

**6.003: Señales y sistemas—Otoño 2003**

**Prueba 2**  
**Jueves 13 de noviembre de 2003**

---

**Instrucciones:** El examen consta de 5 problemas (paginas 2-19), y de un espacio en blanco para trabajar, paginas 20 y 21. Asegúrese de que no le falta ninguna pagina. Al final de este cuadernillo, se facilitan las tablas de las propiedades de las series de Fourier, así como las propiedades y las tablas de las transformadas de Fourier de DT y CT. **Escriba sus respuestas directamente en los espacios indicados en las páginas de este cuadernillo. No olvide escribir su nombre en todas y cada una de las páginas. Puede utilizar cuadernos de examen para el trabajo en borrador, pero no serán calificados.** Todos los diagramas y dibujos deberán incluir las correspondientes leyendas. Si no se indica lo contrario, **las respuestas deben obtenerse o explicarse**, y no simplemente escribirse. Este es un examen a libro cerrado, aunque los estudiantes pueden utilizar dos hojas  $8\frac{1}{2} \times 11$  como referencia. No deben utilizarse calculadoras.

**NOMBRE:** \_\_\_\_\_ **SOLUCIONES** \_\_\_\_\_

Indique su sección	Sección	Hora	Profesor de la clase de repaso
<input type="checkbox"/>	1	10-11	Prof. Zue
<input type="checkbox"/>	2	11-12	Prof. Zue
<input type="checkbox"/>	3	1- 2	Prof. Gray
<input type="checkbox"/>	4	11-12	Dr. Rohrs
<input type="checkbox"/>	5	12- 1	Prof. Voldman
<input type="checkbox"/>	6	12- 1	Prof. Gray
<input type="checkbox"/>	7	10-11	Dr. Rohrs
<input type="checkbox"/>	8	11-12	Prof. Voldman

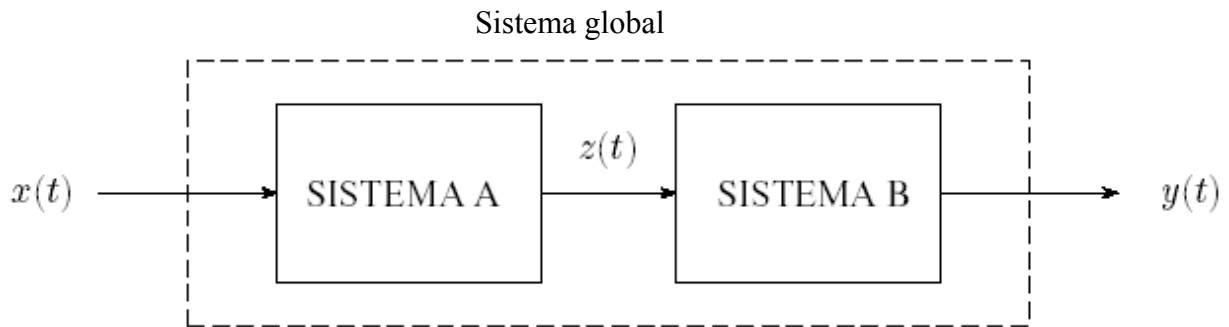
---

**Le rogamos no escriba nada en esta hoja a partir de la línea, ya que el espacio está reservado para uso de los examinadores:**

Problema	Nº de puntos	Puntuación	Examinad.
1	15		
2	20		
3	25		
4	25		
5	15		
Total	100		

### PROBLEMA 1 (15%)

Considere el siguiente sistema:



La relación entrada-salida del SISTEMA A se caracteriza por la siguiente ecuación causal de diferencias de coeficiente lineal constante (LCCDE):

$$\frac{dz(t)}{dt} + 6z(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 5x(t),$$

y la respuesta a impulso  $h_b(t)$  para el SISTEMA B se define de la forma siguiente:

$$h_b(t) = e^{-10t}u(t)$$

**Apartado a.** Cual es la respuesta de frecuencia del sistema completo? Es decir, dados  $x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega)$  e  $y(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} Y(j\omega)$ , determine  $H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$ .

$$H(j\omega) = \frac{j\omega + 5}{(j\omega + 6)(j\omega + 10)}$$

**Página de trabajo del problema 1**

a) Podemos hallar  $H_a(j\omega)$  mediante examen o utilizando la ecuación 4.76 (O&W, pág.331):

$$H_a(j\omega) = \frac{j\omega + 5}{j\omega + 6}$$

Podemos hallar  $H_b(j\omega)$  utilizando los pares de transformadas de Fourier de CT, donde:

$$e^{-at}u(t), \operatorname{Re}\{a\} > 0 \leftrightarrow \frac{1}{a + j\omega}$$
$$h_b(t) = e^{-10t}u(t) \leftrightarrow H_b(j\omega) = \frac{1}{10 + j\omega}$$

$$\Rightarrow H(j\omega) = H_a(j\omega)H_b(j\omega) = \boxed{\frac{j\omega + 5}{(j\omega + 6)(j\omega + 10)} = H(j\omega)}$$

*El problema 1 continua en la página siguiente.*

**Apartado b.** ¿Cual es la respuesta a impulso,  $h(t)$  del sistema completo?

$$h(t) = \underline{\left( -\frac{1}{4}e^{-6t} + \frac{5}{4}e^{-10t} \right) u(t)}$$

**Apartado c.** Cual es la ecuación diferencial que relaciona  $x(t)$  e  $y(t)$  ?

$$\underline{\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 16\frac{dy(t)}{dt} + 60y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 5x(t)}$$

**Página de trabajo del problema 1**

$$b) H(j\omega) = \frac{j\omega + 5}{(j\omega + 6)(j\omega + 10)} = \frac{A}{j\omega + 6} + \frac{B}{j\omega + 10}$$

$$A = H(j\omega)(j\omega + 6) \Big|_{j\omega = -6} = \frac{-6 + 5}{-6 + 10} = \boxed{\frac{-1}{4} = A}$$

$$B = H(j\omega)(j\omega + 10) \Big|_{j\omega = -10} = \frac{-10 + 5}{-10 + 6} = \frac{-5}{-4} = \boxed{\frac{5}{4} = B}$$

$$\rightarrow H(j\omega) = \frac{-1/4}{j\omega + 6} + \frac{5/4}{j\omega + 10}$$

$$\rightarrow \boxed{h(t) = \left( -\frac{1}{4}e^{-6t} + \frac{5}{4}e^{-10t} \right) (t)} \left( \begin{array}{l} \text{utilizando el par:} \\ (e^{-at}(t), Re\{a\}) \odot \leftrightarrow \frac{1}{a + j\omega} \end{array} \right)$$

$$c) H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{j\omega + 5}{(j\omega)^2 + 16j\omega + 60}$$

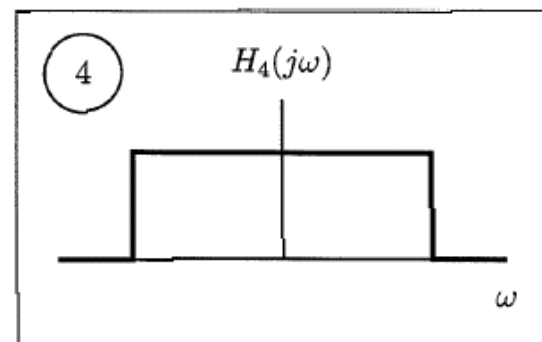
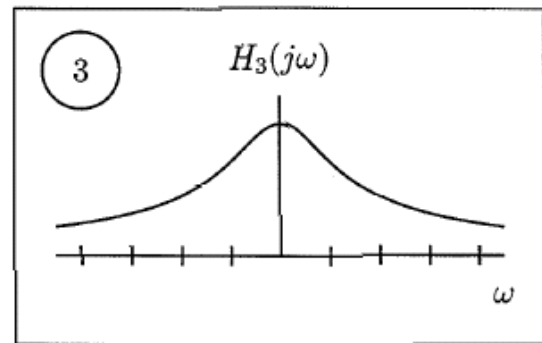
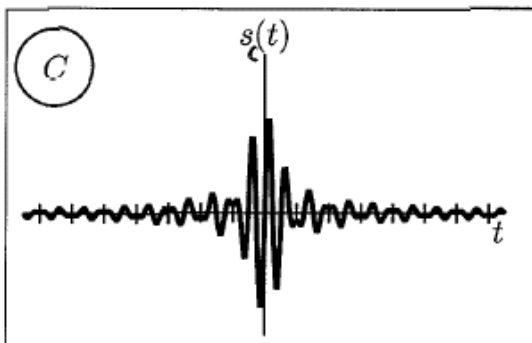
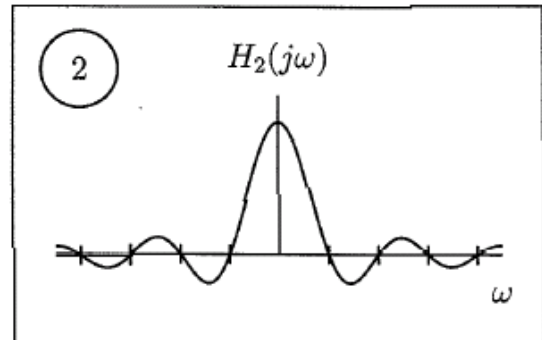
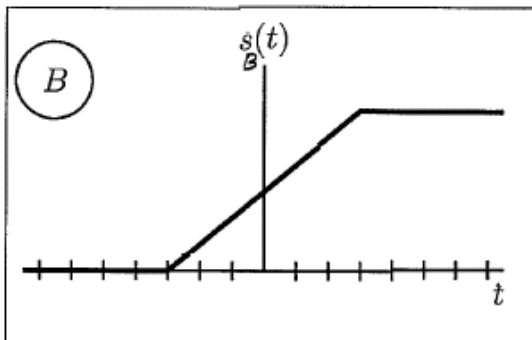
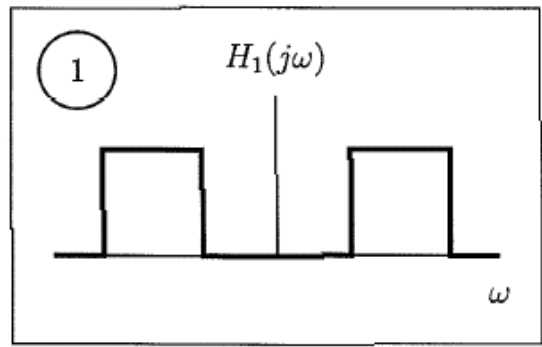
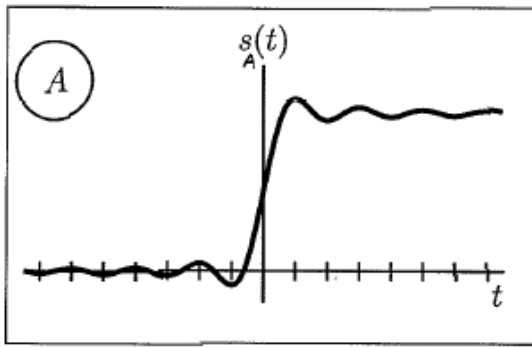
Mediante examen:

$$\boxed{\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 16\frac{dy(t)}{dt} + 60y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 5x(t)}$$

**PROBLEMA 2 (21%)**

Las siguientes imágenes, etiquetadas **A**, **B** y **C** son respuestas a escalón correspondientes a tres de las cuatro respuestas de frecuencia etiquetadas **1, 2, 3** y **4**. Para cada una de las respuestas a escalón, le rogamos introduzca el número de la correspondiente respuesta de frecuencia. **No es necesario añadir ninguna explicación o derivación en este problema.**

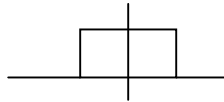
<b>Respuesta a escalón</b>	<b>Respuesta de frecuencia</b>
<i>A</i>	4
<i>B</i>	2
<i>C</i>	1

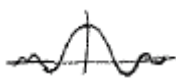


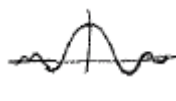
Las siguientes son más páginas adicionales de trabajo.

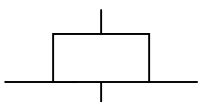
## Página de trabajo para el problema 2

Antes de relacionar las respuestas a escalón con las respuestas de frecuencia correspondientes, hagamos una lista de algunas expresiones útiles:

- $S(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau = h(t) * u(t) \leftrightarrow s(j\omega) = \frac{H(j\omega)}{j\omega} + \pi H(j\infty) \delta(\omega)$
- $S(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) d\tau = H(j\infty)$
- $x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ \infty, & |t| > T_1 \end{cases}$  (es decir, un furgón   $t$ )  $\leftrightarrow \frac{2 \sin \omega T_1}{\omega}$

(es decir, sinc,   $\omega$ )

- $\frac{\sin \omega t}{\pi t}$  (es decir, sinc,   $t$ )  $\leftrightarrow X(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < w \\ \infty, & |\omega| > w \end{cases}$

(es decir, un furgón,   $\omega$ )

La razón detrás de cada par relacionado es la siguiente:

### $S_B$ & $H_2(j\omega)$

$S_B(t)$  parece un furgón convolucionado con  $u(t)$ , de ahí que el correspondiente  $h(t)$  sea un furgón. Por lo tanto, el correspondiente  $H(j\omega)$  es una función sinc  $\Rightarrow H_2(j\omega)$ .

### $S_C$ & $H_1(j\omega)$

$S_C(t)$  parece aproximarse a cero cuando  $t \rightarrow \infty$  (es decir,  $S(\infty) = \infty$ ). Por lo tanto, el correspondiente  $H(j\omega)$  tiene una ganancia DC cero (es decir,  $H(j0) = \infty$ )

$\Rightarrow H_1(j\omega)$

**Página de trabajo del problema 2**

Otra forma de ver que  $S_C(t)$  &  $H_1(j\omega)$  son un par es la siguiente:

$S_C(t)$  es una función impar real  $\rightarrow S_C(j\omega)$  es puramente imaginaria e impar.

$$\therefore S_C(j\omega) = \frac{H(j\omega)}{j\omega} + \pi H(j0)\delta(\omega)$$

$\therefore H(j\omega)$  debe ser real y par &  $H(j0) = \odot$

$\Rightarrow H_1(j\omega)$  es la respuesta de frecuencia correspondiente.

 $S_A(t)$  &  $H_4(j\omega)$ 


$S_A(t)$  tiene dos propiedades que nos permitirán hallar el correspondiente  $H(j\omega)$ :

- $S_A(\infty) \neq \odot \Rightarrow H(j0) \neq \odot$
- $S_A(t)$  oscila  $\Rightarrow h(t)$  debe oscilar también.

Posibles causas de la oscilación en  $h(t)$  son:

- Alcanzar el punto máximo a una frecuencia no cero (por ejemplo, un filtro paso de banda o BPF).
- Discontinuidad en cualquier derivada de  $H(j\omega)$ . (Piense en el fenómeno de Gibbs, o en un impulso en el dominio de frecuencia correspondiente a un exponencial complejo en el dominio de tiempo).

$H_3(j\omega)$  tiene una ganancia DC no cero, pero es una función regular y no tiene ningún punto máximo no DC  $\Rightarrow$  no puede ser el correspondiente  $H(j\omega)$ .

$H_4(j\omega)$  es un furgón de ganancia Dc no cero y cuya respuesta a impulso correspondiente es una función sinc (es decir, tiene oscilaciones )

$\Rightarrow H_4(j\omega)$  es la respuesta de frecuencia correspondiente.

**PROBLEMA 3 (25%)**

**Apartado a.** Determine la transformada de Fourier  $R(e^{j\omega})$  de la siguiente secuencia:

$$r[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M, M \text{ es un entero par mayor 1} \\ 0, & \text{de lo contrario.} \end{cases}$$

$$R(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\omega \frac{M}{2}} \sin\left[\omega\left(\frac{M+1}{2}\right)\right]}{\sin(\omega/2)}$$

**Apartado b.** Considere la secuencia:

$$w[n] = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right)\right), & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

donde  $M$  es tal como se definió en el apartado a. Expresé  $W(e^{j\omega})$ , la transformada de Fourier de  $w[n]$  en términos de  $R(e^{j\omega})$ , la transformada de Fourier de la secuencia  $r[n]$  anterior.

$$W(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} R(e^{j\omega}) - \frac{1}{4} R\left(e^{j\left(\omega - \frac{2\pi}{M}\right)}\right) - \frac{1}{4} R\left(e^{j\left(\omega + \frac{2\pi}{M}\right)}\right)$$

**Página de trabajo del problema 3**

a) A partir de la figura, podemos ver que  $r[n]$  es un furgón par desplazado a la derecha por  $\frac{M}{2}$

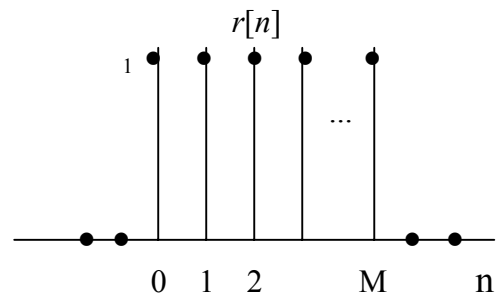
(observe que  $\frac{M}{2}$  es entero porque  $M$  es par).

Mediante la propiedad de desplazamiento de tiempo y el siguiente par de transformada de Fourier de DT:

$$x[n] = \begin{cases} 1, & |n| \leq N_1 \\ 0, & |n| > N_1 \end{cases} \leftrightarrow \frac{\sin\left[\omega\left(N_1 + \frac{1}{2}\right)\right]}{\sin \omega/2}$$

hallamos:

$$R(j\omega) = e^{-j\omega\frac{M}{2}} \frac{\sin\left[\omega\frac{M+1}{2}\right]}{\sin(\omega/2)}$$



b)  $w[n]$  se puede expresar de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} w[n] &= r[n] \cdot \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right) \right] \\ &= r[n] \cdot \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{4} e^{j\frac{2\pi n}{M}} - \frac{1}{4} e^{-j\frac{2\pi n}{M}} \right] \\ &= \frac{1}{2} r[n] - \frac{1}{4} r[n] e^{j\frac{2\pi n}{M}} - \frac{1}{4} r[n] e^{-j\frac{2\pi n}{M}} \end{aligned}$$

si utilizamos la propiedad de desplazamiento de frecuencia:

$$\rightarrow W(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} R(e^{j\omega}) - \frac{1}{4} R\left(e^{j\left(\omega - \frac{2\pi}{M}\right)}\right) - \frac{1}{4} R\left(e^{j\left(\omega + \frac{2\pi}{M}\right)}\right)$$

*El problema 3 continua en la página siguiente.*

**Apartado c.** Existe un entero par positivo  $M$  que hará que  $W(e^{j\omega})$  sea real? De ser así, halle los valores de  $M$  que cumplan esta restricción. De no ser así, explique por qué.

**SI**

**NO**

Valores de  $M$  \_\_\_\_\_

Explicación:

*Explicación:* para que  $W(e^{j\omega})$  sea real,  $w[n]$  tiene que ser par. El valor de  $M$  sólo determina la anchura de  $w[n]$ , que tiene un valor cero para  $n < \ominus$ .

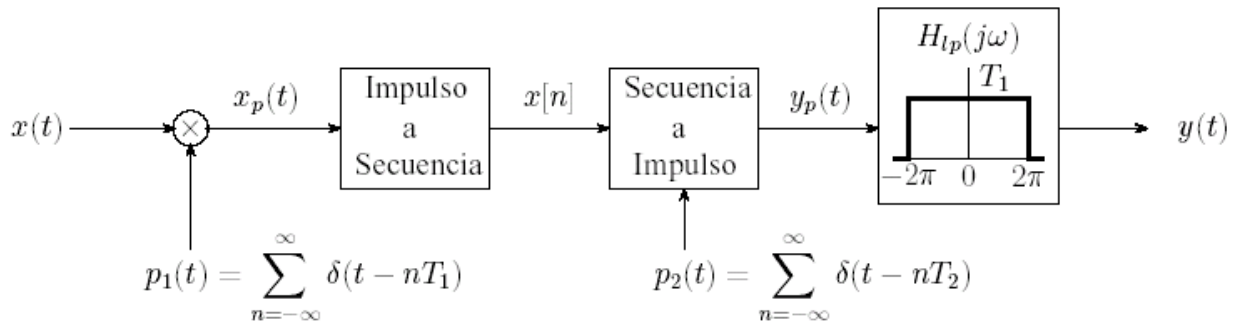
→  $w[n]$  no puede convertirse en par al modificar  $M$ .

→ no existe un valor de  $M$  que pueda hacer que  $W(e^{j\omega})$  sea real.

**Página de trabajo del problema 3**

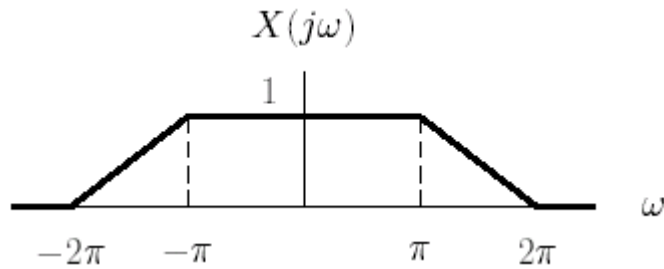
**PROBLEMA 4 (20%)**

Considere le siguiente sistema:



$p_1(t)$  y  $p_2(t)$  son trenes de impulsos con periodos fundamentales  $T_1$  y  $T_2$ , respectivamente.  $H_{lp}(j\omega)$  es un filtro de paso bajo cuya ganancia es  $T_1$  y cuya frecuencia de corte se encuentra en  $\omega_c$ . Observe que  $x[n] = x(nT_1)$  e  $y_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t - nT_2)$ .

La entrada  $x(t)$  es una señal real con límite de banda cuya transformada de Fourier es:

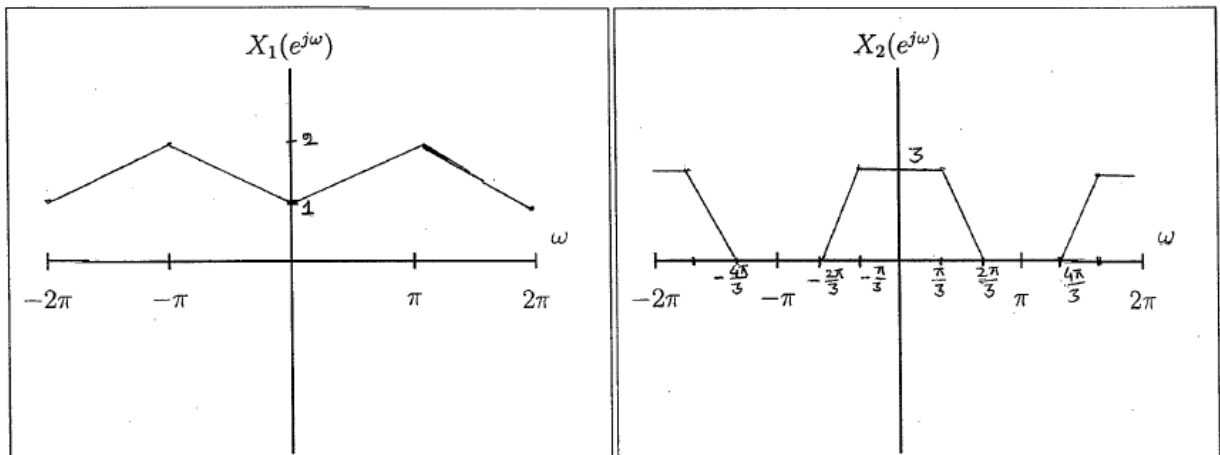


**Apartado a.** Definamos:

$$x_1[n] = x(nT_1), \quad \text{donde } T_1 = 1,$$

$$x_2[n] = x(nT_1), \quad \text{donde } T_1 = \frac{1}{3}.$$

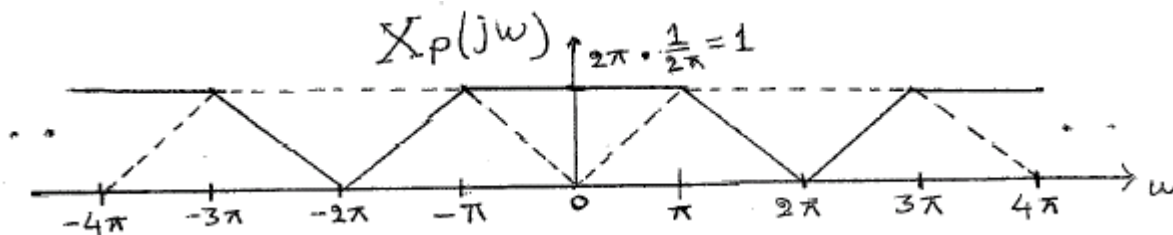
En los ejes que se indican a continuación y en la parte superior de la página siguiente, indique los diagramas etiquetados de  $X_1(e^{j\omega})$  y  $X_2(e^{j\omega})$ , las transformadas de Fourier de  $x_1[n]$  y  $x_2[n]$  respectivamente.



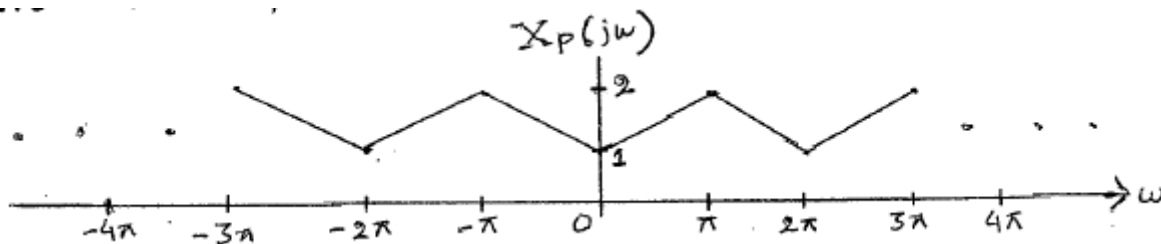
**Página de trabajo del problema 4**

$p_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_1)$  y  $T_1 = 1 \cdot P_1(j\omega)$  son trenes de impulsos con periodo fundamental  $\frac{2\pi}{T_1} = 2\pi$  y cuya área debajo de cada impulso es  $2\pi$ .

$x_p(t) = x(t) \cdot p_1(t)$ . Utilizando la propiedad de la multiplicación y tomando la transformada de Fourier:

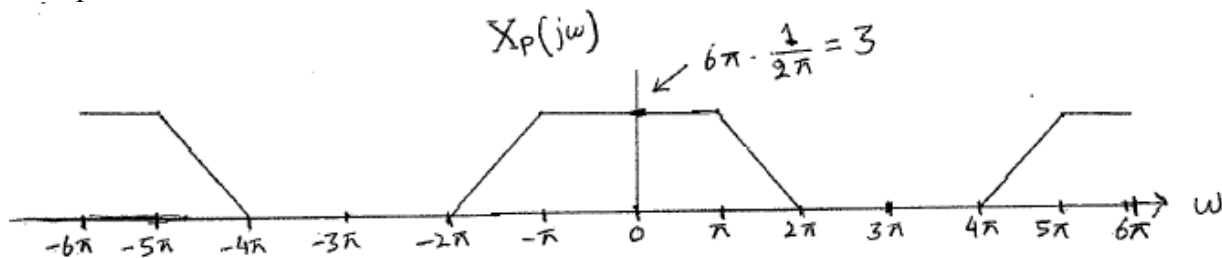


Hemos realizado una superposición, puesto que no se cumple la tasa de Nyquist para el muestreo. Si añadimos las regiones superpuestas:



Para hallar  $X_1(e^{j\Omega})$  utilizamos  $\Omega = \omega T_1$  y escalamos el eje de frecuencia de  $X_p(j\omega)$  por  $T_1 = 1$ . El  $X_1(e^{j\Omega})$  que resulta se indica en la página 14.

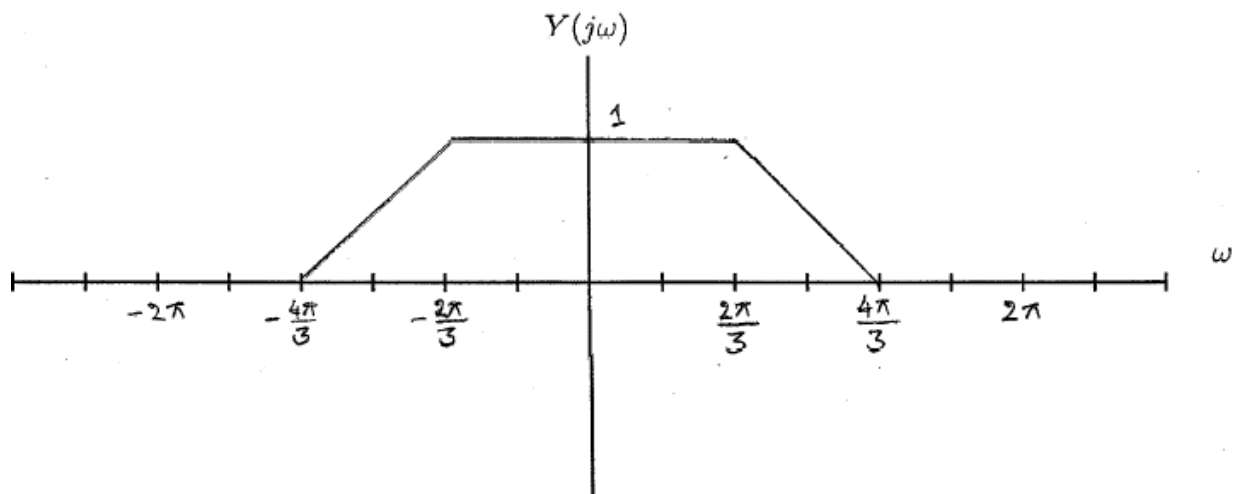
A continuación,  $T_1 = \frac{1}{3}$ . Por lo tanto,  $P_1(j\omega)$  es periódico, tiene un periodo fundamental  $\frac{2\pi}{T_1} = 6\pi$  y cada impulso tiene un área de  $6\pi$ . Si utilizamos de nuevo la propiedad de la multiplicación:



Si multiplicamos el eje de frecuencia de  $X_p(j\omega)$  por  $T_1 = \frac{1}{3}$ , obtenemos  $X_2(e^{j\Omega})$ , tal como se indica en la página 14.

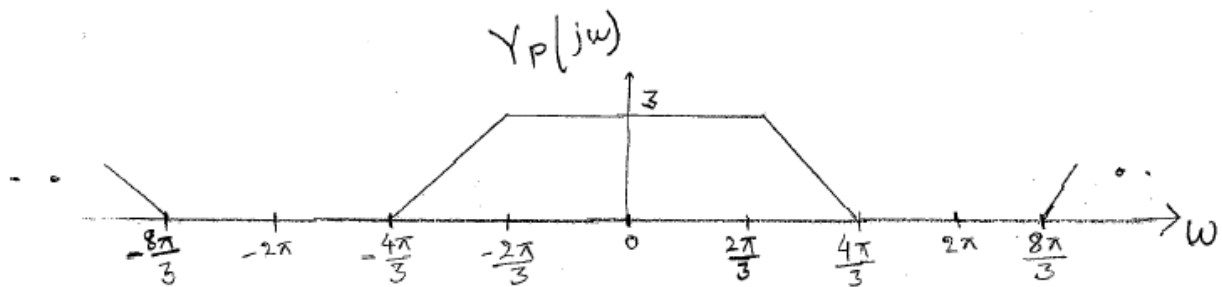
*El problema 4 continua en la página siguiente.*

**Apartado b.** Suponga que  $T_1 = \frac{1}{3}$  y que  $T_2 = \frac{1}{2}$ . Realice un diagrama etiquetado de  $Y(j\omega)$ , la transformada de Fourier de la salida global  $y(t)$ .



**Página de trabajo del problema 4**

Aquí,  $T_1 = \frac{1}{3}$ . Por lo tanto,  $X(e^{j\Omega}) = X_2(e^{j\Omega})$ , como se halló en el apartado (a). Para hallar  $Y_p(j\omega)$ , escalamos el eje de frecuencia de  $X(e^{j\Omega})$  por  $\frac{1}{T_2} = 2$ .

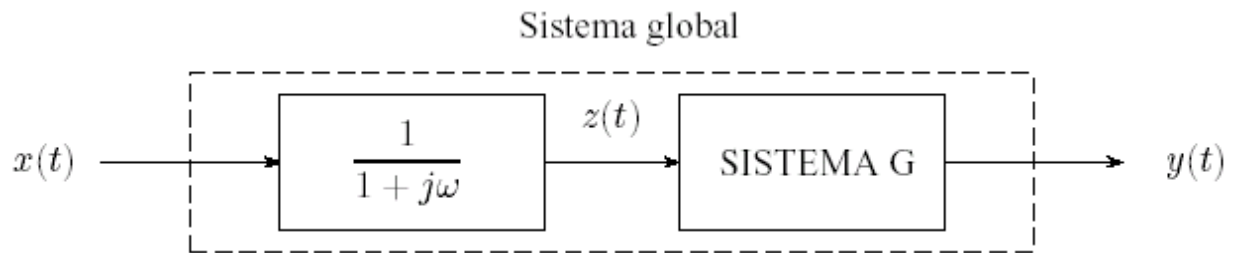


$Y_p(j\omega)$  pasa a través del filtro de paso bajo con una frecuencia de corte  $\omega_c = 2\pi$  y una ganancia  $T_1 = \frac{1}{3}$ .

Por lo tanto, el  $Y(j\omega)$  que resulta se indica en la página 16.

**PROBLEMA 5 (17%)**

Tenemos la siguiente cascada de dos sistemas LTI de CT:

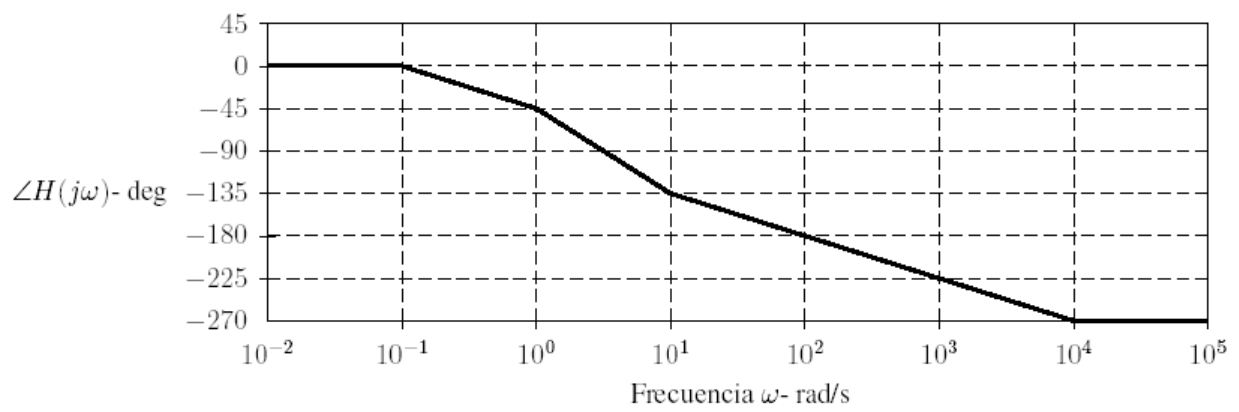
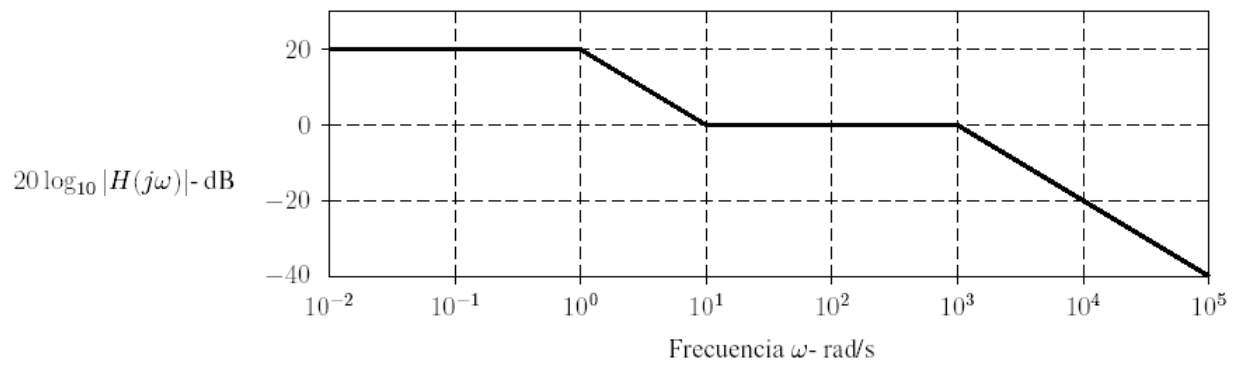


La aproximación de línea recta de los diagramas de Bode del sistema global,  $H(j\omega)$  se indica en la página siguiente.

Halle la respuesta de frecuencia,  $G(j\omega)$ , del SISTEMA G.

$$G(j\omega) = \frac{10(1 - j\omega 0.1)}{1 + j\omega 0.001}$$

\_\_\_\_\_



**Página de trabajo**

A partir del diagrama de la magnitud, observamos que  $H(j\omega)$  tiene 3 puntos de ruptura.

$$H(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega} \cdot G_1(j\omega)$$

Por lo tanto,  $G(j\omega)$  necesita 2 puntos de ruptura.

$$\text{Sea, } G(j\omega) = C \cdot G_1(j\omega) \cdot G_2(j\omega)$$

$G_1(j\omega)$  tiene un punto de ruptura en  $\omega = 10$  y es necesario que el diagrama de magnitud de  $G_1(j\omega)$  suba comenzando en  $\omega = 10$  con una pendiente de  $20dB/de$ . A partir del diagrama de fase de  $H(j\omega)$ , observamos que la fase desciende con una pendiente de  $\pi/2/dec$

comenzando en  $\omega = \frac{10}{10} = 1$ .

$$\text{Por lo tanto, } G_1(j\omega) = 1 - j\omega \cdot \frac{1}{10} = 1 - j\omega \cdot 0.1$$

$G_2(j\omega)$  tiene un punto de ruptura en  $\omega = 10^3$  y el diagrama de magnitud de  $G_2(j\omega)$  tiene que descender comenzando en  $\omega = 10^3$ , con una pendiente de  $20dB/dec$ . A partir del diagrama de fase de  $H(j\omega)$ , observamos que la fase desciende con una pendiente de  $\pi/4/dec$ , comenzando en  $\omega = \frac{10^3}{10} = 10^2$ .

$$\text{Por lo tanto, } G_2(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega \frac{1}{10^3}} = \frac{1}{1 + j\omega \cdot 0.001}$$

**Página de trabajo**

Por último,  $C=10$ , hace que el diagrama de magnitud de  $H(j\omega)$  comience en 20 dB.

Por lo tanto, 
$$G(j\omega) = 10 \cdot (1 - j\omega 0.1) \cdot \frac{1}{1 + j\omega 0.001}$$