Señales y sistemas

Otoño 2003

Clase 9

2 de octubre de 2003

1. Propiedad de la convolución de la TF en tiempo continuo.
2. Respuesta de frecuencia y repaso de sistemas LTI.
3. Propiedad de la multiplicación y relación de Parseval.
4. La transformada de Fourier en tiempo discreto.

El par transformada de Fourier en tiempo continuo

$$x(t) \longleftrightarrow X(j\omega)$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

– FT (TF)
(Ecuación de análisis)

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

– Inverse FT
(TF inversa)
(Ecuación de síntesis)

Última clase: algunas propiedades
Hoy: más exploración

Propiedad de convolución

$$y(t) = h(t) * x(t) \longleftrightarrow Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$$

$$\text{where } h(t) \longleftrightarrow H(j\omega)$$

(donde)

Una consecuencia de la propiedad de función propia:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi} X(j\omega)d\omega\right)}_{\text{coefficient } a} e^{j\omega t}$$

(coeficiente)

$$ae^{j\omega t} \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow H(j\omega)ae^{j\omega t}$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left(H(j\omega)\frac{1}{2\pi} X(j\omega)d\omega\right)}_{H(j\omega)\cdot a} e^{j\omega t}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{H(j\omega)X(j\omega)}_{Y(j\omega)} e^{j\omega t} d\omega$$

Ecuación de síntesis para *y(t)*

Repaso de la respuesta de frecuencia

respuesta a impulso

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) = h(t) * x(t)$$

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$$

respuesta de frecuencia

La respuesta de frecuencia de un sistema LTI en tiempo continuo es simplemente la transformada de Fourier de su respuesta a impulso

Ejemplo 1: $x(t) = e^{j\omega_0 t} \longrightarrow \boxed{H(j\omega)} \longrightarrow y(t)$

Recall (Recuerde)

$$e^{j\omega_0 t} \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega) = H(j\omega)2\pi\delta(\omega - \omega_0) = 2\pi H(j\omega_0)\delta(\omega - \omega_0)$$

$\Downarrow$ inverse FT (TF inversa)

$$y(t) = H(j\omega_0)e^{j\omega_0 t}$$

Ejemplo 2: un diferenciador

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

- an LTI system
(un sistema LTI)

Propiedad de diferenciación: $Y(j\omega) = j\omega X(j\omega)$

$$\Downarrow$$

$$H(j\omega) = j\omega$$

1) Amplifica frecuencias altas (realza los bordes marcados)

2) $+\pi/2$ phase shift $(j = e^{j\pi/2})$
(desplaz. de fase)

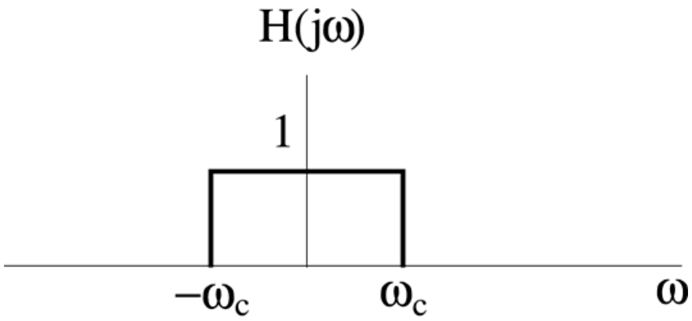
Mayor en ω_o alto

desplaz. de fase

$$\frac{d}{dt}\sin\omega_0 t = \omega_0 \cos\omega_0 t = \omega_0 \sin(\omega_0 t + \tfrac{\pi}{2})$$

$$\frac{d}{dt}\cos\omega_0 t = -\omega_0 \sin\omega_0 t = \omega_0 \cos(\omega_0 t + \tfrac{\pi}{2})$$

Ejemplo 3: respuesta a impulso de un filtro ideal de paso bajo



$$h(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega t}\,d\omega = \frac{\sin\omega_c t}{\pi t} = \frac{\omega_c}{\pi}\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega_c t}{\pi}\right)$$

Define: $\mathrm{sinc}(\theta) = \dfrac{\sin\pi\theta}{\pi\theta}$

Preguntas:

1) ¿Es este un sistema causal? No.

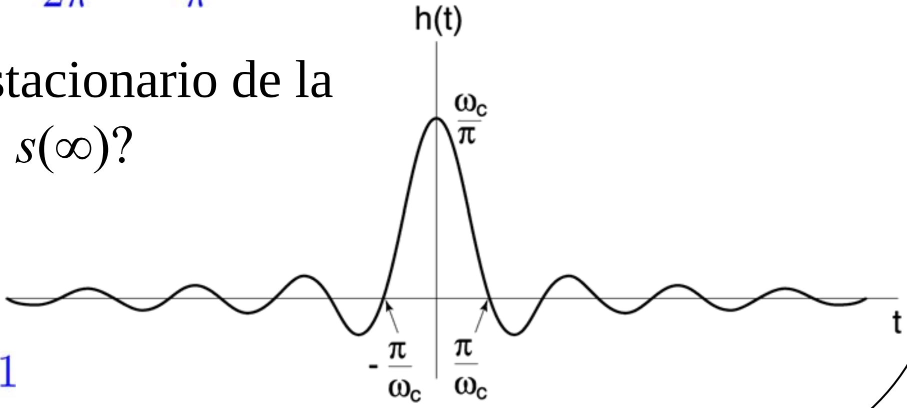
2) ¿Qué es $h(0)$?

$$h(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega)\,d\omega = \frac{2\omega_c}{2\pi} = \frac{\omega_c}{\pi}$$

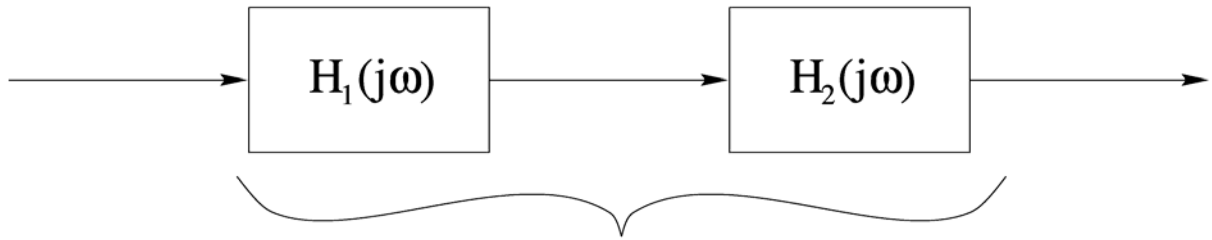
3) ¿Cuál es el valor de estado estacionario de la respuesta a escalón, es decir, $s(\infty)$?

$$s(t) = \int_{-\infty}^{t} h(t)\,dt$$

$$s(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\,dt = H(j0) = 1$$

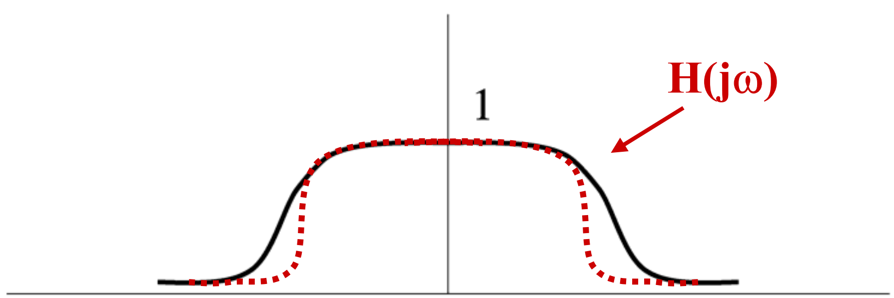


Ejemplo 4: operaciones de filtrado en cascada



$$H(j\omega) = H_1(j\omega)\, H_2(j\omega)$$

e.g. $H_1(j\omega) = H_2(j\omega)$



$\Longrightarrow$ $H(j\omega) = H_1^2(j\omega)$ has a sharper frequency selectivity
((...) tiene una selectividad de frecuencia más aguda)

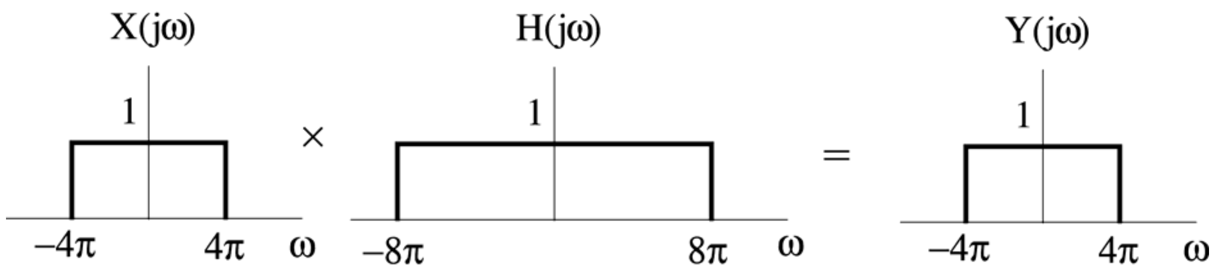
Ejemplo 5:

$$\underbrace{\frac{\sin 4\pi t}{\pi t}}_{x(t)} * \underbrace{\frac{\sin 8\pi t}{\pi t}}_{h(t)} = \quad ?$$

$$Y(j\omega) = X(j\omega)$$

$$\Rightarrow y(t) = x(t)$$

$$\Downarrow$$



Ejemplo 6:

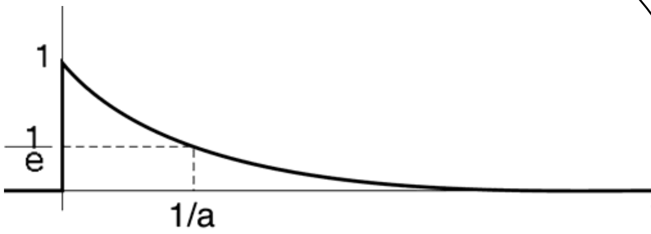
$$e^{-at^2} * e^{-bt^2} = \quad ? \quad \sqrt{\frac{\pi}{a+b}} \cdot e^{-(\frac{ab}{a+b})t^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\omega^2}{4a}} \times \sqrt{\frac{\pi}{b}}e^{-\frac{-\omega^2}{4b}} = \frac{\pi}{\sqrt{ab}}e^{-\frac{\omega^2}{4}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})}$$

Gaussiana × Gaussiana = Gaussiana ⇒ Gaussiana ∗ Gaussiana = Gaussiana

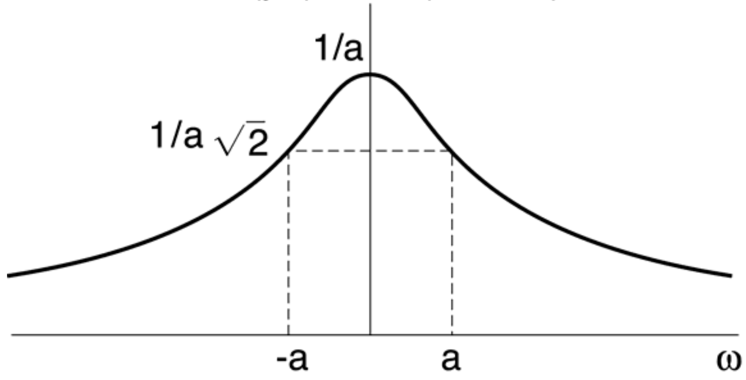
Ejemplo 2 de la clase anterior

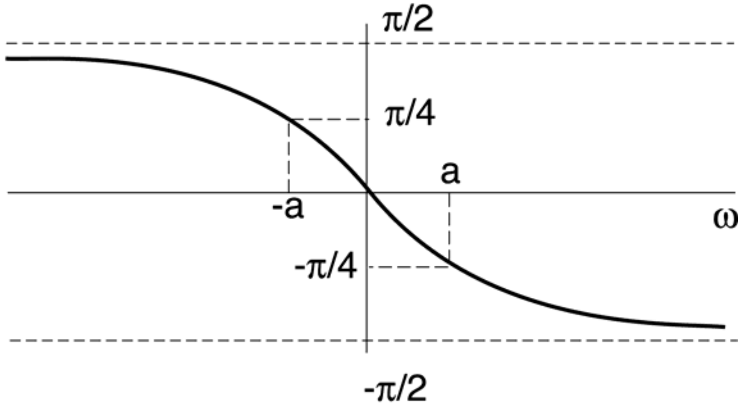


$$x(t) = e^{-at}u(t) \quad , \quad a > 0$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt = \int_0^{\infty} \underbrace{e^{-at}e^{-j\omega t}}_{e^{-(a+j\omega)}} dt$$

$$= -\left(\frac{1}{a+j\omega}\right) e^{-(a+j\omega)t}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{a+j\omega}$$





Ejemplo 7:

$$h(t) = e^{-t}u(t), \quad x(t) = e^{-2t}u(t)$$

$$y(t) = h(t) * x(t)$$

$$\Downarrow$$

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega) = \frac{1}{(1+j\omega)} \cdot \frac{1}{(2+j\omega)}$$

- a rational function of $j\omega$, ratio of polynomials of $j\omega$
(una función racional de ..., ratio de polinomios de ...)

$\Downarrow$ Partial fraction expansion
(Expansión de fracción parcial)

$$Y(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega} - \frac{1}{2+j\omega}$$

$\Downarrow$ inverse FT (TF inversa)

$$y(t) = [e^{-t} - e^{-2t}]u(t)$$

Ejemplo 8: sistemas LTI descritos por las ecuaciones diferenciales de coeficiente lineal constante

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

Si se utiliza la propiedad de diferenciación

$$\frac{d^k x(t)}{dt^k} \longleftrightarrow (j\omega)^k X(j\omega)$$

$\Downarrow$ Transform both sides of the equation
(Transforma ambos lados de la ecuación)

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \cdot (j\omega)^k Y(j\omega) = \sum_{k=0}^{M} b_k \cdot (j\omega)^k X(j\omega)$$

$$\Downarrow$$

$$Y(j\omega) = \underbrace{\left[\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k}\right]}_{H(j\omega)} X(j\omega)$$

1) Racional, puede utilizar PFE para obtener $h(t)$
2) Si $X(j\omega)$ es racional, *ej*. $x(t) = \sum c_l e^{-at} u(t)$ $Y(j\omega)$ también lo es.

Relación de Parseval

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt}_{\substack{\text{Total energy} \\ \text{in the time-domain}}} = \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega}_{\substack{\text{Total energy} \\ \text{in the frequency-domain}}}$$

(Energía total en el dominio del tiempo)

(Energía total en el dominio de la frecuencia)

$\frac{1}{2\pi}|X(j\omega)|^2$ - Spectral density (densidad espectral)

Propiedad de la multiplicación

La *TF* es sumamente simétrica,

$$x(t) \stackrel{\mathcal{F}^{-1}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega, \; X(j\omega) \stackrel{\mathcal{F}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

Ya sabemos que: $x(t) * y(t) \longleftrightarrow X(j\omega) \cdot Y(j\omega)$

Por lo que no es una sorpresa que:

$$x(t) \cdot y(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * Y(j\omega)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\theta)Y(j(\omega-\theta))d\theta$$

Convolución en ω

— Una consecuencia de la *Dualidad*

Ejemplos de la propiedad de multiplicación

$$r(t) = s(t) \cdot p(t) \quad \longleftrightarrow \quad R(j\omega) = \frac{1}{2\pi}[S(j\omega) * P(j\omega)]$$

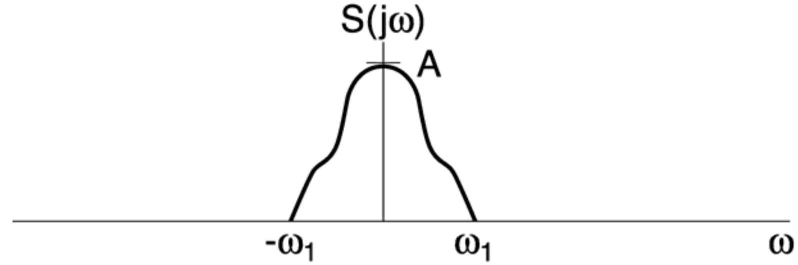
$$\text{For } p(t) = \cos \omega_0 t \quad \longleftrightarrow \quad P(j\omega) = \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)$$

$$\Downarrow$$

Para cualquier *s(t)*□..

$$R(j\omega) = \frac{1}{2}S(j(\omega - \omega_0)) + \frac{1}{2}S(j(\omega + \omega_0))$$

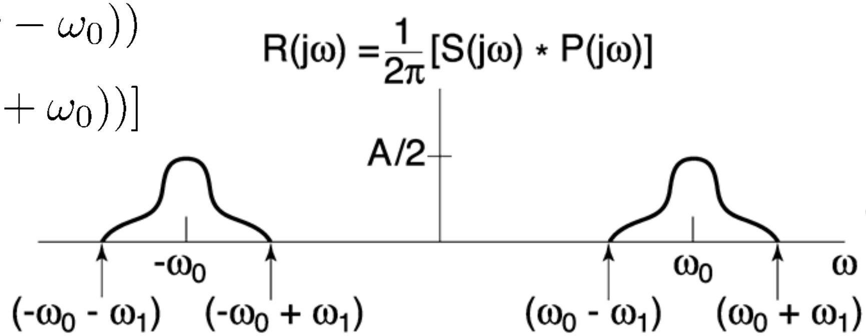
Ejemplo (continuación)



$r(t) = s(t) \cdot \cos(\omega_0 t)$

Amplitude modulation (Modulación de amplitud) (AM)

$$R(j\omega) \quad = \quad \frac{1}{2}[S(j(\omega - \omega_0)) + S(j(\omega + \omega_0))]$$



Drawn assuming:
(Trazar suponiendo que:)

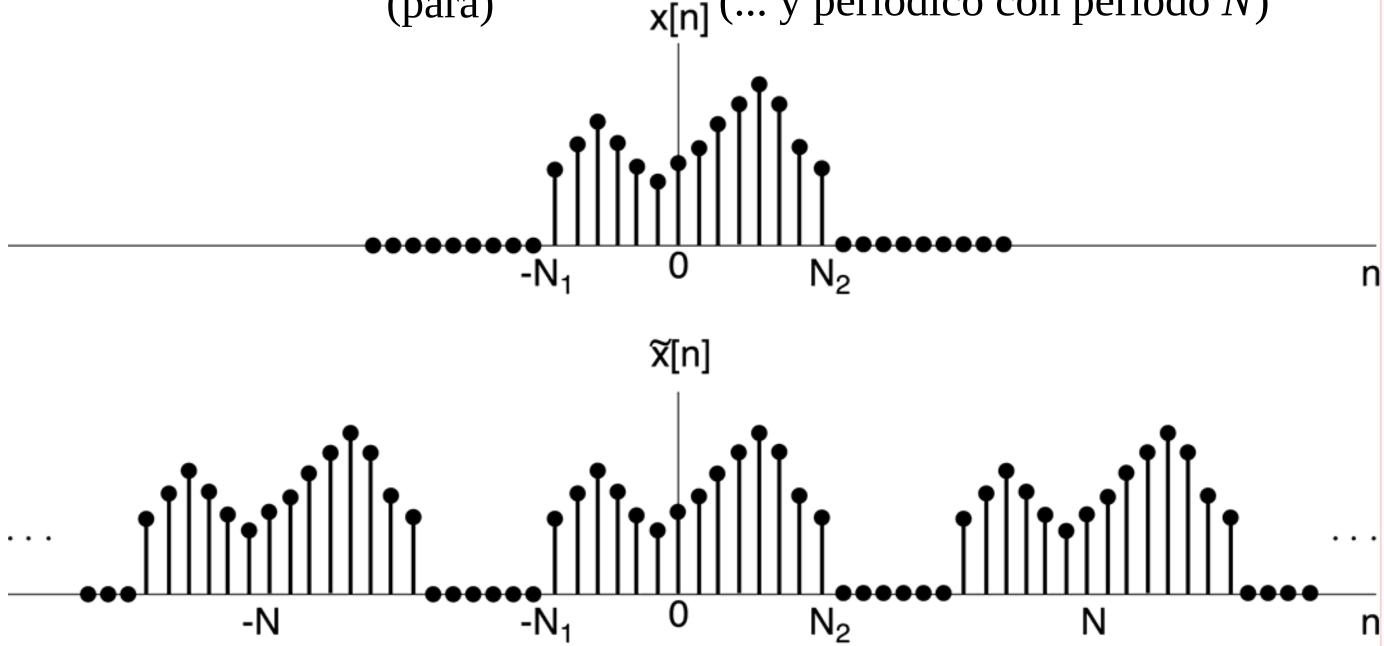
$$\omega_0 - \omega_1 > 0$$

$i.e.$ (es decir) $\omega_0 > \omega_1$

Transformada de Fourier en tiempo discreto

Derivation: (Analogous to CTFT except $e^{j\omega n} = e^{j(\omega+2\pi)n}$)
(Derivación: (análogo a la TF en tiempo continuo, excepto (...)))

- $x[n]$ - aperiodic and (for simplicity) of finite duration
  (aperiódico y (para simplificar) de duración finita)
- N is large enough so that $x[n] = 0$ if $|n| \geq N/2$
  (*N* es lo suficientemente grande para que (...) si (...))
- $\tilde{x}[n] = x[n]$ for $|n| \leq N/2$ and periodic with period N
  (para) (... y periódico con periodo *N*)



$$\tilde{x}[n] = x[n] \text{ for } \textit{any } n \text{ as } N \to \infty$$
(para cualquier *n* como *N*)

Derivación de la TF en tiempo discreto (continuación)

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\omega_0 n}, \; \omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

ecuación de síntesis de la TF en tiempo discreto

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} \tilde{x}[n] e^{-jk\omega_0 n}$$

ecuación de análisis de la TF en tiempo continuo

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_2} \tilde{x}[n] e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jk\omega_0 n}$$

Defina

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

$\boxed{\text{– periodic in } \omega \text{ with period } 2\pi}$

(periódico en ω con periodo 2π)

$$\Downarrow$$

$$a_k = \frac{1}{N} X(e^{jk\omega_0})$$

Derivación de la TF en tiempo discreto (*Home Stretch*)

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=<N>} \underbrace{\frac{1}{N} X(e^{jk\omega_0})}_{a_k} e^{jk\omega_0 n} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=<N>} X(e^{jk\omega_0}) e^{jk\omega_0 n} \omega_0 \quad (*)$$

As $N \to \infty$: $\qquad \tilde{x}[n] \to x[n]$ for every n
(Como *N*) (para todo *n*)

$$\omega_0 \to 0, \ \sum \omega_0 \to \int d\omega$$

The sum in $(*) \to$ an integral
(La suma en (*) ---> una integral)

$\Downarrow$ The DTFT Pair
(El par de TF en tiempo discreto)

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

Synthesis equation
(Ecuación de síntesis)

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

Analysis equation
(Ecuación de análisis)

Any 2π interval in ω
(Cualquier intervalo 2π en ω)