Señales y sistemas

Otoño 2003

Clase 10

7 de octubre de 2003

1. Ejemplos de la transformada de Fourier en tiempo discreto.
2. Propiedades de la transformada de Fourier en tiempo discreto.
3. Propiedad de convolución: implicaciones y usos.

Par transformada de Fourier en tiempo discreto

$$x[n] \longleftrightarrow X(e^{j\omega})$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

– Ecuación de análisis
– TF

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

– Ecuación de síntesis
– TF inversa

Cuestiones de convergencia

Ecuación de síntesis: ninguna, ya que se integra sobre un intervalo finito

Ecuación de análisis: son necesarias condiciones análogas a la TF en tiempo continuo, por ejemplo:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty$$ — Energía finita

or

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$$ — Completamente sumable

Ejemplos

Análogos a los ejemplos de tiempo continuo de la clase 8

1) $x[n] = \delta[n]$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] e^{-j\omega n} = 1$$

2) $x[n] = \delta[n - n_0]$ - shifted unit sample
(muestra unitaria desplazada)

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n - n_0] e^{-j\omega n} = e^{-j\omega n_0}$$

– Same amplitude (=1) as above, but with a *linear* phase $-\omega n_0$
(La misma amplitud (=1) que anteriormente, pero con una fase *lineal* $-\omega\, n_0$)

Más ejemplos

3) $x[n] = a^n u[n], |a| < 1$ - Exponentially decaying function (Función de decaimiento exponencial)

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(ae^{-j\omega})^n}_{|ae^{-j\omega}|<1}$$

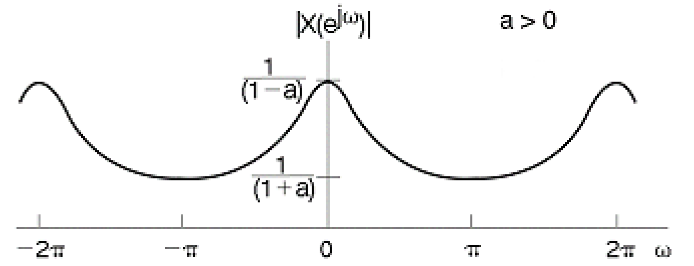
Fórmula de suma infinita

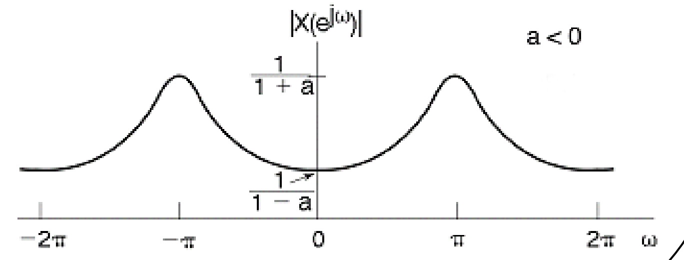
$$= \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} = \frac{1}{(1 - a\cos\omega) + ja\sin\omega}$$

$$|X(e^{j\omega})| = \frac{1}{\sqrt{1 - 2a\cos\omega + a^2}}$$

$$\omega = 0 : X(e^{j\omega}) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2a + a^2}} = \frac{1}{1 - a}$$

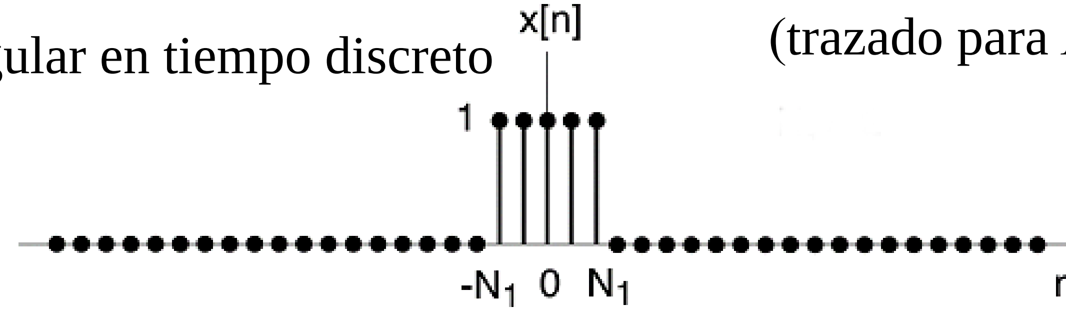
$$\omega = \pi : X(e^{j\omega}) = \frac{1}{\sqrt{1 + 2a + a^2}} = \frac{1}{1 + a}$$



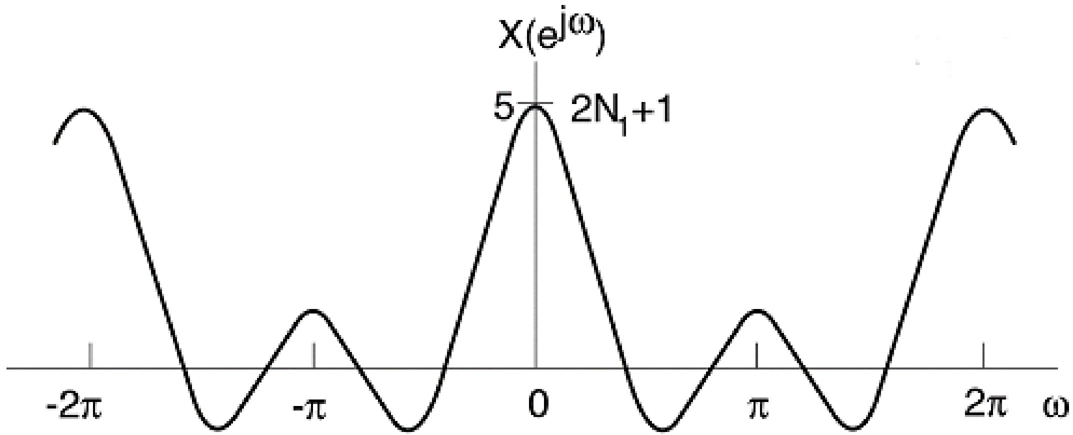


Más aún

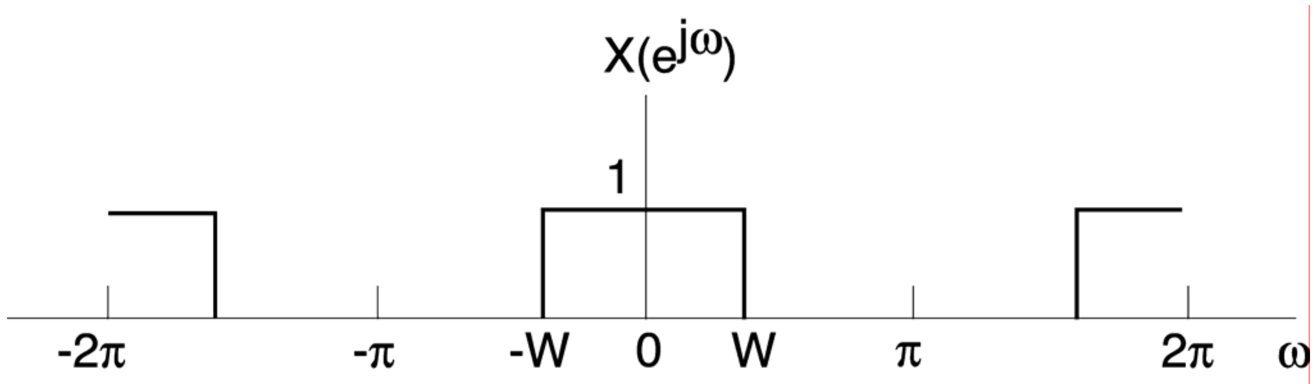
4) Pulso rectangular en tiempo discreto (trazado para $N_1 = 2$)



$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-j\omega n} = \sum_{n=-N_1}^{N_1} (e^{-j\omega})^n = \frac{\sin \omega \left(N_1 + \frac{1}{2}\right)}{\sin(\omega/2)} = X(e^{j(\omega-2\pi)})$$

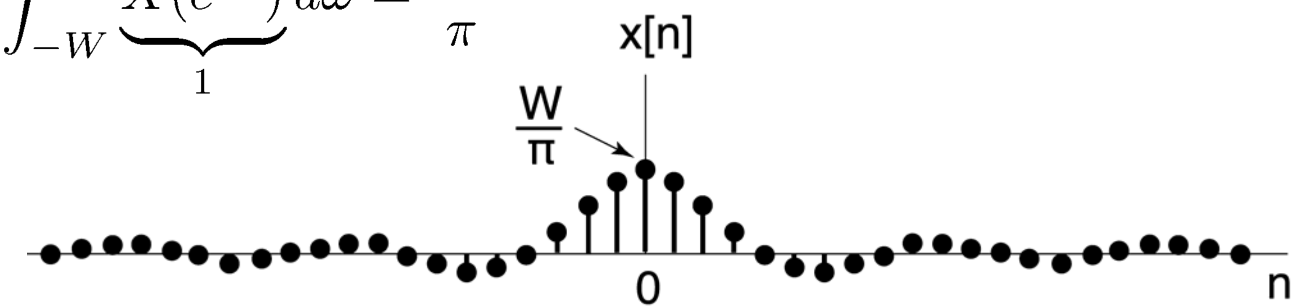


5)



$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{W} e^{j\omega n} d\omega = \frac{\sin Wn}{\pi n}$$

$$x[0] = \frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{W} \underbrace{X(e^{j\omega})}_{1} d\omega = \frac{W}{\pi}$$



TF en tiempo discreto de exponenciales complejos

Recuerde el resultado en tiempo continuo: $x(t) = e^{j\omega_0 t} \longleftrightarrow X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$

¿Qué pasa con el resultado en tiempo discreto?: $x[n] = e^{j\omega_0 n} \longleftrightarrow X(e^{j\omega}) = ?$

a) Esperamos un impulso (de área 2π) en $\omega = \omega_o$

b) Pero $X(e^{j\omega})$ debe ser periódico con periodo 2π

De hecho:

$$X(e^{j\omega}) = 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi m)$$

Nota: la integración en la ecuación de síntesis es sobre un periodo 2π, sólo es necesario $X(e^{j\omega})$ en *un* periodo 2π. Por consiguiente,

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi m)}_{X(e^{j\omega})} e^{j\omega n} d\omega = e^{j\omega_0 n}$$

Señales periódicas de la TF en tiempo discreto

$$x[n] = x[n+N]$$

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\omega_0 n}, \ \omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

Ecuación de síntesis de las series de Fourier (SF) en tiempo discreto

From the last page: $e^{jk\omega_0 n} \longleftrightarrow 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0 - 2\pi m)$
(de la última página)

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=<N>} a_k \left[2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0 - 2\pi m) \right]$$

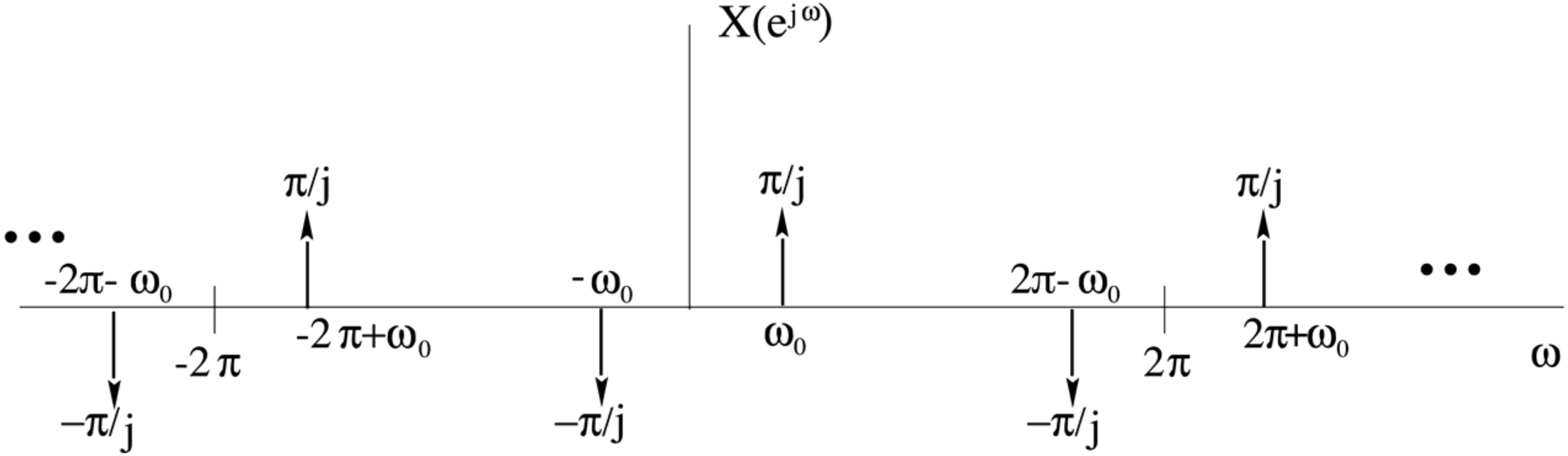
Linealidad de la TF en tiempo discreto

$$= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$$

Ejemplo 1: función senoidal en tiempo discreto

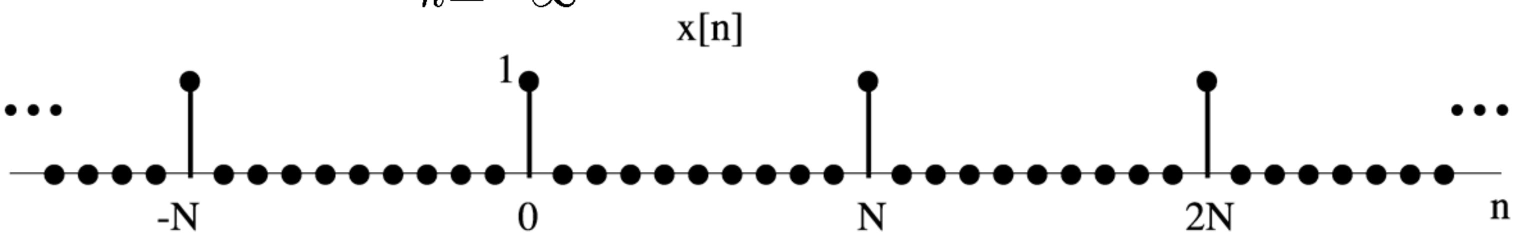
$$x[n] = \sin \omega_0 n = \frac{1}{2j} e^{j\omega_0 n} - \frac{1}{2j} e^{-j\omega_0 n}$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{\pi}{j} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi m) - \frac{\pi}{j} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi m)$$



Ejemplo 2: tren de impulsos periódicos en tiempo discreto

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-kN] \qquad \omega_0 = 2\pi/N$$

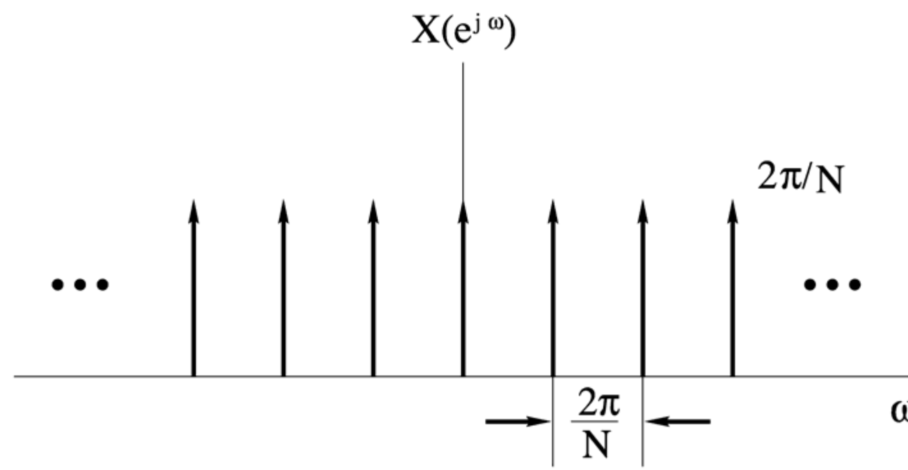


$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n] e^{-jk\omega_0 n}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \underbrace{x[n]}_{=\delta[n]} e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{N}$$

$$\Downarrow$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$$



— También tren de impulsos periódicos en el dominio de la frecuencia

Propiedades de la transformada de Fourier en tiempo discreto

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$ – Analysis equation
(Ecuación de análisis)

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$ – Synthesis equation
(Ecuación de síntesis)

1) Periodicity: (Periodicidad) $X(e^{j(\omega+2\pi)}) = X(e^{j\omega})$ — Diferente de la TF en tiempo continuo

2) Linearity: (Linealidad) $ax_1[n] + bx_2[n] \longleftrightarrow aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega})$

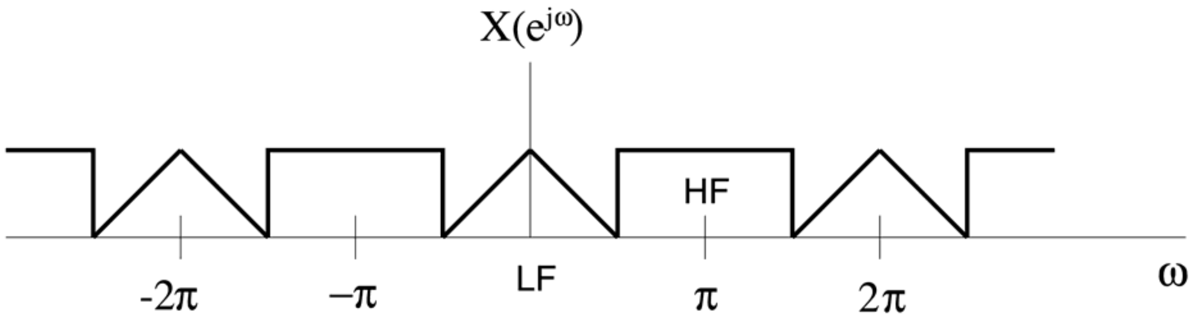
Más propiedades

3) Time Shifting: $x[n-n_0] \longleftrightarrow e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$
(Desplazamiento de tiempo)

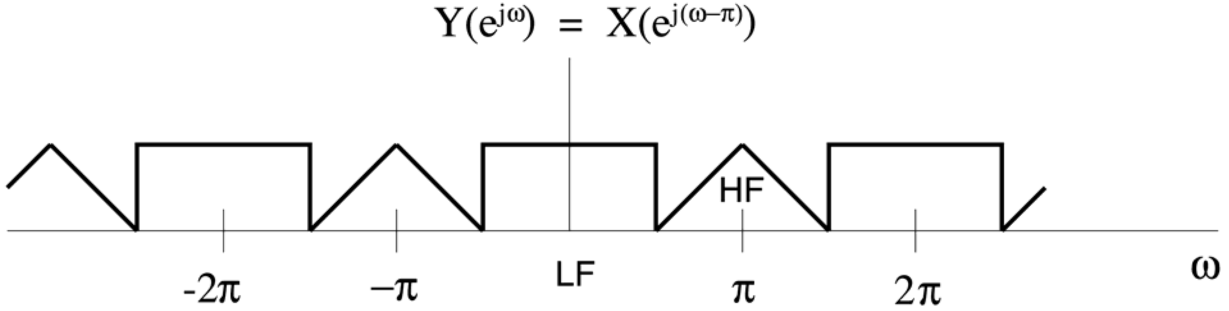
4) Frequency Shifting: $e^{j\omega_0 n} x[n] \longleftrightarrow X(e^{j(\omega-\omega_0)})$
(Desplaz. de frecuencia)

— Implicaciones importantes en tiempo discreto debido a la periodicidad

Ejemplo



$$\omega_0 = \pi\ ,\ y[n] = e^{j\pi n} x[n] = (-1)^n x[n]$$



Más propiedades aún

5) Time Reversal: (inversión de tiempo)

$$x[-n] \longleftrightarrow X(e^{-j\omega})$$

6) Conjugate Symmetry: (simetría de conjugación)

$$x[n] \text{ real} \Rightarrow X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$$

$$\Downarrow$$

$|X(e^{j\omega})|$ and (y) $\Re e\left\{X(e^{j\omega})\right\}$ are even functions (son funciones pares)

$\angle X(e^{j\omega})$ and (y) $\Im m\left\{X(e^{j\omega})\right\}$ are odd functions (son funciones impares)

and (y)

$x[n]$ real and even (real y par) $\Leftrightarrow X(e^{j\omega})$ real and even (real y par)

$x[n]$ real and odd (real e impar) $\Leftrightarrow X(e^{j\omega})$ purely imaginary and odd (puramente imaginario e impar)

Incluso más propiedades

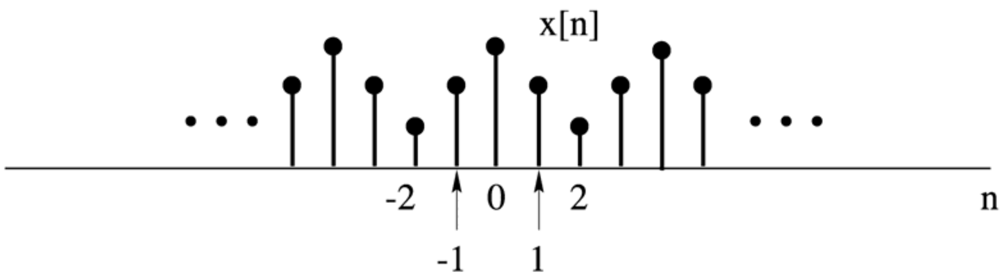
7) Expansión de tiempo.
recuerde la prop. de TC:

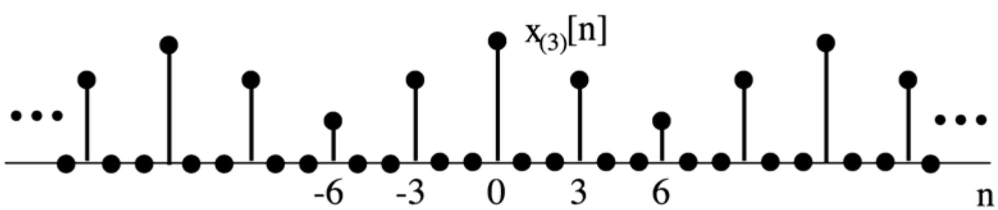
$$x(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(j\left(\frac{\omega}{a}\right)\right)$$

La escala de tiempo es infinitamente fina

Pero en TD: $x[n/2]$ no tiene sentido
$x[2n]$ pierde los valores impares de $x[n]$

Pero podemos "ralentizar" una señal en TD insertando ceros:
k — un entero ≥ 1
$x_{(k)}[n]$ — insertar $(k - 1)$ ceros entre valores sucesivos





Insertar dos ceros en este ejemplos (k=3)

Expansión de tiempo (continuación)

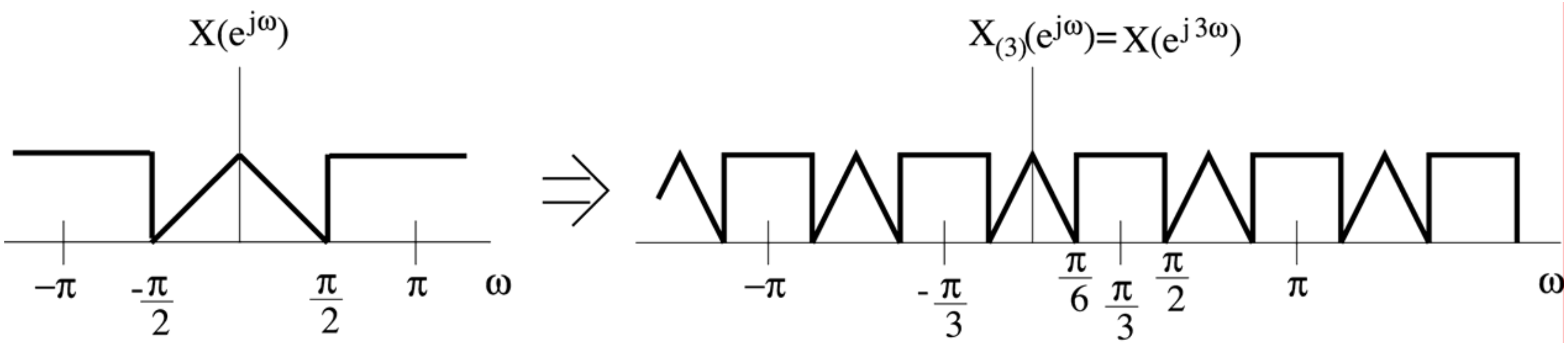
$$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[n/k] & \text{if } n \text{ is an integer multiple of k} \text{ (Si } n \text{ es un entero múltiple de k)} \\ 0 & \text{otherwise (si no)} \end{cases}$$

— Alargado por un factor de k en el dominio del tiempo

$$X_{(k)}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{(k)}[n]e^{-j\omega n} \overset{n=mk}{=} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_{(k)}[mk]e^{-j\omega mk}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]e^{-j(k\omega)m} = X(e^{jk\omega})$$

– Comprimido por un factor de de k el dominio de la frecuencia



¿No hay fin a estas propiedades?

8) Diferenciación en frecuencia

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

$$\frac{d}{d\omega}X(e^{j\omega}) = -j\sum_{n=-\infty}^{\infty} nx[n]e^{-j\omega n}$$

$\Downarrow$ multiply by j on both sides (multiplicar por j en ambos lados)

Multiplicación por n $\quad nx[n] \leftrightarrow j\frac{d}{d\omega}X(e^{j\omega})\quad$ Diferenciación en frecuencia

9) Relación de Parseval

$$\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2}_{\text{Energía total en el dominio del tiempo}} = \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega}_{\text{Energía total en el dominio de la frecuencia}}$$

Propiedad de la convolución

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n] = h[n] * x[n]$$

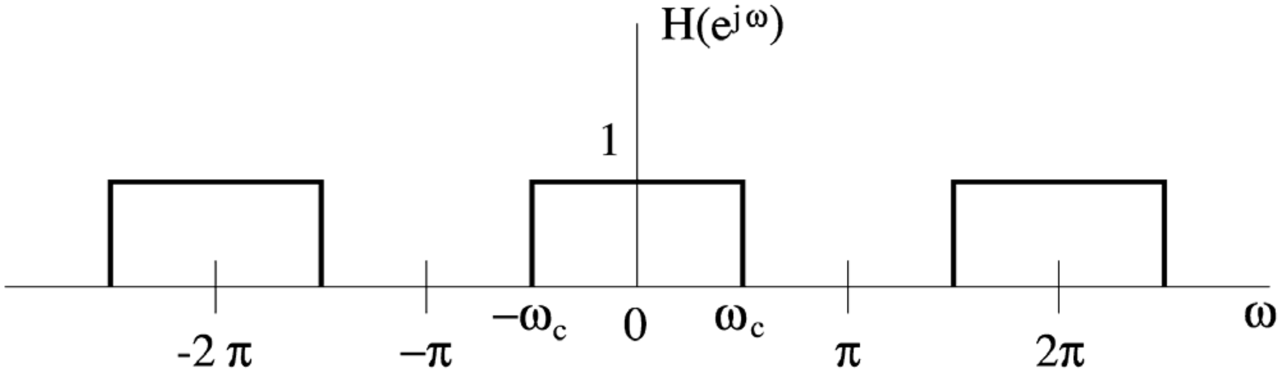
$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$$

$\Rightarrow$ Frequency response $H(e^{j\omega})$ = DTFT of the unit sample response
(Respuesta de frecuencia (...) = TF en tiempo discreto de la respuesta a muestra unitaria)

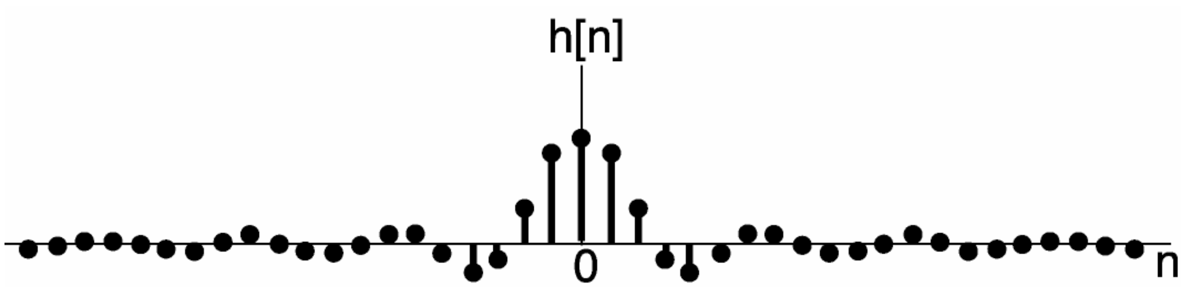
Ejemplo 1:

$$\begin{aligned}
x[n] = e^{j\omega_0 n} \longleftrightarrow X(e^{j\omega}) &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi k) \\
Y(e^{j\omega}) &= H(e^{j\omega}) 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi k) \\
&= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} H(e^{j(\omega_0 + 2\pi k)}) \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi k) \\
&\overset{H \text{ Periodic}}{\underset{(H \text{ periódico})}{=}} H(e^{j\omega_0}) 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi k) \\
&\Downarrow \\
y[n] &= H(e^{j\omega_0}) e^{j\omega_0 n}
\end{aligned}$$

Ejemplo 2: **filtro ideal de paso bajo**



$$h[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n} d\omega = \frac{\sin \omega_c n}{\pi n}$$



Ejemplo 3:

$$\frac{\sin(\pi n/4)}{\pi n} * \frac{\sin(\pi n/2)}{\pi n} \quad = \quad \frac{\sin(\pi n/4)}{\pi n}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Uparrow$$