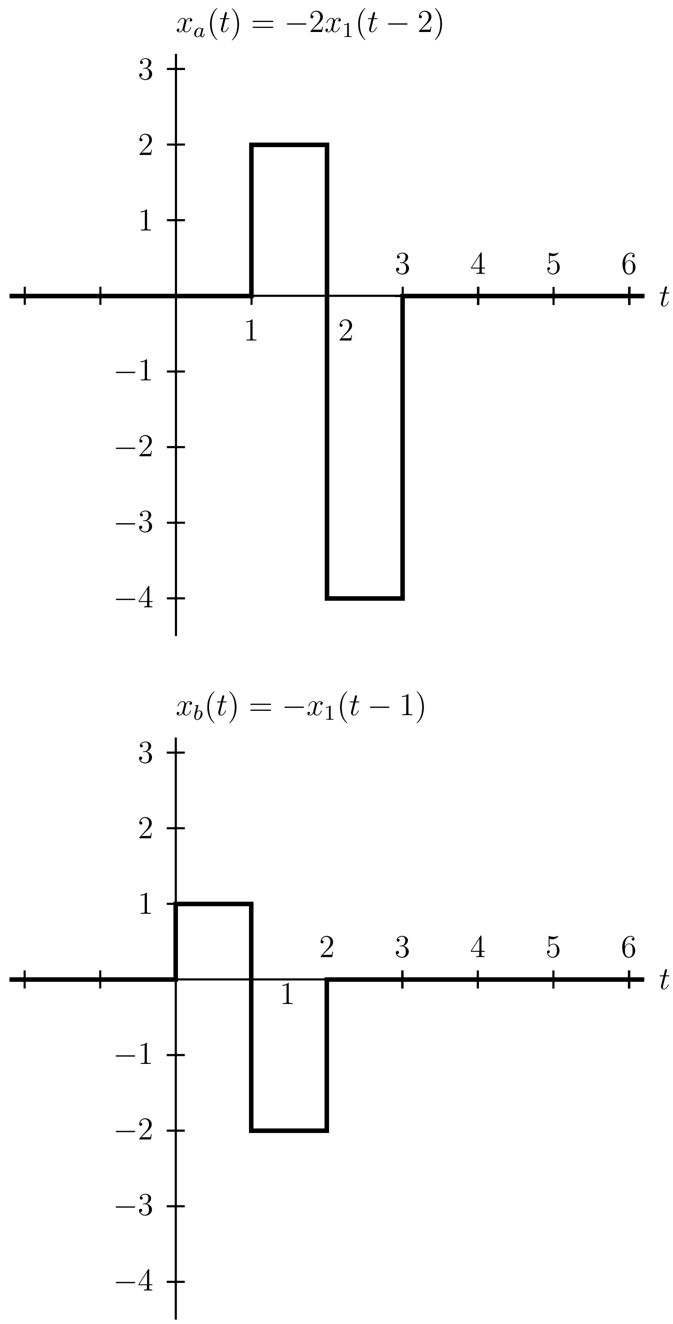


Figura 7.1: $x_a(t)$ y $x_b(t)$

Sean $y_a(t)$ e $y_b(t)$ las salidas del sistema, siendo las entradas $x_a(t)$ y $x_b(t)$, respectivamente. A partir del par de entrada-salida dado, y utilizando la propiedad del sistema LTI, tenemos las siguientes señales para $y_a(t)$ y $y_b(t)$

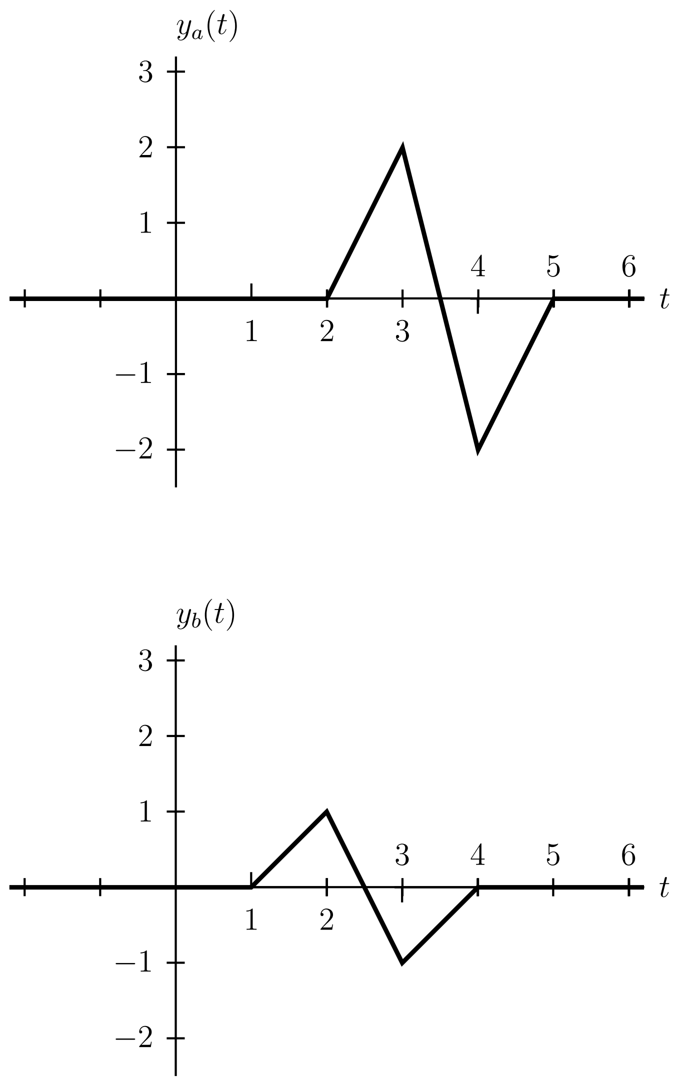


Figura 7.2: $y_a(t)$ **y** $y_b(t)$

La suma de esta dos señales da como resultado la salida deseada $y_2(t)$:

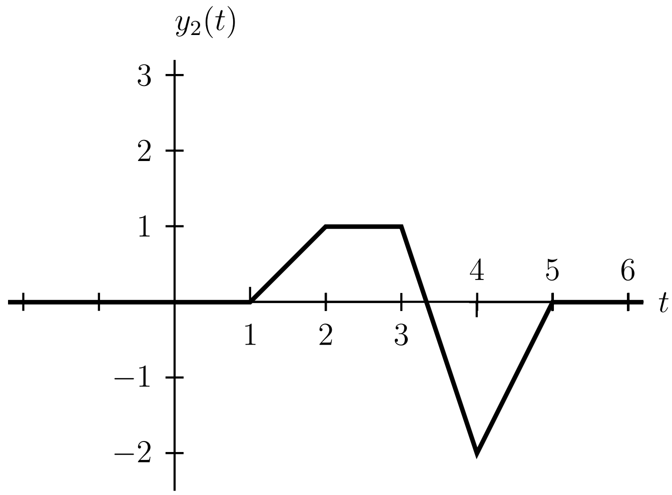


Figura 7.3: $y_2(t)$

Problema 8 (BDS 1.3) (a) El código de MATLAB para completar este ejercicio es:

$$
\begin{aligned}
\texttt{nx} &= -3:7; \\
\texttt{x} &= \texttt{zeros(size(nx))}; \\
\texttt{x}(4) &= 2; \\
\texttt{x}(6) &= 1; \\
\texttt{x}(7) &= -1; \\
\texttt{x}(8) &= 3;
\end{aligned}
$$

Nota: los valores del índice difieren porque Matlab no permite valores de índice negativos. Por tanto, $n = -3$ corresponde al índice 1 de Matlab, por lo que $\texttt{x}(4) = 2$ establece $x[0] = 2$ y $\texttt{x(6)} = 1$ establece $x[2] = 1$ y así sucesivamente. (b) Puede resultar complicado asignar $\texttt{ny1}$ a través de $\texttt{ny4}$. El truco consiste en mantener un seguimiento de la variable que se traza. Para $y_1[n]$, queremos trazar $y_1[\texttt{ny1}]$, pero primero necesitamos calcular $\texttt{ny1}$, por tanto, si introducimos $\texttt{ny1}$ en $y_1[n]$, obtenemos:

$$y_1[\texttt{ny1}] = x[\texttt{ny1} - 2].$$

Dado que conocemos $x[\texttt{nx}]$, podemos equiparar los índices, $\texttt{nx} = \texttt{ny1} - 2$, y resolver para $\texttt{ny1}$ para obtener:

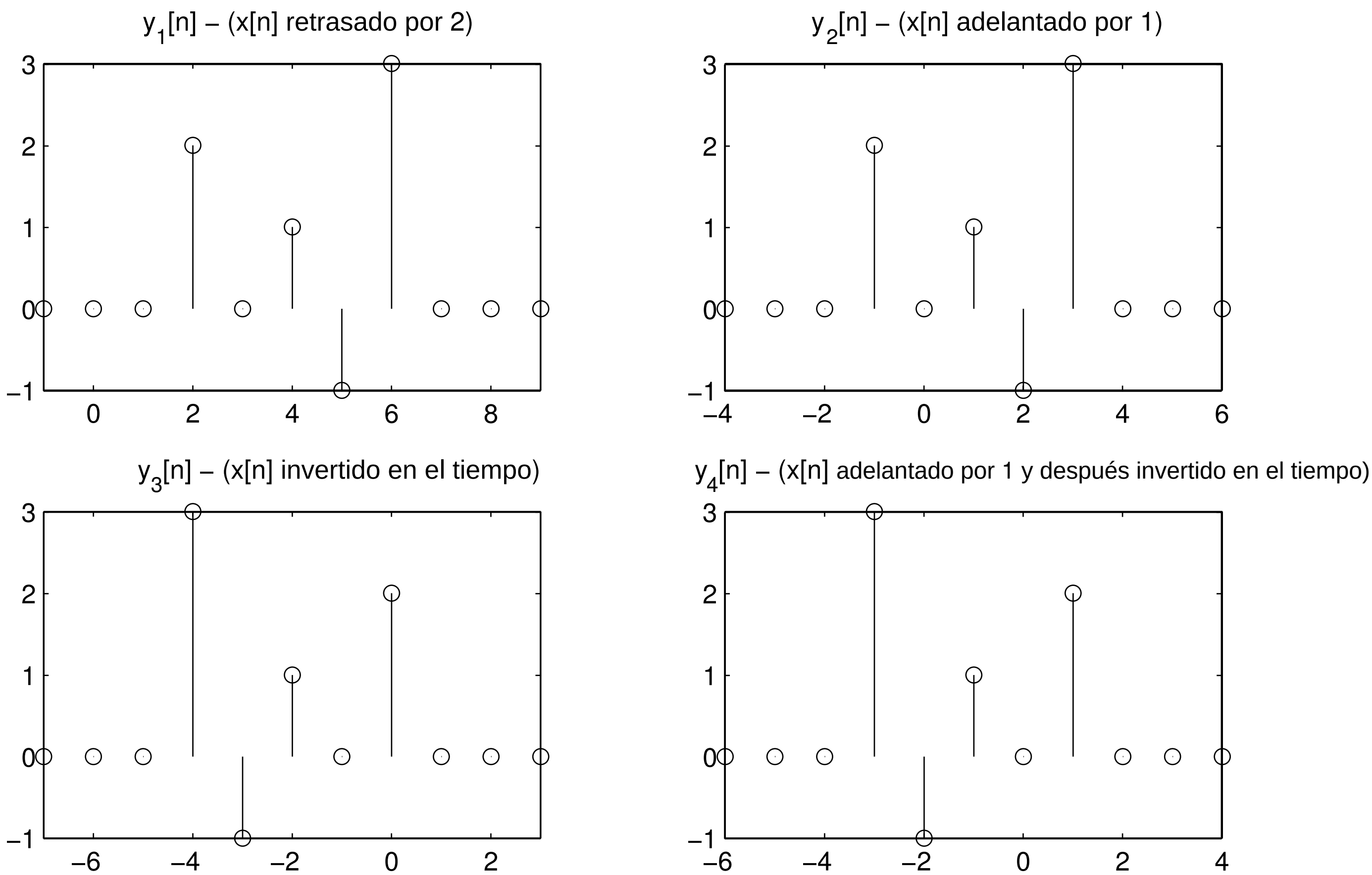
$$\texttt{ny1} = \texttt{nx} + 2.$$

Igualmente, se puede encontrar que:

$$
\begin{aligned}
\texttt{ny2} &= \texttt{nx} - 1 \\
\texttt{ny3} &= -\texttt{nx}.
\end{aligned}
$$

Finalmente, ny4 puede hallarse de forma similar, pero esta vez equiparamos $\mathtt{nx} = -\mathtt{ny4} + 1$. Si resolvemos para ny4 se obtiene:

$$\mathtt{ny4} = -\mathtt{nx} + 1.$$



Código de MATLAB

```
% Section 1.3.a

nx = -3:7;
x  = [ 0 0 0 2 0 1 -1 3 0 0 0];

figure(1);
stem(nx, x);


% Section 1.3.b

y1 = x;   ny1 = nx + 2;
y2 = x;   ny2 = nx - 1;
y3 = x;   ny3 = -nx;
y4 = x;   ny4 = -nx + 1;


% Section 1.3.c

figure(2);

subplot(2,2,1);
stem(ny1, y1);
title('y_1[n] - (x[n] delayed by 2)');
axis([ ny1(1) ny1(end) -1 3 ]);

subplot(2,2,2);
stem(ny2, y2);
title('y_2[n] - (x[n] advanced by 1)');
axis([ ny2(1) ny2(end) -1 3 ]);

subplot(2,2,3);
stem(ny3, y3);
title('y_3[n] - (x[n] time reversed)');
axis([ ny3(end) ny3(1) -1 3 ]);

subplot(2,2,4);
stem(ny4, y4);
title('y_4[n] - (x[n] advanced by 1 & then time reversed)');
axis([ny4(end) ny4(1) -1 3]);
```