Señales y sistemas

Otoño 2003

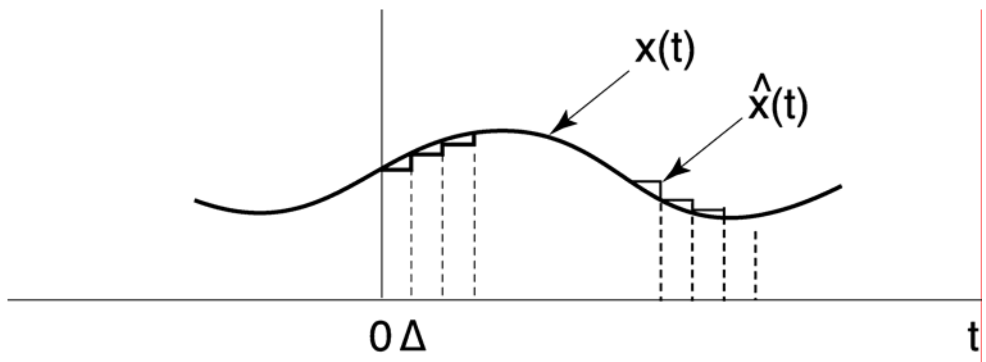
Clase 4

16 de septiembre de 2003

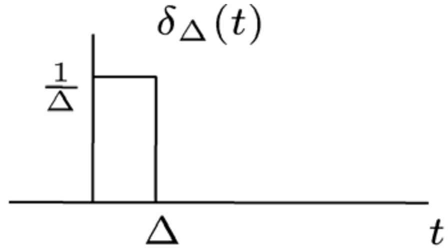
1. Representación de señales de tiempo continuo en términos de impulsos unitarios desplazados.
2. Representación de convolución integral de sistemas LTI de tiempo continuo (TC)
3. Propiedades y ejemplos
4. El impulso unitario como pulso idealizado lo "suficientemente corto": la definición operacional de $\delta(t)$

Representación de señales de tiempo continuo (TC)

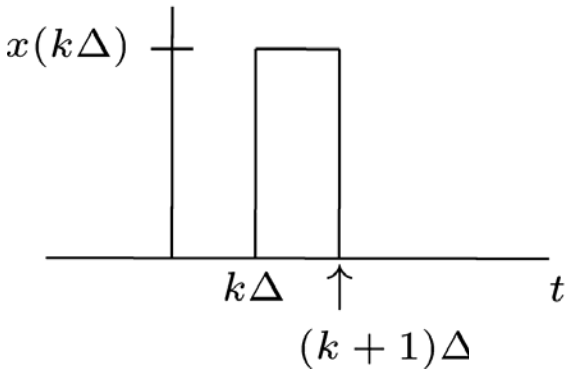
- Aproxime cualquier entrada $x(t)$ como la suma de impulsos desplazados y escalados.



$$\hat{x}(t) = x(k\Delta)\ ,\ k\Delta < t < (k+1)\Delta$$



$\delta_\Delta(t)$ tiene área unitaria



$$= \quad x(k\Delta)\delta_\Delta(t-k\Delta)\Delta$$

$$\Downarrow$$

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\delta_\Delta(t-k\Delta)\Delta$$

$$\downarrow \ \text{limit as } \Delta \to 0$$

(límite como)

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

Propiedad de desplazamiento del impulso unitario

Respuesta de un sistema LTI de tiempo continuo (TC)

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{CT LTI}\\ \text{(LTI de TC)}\end{array}} \longrightarrow y(t)$$

$$\delta_\Delta(t) \quad \longrightarrow \quad h_\Delta(t)$$

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\delta_\Delta(t-k\Delta)\Delta \quad \longrightarrow \quad \hat{y}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)h_\Delta(t-k\Delta)\Delta$$

$$\Downarrow$$

Impulse response:
(Respuesta de impulsos)

$$\boxed{\delta(t) \longrightarrow h(t)}$$

Taking limits $\Delta \to 0$
(Tomando límites)

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \longrightarrow \underbrace{y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau}_{\text{Convolution Integral}}$$

Convolution Integral
(Integral de convolución)

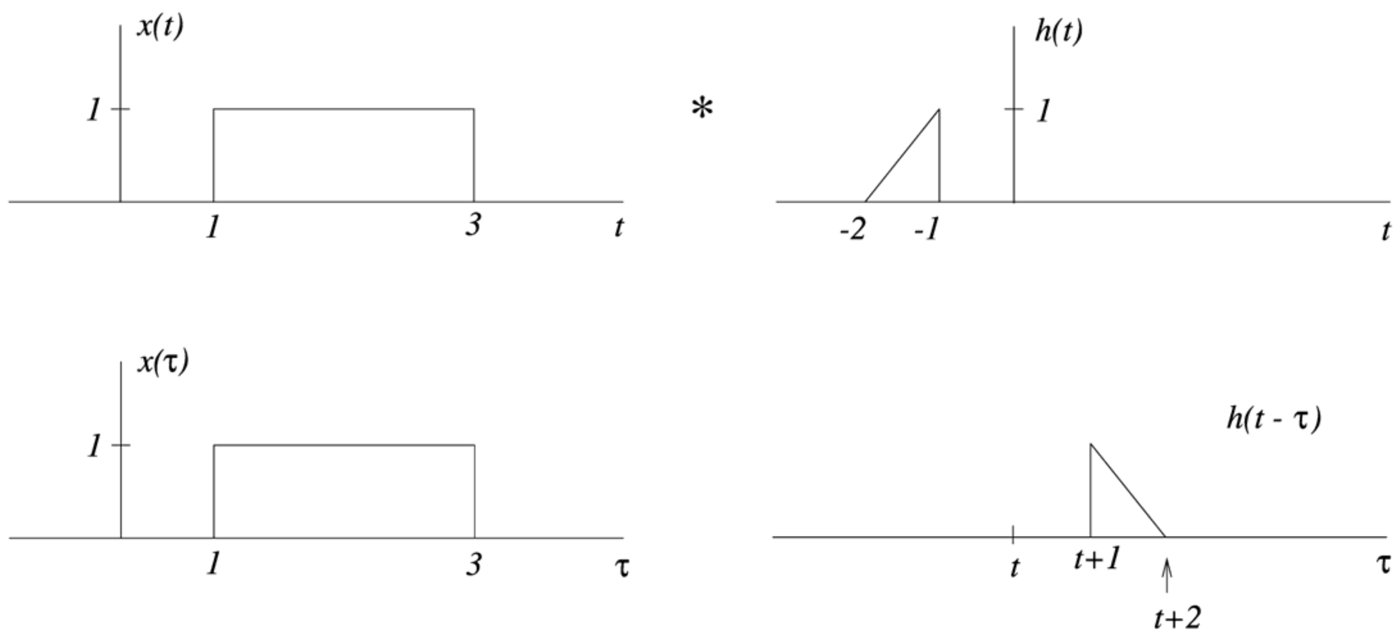
Operación de convolución en tiempo continuo (TC)

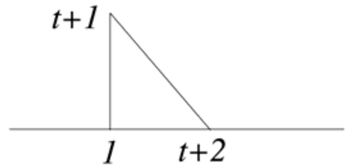
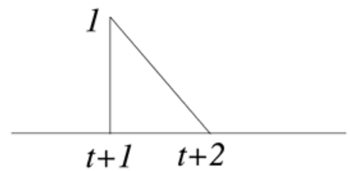
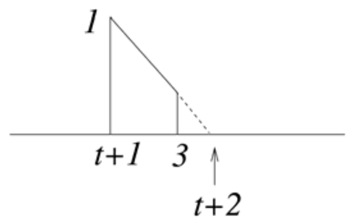
$$y(t) = x(t) * h(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

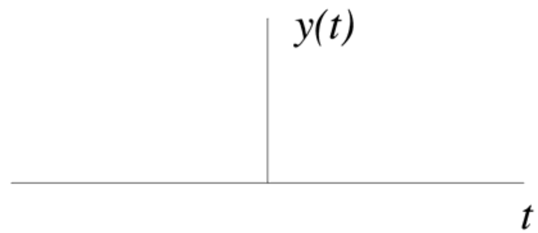
$$h(\tau) \xrightarrow[\text{continuo}]{\text{Flip}} h(-\tau) \quad \xrightarrow[\text{(deslizar)}]{\text{Slide}} \quad h(t-\tau)$$

$$\xrightarrow[\text{(multiplicar)}]{\text{Multiply}} \quad x(\tau)h(t-\tau) \ \xrightarrow[\text{(integrar)}]{\text{Integrate}} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Ejemplo: convolución en tiempo continuo



Time Interval (Intervalo de tiempo)	$x(\tau) \cdot h(t-\tau)$		Output (Salida)
$t < -1$	0	$\Longrightarrow$	$y(t) = 0$
$-1 < t < 0$		$\Longrightarrow$	$y(t) = \frac{1}{2}(t+2)(t+2-1)$ $= \frac{1}{2}(t+1)^2$
$0 < t < 1$		$\Longrightarrow$	$y(t) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$
$1 < t < 2$		$\Longrightarrow$	$y(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(t+2-3)(t-1)$ $= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(t-1)^2$
$t > 2$	0	$\Longrightarrow$	$y(t) = 0$



PROPIEDADES Y EJEMPLOS

1) Conmutatividad: $x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$

2) $x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$ Sifting property: $x(t) * \delta(t) = x(t)$

(propiedad de desplazamiento)

3) Un integrador: $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau) d\tau$

$$\Downarrow$$

$$h(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau) d\tau = u(t)$$

So if input $x(t) = \delta(t)$

output $y(t) = h(t)$

(Por lo tanto, si la entrada $x(t) = \delta(t)$, la salida $y(t) = h(t)$)

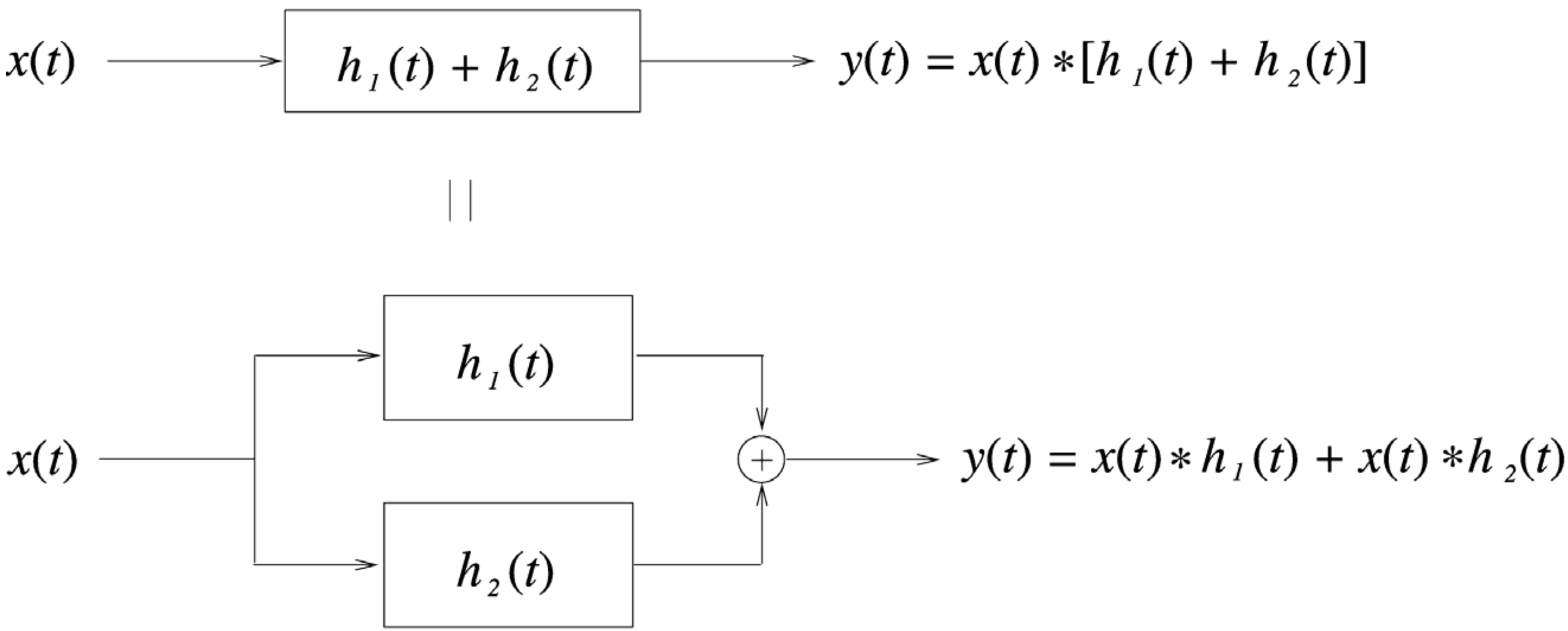
That is (Es decir)

$$y(t) = x(t) * h(t) = \boxed{x(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau) d\tau}$$

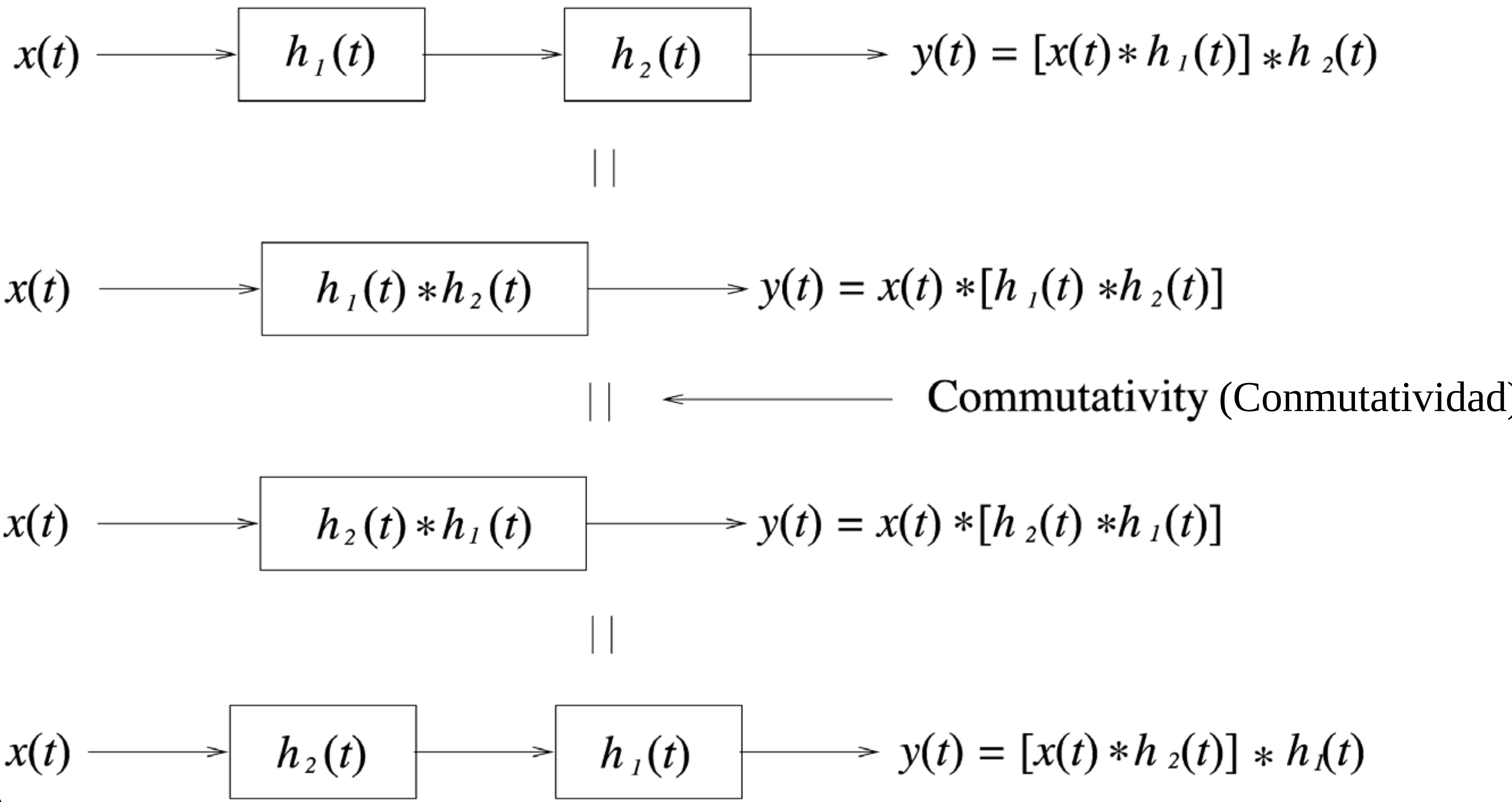
4) Respuesta a escalón:

$$s(t) = u(t) * h(t) = h(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau) d\tau$$

DISTRIBUTIVIDAD



ASOCIATIVIDAD



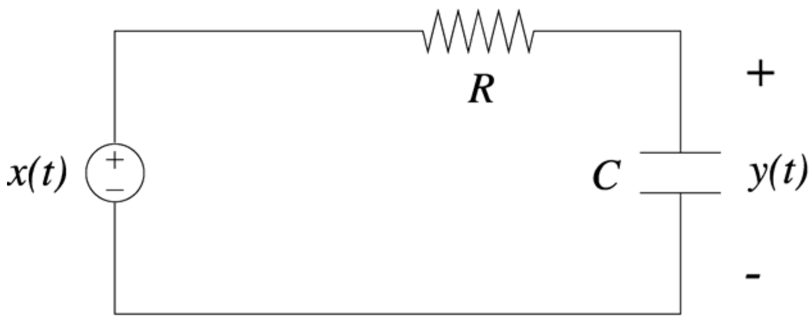
Causality: CT LTI system is causal $\Leftrightarrow h(t) = 0, t < 0$

(Causalidad: un sistema LTI de tiempo continuo (TC) es causal)

Stability: CT LTI system is stable $\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty$

(Estabilidad: un sistema LTI de tiempo continuo (TC) es estable)

El impulso como un pulso "corto" idealizado



$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{RC}y(t) = \frac{1}{RC}x(t)$$

Considere una respuesta desde el reposo inicial hasta pulsos de formas y duraciones distintas, pero con área unitaria. A medida que disminuye la duración, las respuestas se vuelven similares para las distintas formas de los pulsos.

La definición operacional del impulso unitario $\delta(t)$

$\delta(t)$ — idealización de un impulso de área unitaria tan breve que, cualquier sistema digital que nos interese solamente responderá al área del impulso, siendo insensible a su duración.

Desde el punto de vista operacional: el impulso unitario es la señal que una vez aplicada a cualquier sistema LTI resulta en una salida igual a la respuesta a impulso del sistema. Es decir,

$$\delta(t) * h(t) = h(t) \qquad \text{for all } h(t)$$

(para todo)

— $\delta(t)$ se define por lo que hace conforme a la convolución.

El doblete unitario — Diferenciador

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\frac{d}{dt}} \longrightarrow y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

Respuesta a impulso = doblete unitario

$$u_1(t) = \frac{d\delta(t)}{dt}$$

La definición operacional del doblete unitario:

$$x(t) * u_1(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

Tripletes y otros

$n > 0$

$$u_n(t) = \underbrace{u_1(t) * \cdots * u_1(t)}_{\text{n times}}$$

(n veces)

n es el número de diferenciaciones

Operational definitions

(Definiciones operacionales)

$$x(t) * u_n(t) = \frac{d^n x(t)}{dt^n} \quad (n > 0)$$

Integradores

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\int} \longrightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$$

Impulse response: $u_{-1}(t) \equiv u(t)$
(Respuesta a impulso:)

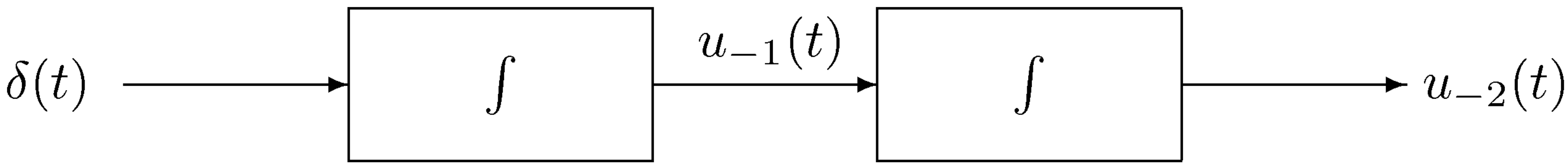
"–1 derivados" = integral ⇒ Resp. a imp. = esc. unit.

Operational definition: $x(t) * u_{-1}(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$
(Definición operacional:)

Cascade of n integrators:
(Cascada de *n* integradores:)

$$u_{-n}(t) = \underbrace{u_{-1}(t) * \cdots * u_{-1}(t)}_{\substack{\text{n times} \\ \text{(n veces)}}} \quad (n > 0)$$

Integradores (continuación)



$$\begin{aligned} u_{-2}(t) &= \int_{-\infty}^{t} u_{-1}(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} u(\tau)d\tau \\ &= t \cdot u(t) \qquad \text{the unit ramp} \end{aligned}$$

(la rampa unitaria)

More generally, for $n > 0$
(Más en general, para $n > 0$)

$$u_{-n}(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(t)$$

Notación

Defina: $$u_0(t) = \delta(t)$$

A continuación: $$u_n(t) * u_m(t) = u_{n+m}(t)$$

n and m can be $\pm$.
(n y m pueden ser $\underline{+}$)

Ej., $$u_1(t) * u_{-1}(t) = u_0(t)$$

$$\Downarrow$$

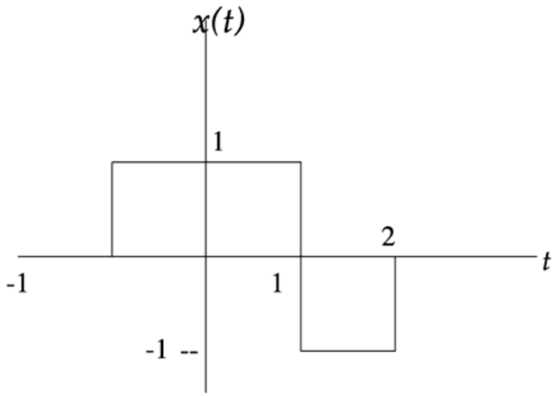
$$\left(\frac{d}{dt}u(t)\right) = \delta(t)$$

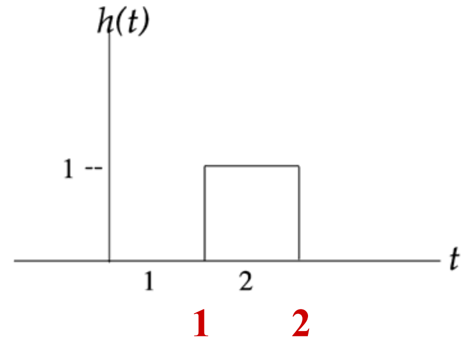
Trucos que pueden resultar útiles

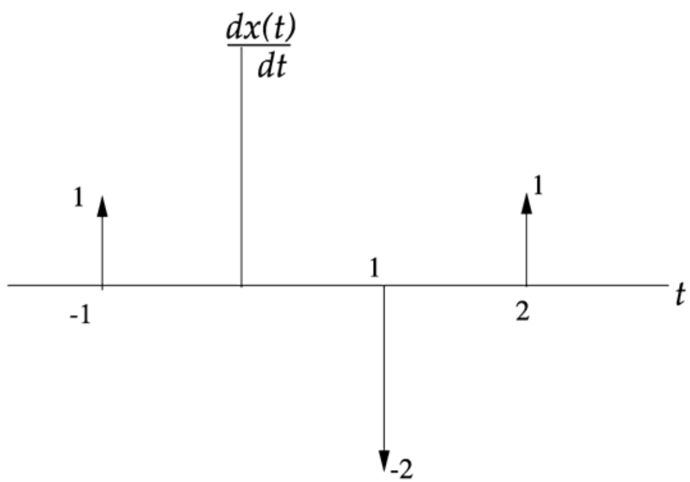
$$\begin{aligned} x(t) * h(t) &= x(t) * \delta(t) * h(t) \\ &= x(t) * u_1(t) * u_{-1}(t) * h(t) \\ &= \{[x(t) * u_1(t)] * h(t)\} * u_{-1}(t) \end{aligned}$$

Primero diferencie, a continuación, convolucione, y después, integre

Ejemplo



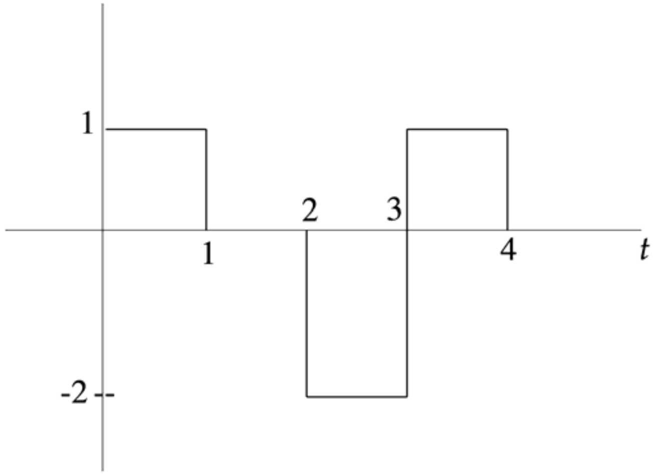




$$\frac{dx(t)}{dt} = \delta(t+1) - 2\delta(t-1) + \delta(t-2)$$

Ejemplo (continuación)

$$\frac{dx(t)}{dt} * h(t) = h(t+1) - 2h(t-1) + h(t-2)$$



$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{t} \left[\frac{dx(\tau)}{d\tau} * h(\tau) \right] d\tau$$