Señales y sistemas

Otoño 2003

Clase 3

11 de septiembre de 2003

1) Representación de señales en TD en términos de muestras unitarias desplazadas.
2) Representación de la suma de convolución de sistemas LTI en tiempo discreto (TD).
3) Ejemplos.
4) Respuesta de muestra unitaria y propiedades de los sistemas LTI en tiempo discreto (TD).

Explotación de la superposición y la invariancia del tiempo

$$x[n] = \sum_k a_k x_k[n] \xrightarrow[\text{(Sistema lineal)}]{LinearSystem} y[n] = \sum_k a_k y_k[n]$$

Pregunta: ¿existen conjuntos de señales "básicas" tales que

a) podamos representar clases ricas de señales como combinaciones de estas señales de bloques de construcción?

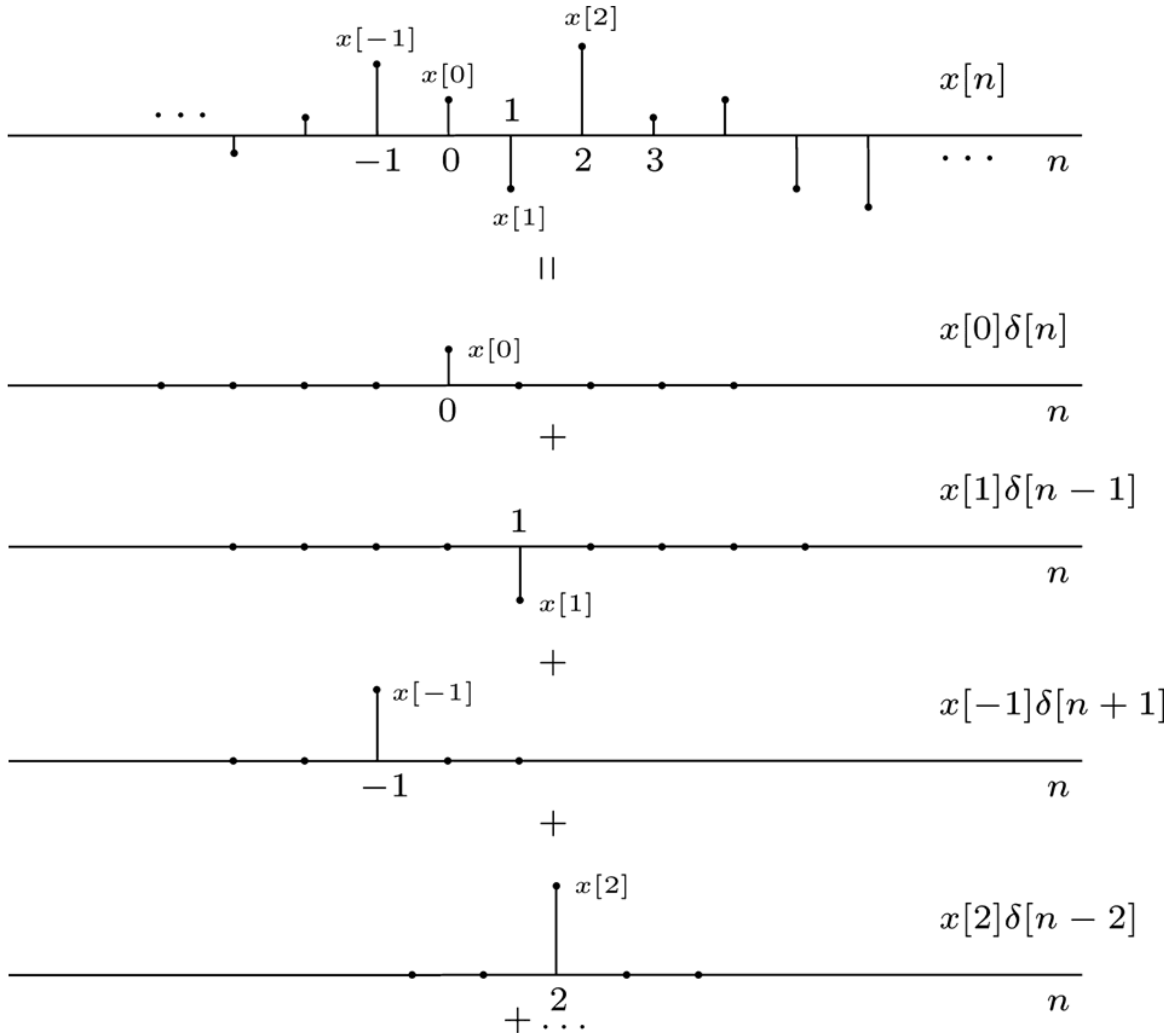
b) la respuesta de los sistemas LTI a estas señales básicas sean *simples* y *faciliten la comprensión*?

Hecho: para los sistemas LTI (TC o TD), existen dos elecciones naturales para estos bloques prefabricados.

Céntrese por ahora en: TD Muestras unitarias desplazadas

TC Impulsos unitarios desplazados

Representación de señales en TD utilizando muestras unitarias



Es decir, ...

$$x[n] = \cdots + x[-2]\delta[n+2] + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + \cdots$$

$$\Downarrow$$

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{x[k]}_{\text{Coeficientes}} \, \underbrace{\delta[n-k]}_{\text{Señales básicas}}$$

Propiedad de desplazamiento de la muestra unitaria

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\text{Sistema de TD}} \longrightarrow y[n]$$

- Suponga que el sistema es **lineal**, y defina $h_k[n]$ como la respuesta a $\delta[n - k]$:

$$\delta[n-k] \rightarrow h_k[n]$$

A partir de la superposición: $\Downarrow$

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h_k[n]$$

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\text{Sistema de TD}} \longrightarrow y[n]$$

- A continuación, suponga que el sistema es **LTI**, y defina la *respuesta de muestra unitaria* $h[n]$:

$$\delta[n] \rightarrow h[n]$$

A partir de TI:

$$\Downarrow$$

$$\delta[n-k] \rightarrow h[n-k]$$

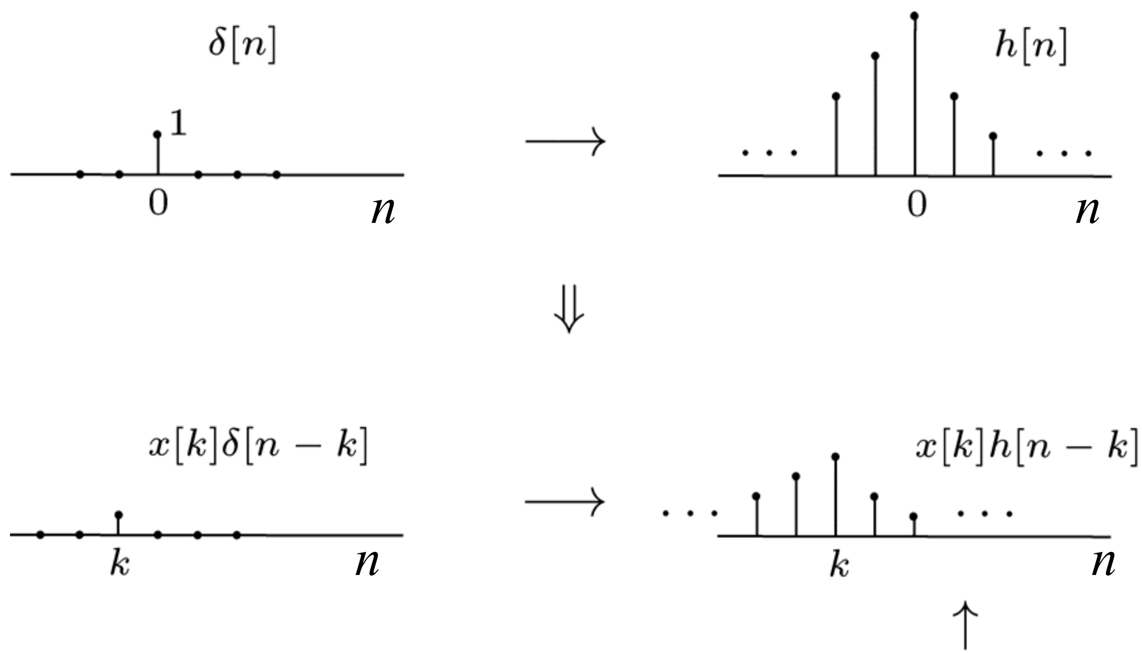
A partir de LTI:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \rightarrow \underbrace{y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]}_{\substack{\text{Convolution Sum} \\ \text{(Suma de convolución)}}}$$

Representación de la suma de convolución de la respuesta de sistemas LTI

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

Interpretación



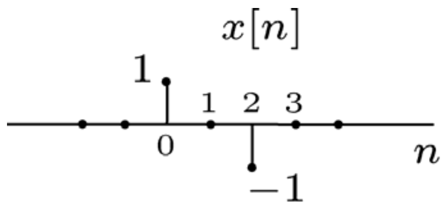
(Resume las respuestas sobre todo *k*)
Sum up responses over all k

Visualización del cálculo de $y[n] = x[n] * h[n]$

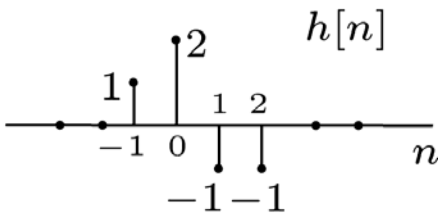
Seleccione el valor de *n* y considérelo fijo

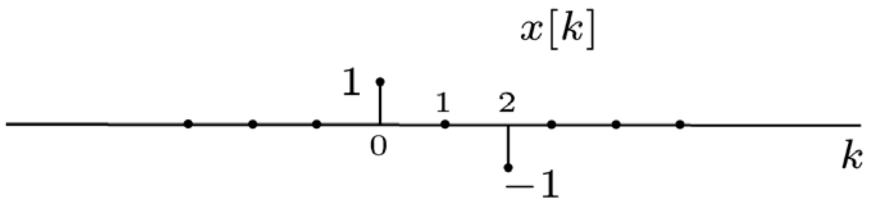
$$y[n] = \sum_{k=\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

Vistas como funciones de *k* con *n* fijo

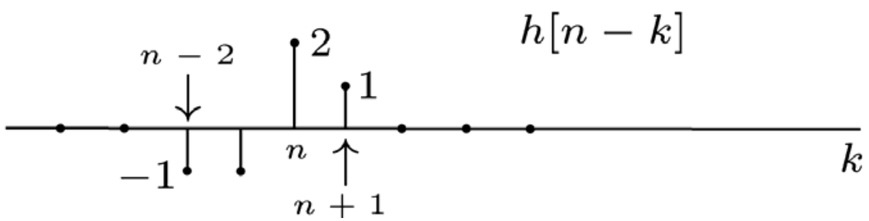


$\Downarrow$



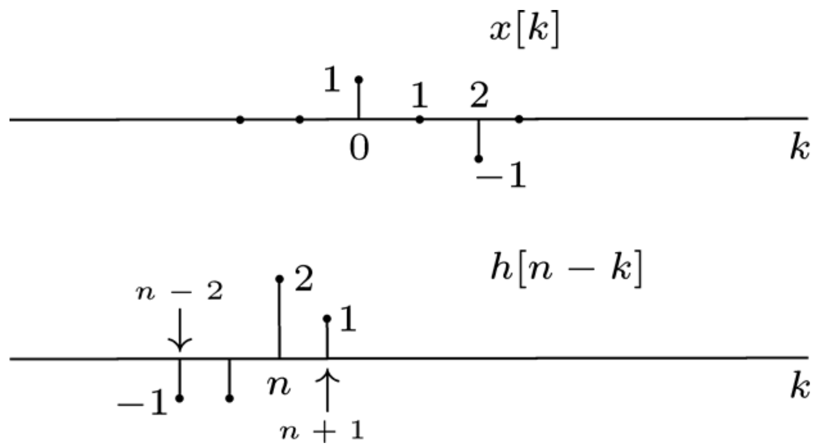


y[0] = $\sum$ prod. de superpos. para n = 0



y[1] = $\sum$ prod. de superpos. para n = 1

Cálculo de valores sucesivos: desplazamiento, multiplicación, suma



$$
\begin{aligned}
y[n] &= 0 \quad \text{for } n < \ \mathbf{-1} \\
y[-1] &= \mathbf{1 \times 1 = 1} \\
y[0] &= \mathbf{0 \times 1 \ + \ 1 \times 2 = 2} \\
y[1] &= \mathbf{(-1) \times 1 \ + \ 0 \times 2 \ + 1 \times (-1) = -2} \\
y[2] &= \mathbf{(-1) \times 2 \ + \ 0 \times (-1) + 1 \times (-1) = -3} \\
y[3] &= \mathbf{(-1) \times (-1) + 0 \times (-1) = 1} \\
y[4] &= \mathbf{(-1) \times (-1) = 1} \\
y[n] &= 0 \quad \text{for } n > \ \mathbf{4}
\end{aligned}
$$

Propiedades de la convolución y de los sistemas LTI en tiempo discreto (TD)

1) Un sistema LTI en tiempo discreto (TD) se *caracteriza completamente* por su respuesta de muestra unitaria.

Ex. #1: $h[n] = \delta[n - n_0]$

There are *many* systems with this repsonse to $\delta[n]$

(Existen *muchos* sistemas con esta respuesta a $\delta[n]$)

There is only *one* LTI System with this response to $\delta[n]$:

(Sólo existe *un* sistema LTI con esta respuesta a $\delta[n]$)

$$y[n] = x[n - n_0]$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{x[n] * \delta[n - n_0] = x[n - n_0]}$$

Ex. #2:

$y[n] = \sum_{k=\infty}^{n} x[k]$ - An Accumulator

(un acumulador)

Respuesta de muestra unitaria

$$h[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k] = u[n]$$

$$\Downarrow$$

$$x[n] * u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

(La propiedad conmutativa)
The Commutative Property

$$y[n] = x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$$

Ex: Step response $s[n]$ of an LTI system
(Ej.: respuesta a escalón $s[n]$ de un sistema LTI)

$$s[n] = u[n] * h[n] = h[n] * u[n]$$

step input (entrada de escalón)

"input" ("entrada")

Unit Sample response of accumulator (respuesta de muestra unitaria de acumulador)

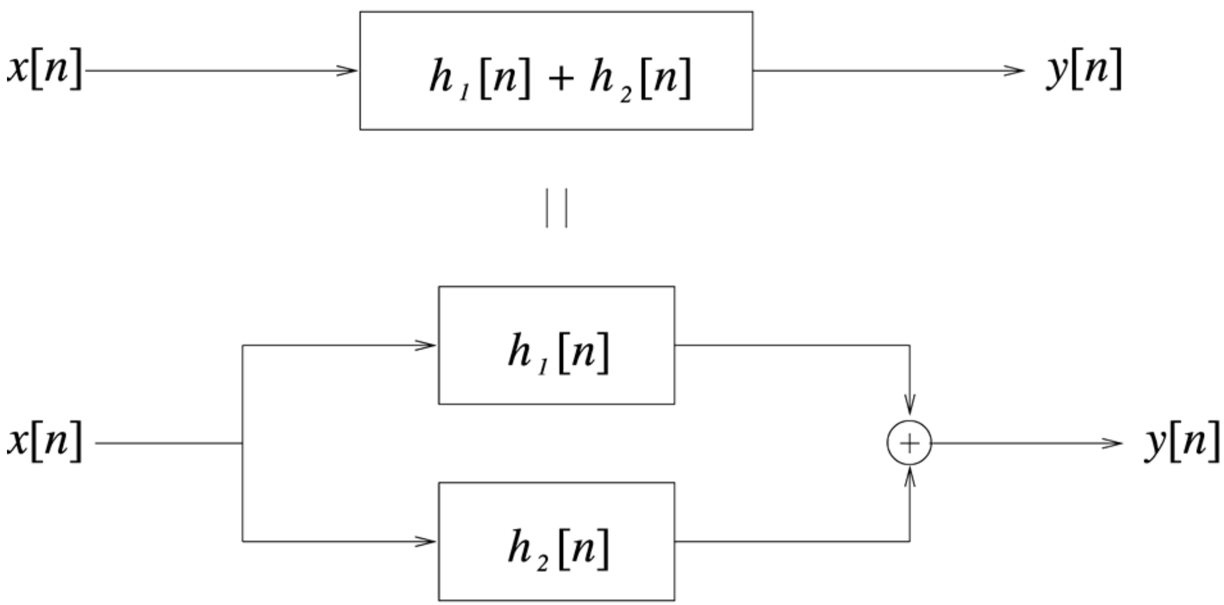
$$\Downarrow$$

$$s[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[k]$$

La propiedad distributiva

$$x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x * h_2[n]$$

Interpretación



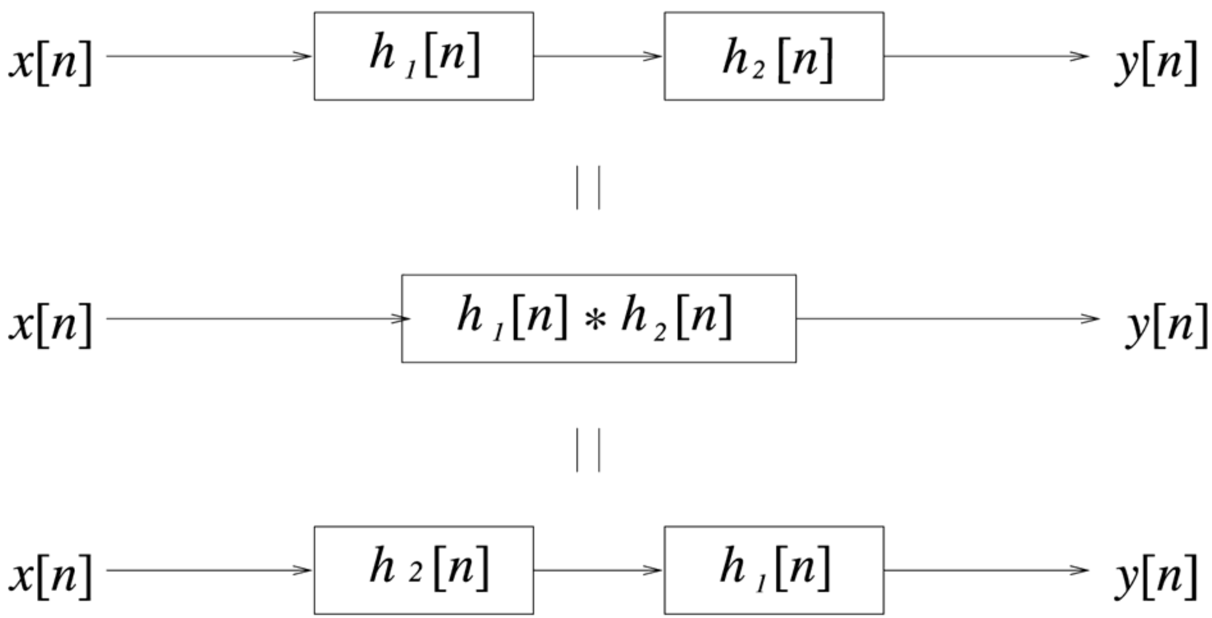
La propiedad asociativa

$$x[n] * (h_1[n] * h_2[n]) = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n]$$

(conmutatividad)
(Commutativity) $\|$

$$x[n] * (h_2[n] * h_1[n]) = (x[n] * h_2[n]) * h_1[n]$$

Implicación (muy especial para los sistemas LTI)



Propiedades de los sistemas LTI

1) Causalidad $\Leftrightarrow$ $h[n] = 0 \text{ for all } n < 0$
(para todo)

2) Estabilidad $\Leftrightarrow$ $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| < \infty$