INSTITUTO TECNOLÓGICO DE MASSACHUSSETS
Departamento de Ingeniería Eléctrica e Informática

6.003: Señales y sistemas – Otoño 2003

Solución del boletín de problemas 3

Ejercicio de estudio en casa

(E1) O&W, problema 3.46, apartados (a) y (c)
$x(t)$ e $y(t)$ son señales periódicas de tiempo continuo con un periodo $= T_0$ y representaciones de las series de Fourier dadas por:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \qquad y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k e^{jk\omega_0 t}$$

(a) Demuestre que los coeficientes de la señal de las series de Fourier, $z(t) = x(t)y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$ vienen dados por la convolución discreta $c_k = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n b_{k-n}$ (propiedad de multiplicación).

$$\begin{aligned}
z(t) = x(t)y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{jn\omega_0 t} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} b_m e^{jm\omega_0 t} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_n b_m e^{jn\omega_0 t} e^{jm\omega_0 t} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_n b_m e^{j(n+m)\omega_0 t} \\
\text{Sea } k = n + m \rightarrow m = k - n \Rightarrow z(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_n b_{k-n} e^{jk\omega_0 t} \\
\text{Intercambiar el orden de las sumas} \Rightarrow z(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n b_{k-n} \right) e^{jk\omega_0 t}
\end{aligned}$$

$$\therefore z(t) = x(t)y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}, \text{ donde } c_k = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n b_{k-n}.$$

(c) Suponga que $y(t) = x^*(t)$. Exprese b_k en términos de a_k, y utilice el resultado del apartado (a) para demostrar la relación de Parseval para las señales periódicas.

$$y(t) = x^*(t) = \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \right)^* \quad = \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k^* e^{-jk\omega_0 t}$$

$$\text{Let } k = -k \Rightarrow y(t) \quad = \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{-k}^* e^{jk\omega_0 t}$$

$$\therefore b_k = a_{-k}^*$$

A continuación, para demostrar la relación de Parseval para las señales periódicas podemos utilizar los resultados anteriores de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} |x(t)|^2 &= x(t)x^*(t) = x(t)y(t) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}, \quad \text{donde } c_k = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n b_{k-n}, \quad \text{del apartado (a)} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n b_{k-n} e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n a_{n-k}^* e^{jk\omega_0 t}, \text{ como se demostró anteriormente.} \end{aligned}$$

A menudo se comete el error de utilizar la sustitución $b_{k-n} = a_{k+n}^*$ (es decir, simplemente negando el índice n), lo cual sería correcto si la relación fuese desplazada en frecuencia y *después* se tomase el conjugado, mientras que en el caso que nos ocupa se toma primero el conjugado y *después* se desplaza en frecuencia para llevar a cabo la convolución.

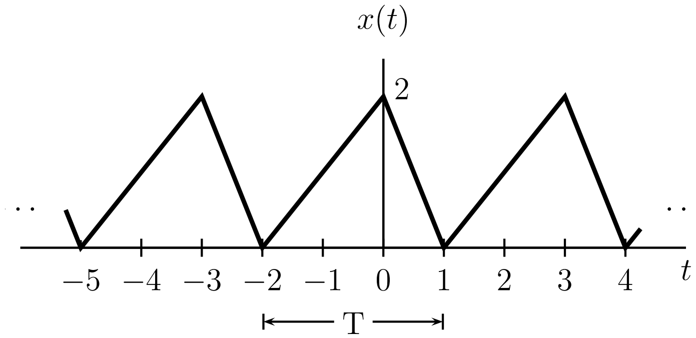
$$\begin{aligned} P_{ave} = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} |x(t)|^2 dt &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n a_{n-k}^* e^{jk\omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_n a_{n-k}^* \int_0^{T_0} e^{jk\omega_0 t} dt \end{aligned}$$

Observe que la integración sólo tiene un valor de T_0 cuando $k = 0$, y es cero para todos los otros valores de k, como se indica más adelante. Esta regla, conocida normalmente como ortogonalidad, se cumple para cualquier señal exponencial compleja integrada sobre un periodo.

$$\begin{aligned} \text{Para } \ k \neq 0 : \int_0^{T_0} e^{jk\omega_0 t} dt &= \frac{1}{jk\omega_0} e^{jk\omega_0 t} \bigg|_0^{T_0} = \frac{1}{jk\omega_0} (e^{jk\omega_0 T_0} - e^{j0}) \\ &= \frac{1}{jk\omega_0} (e^{jk(2\pi)} - e^{j0}) = 0 \\ \text{Para } \ k = 0 : \int_0^{T_0} e^{jk\omega_0 t} dt &= \int_0^{T_0} e^{j(0)\omega_0 t} dt = \int_0^{T_0} (1) dt = T_0. \end{aligned}$$

Por consiguiente, tenemos: $$P_{ave} = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n a_n^* T_0 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n|^2 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} |x(t)|^2 dt.$$

Problema 1 (O&W, 3.22 (a) - sólo la señal de la figura 3.22 (c)) Determine la representación de las series de Fourier para la señal $x(t)$.



$$x(t) = \begin{cases} 2+t, & \text{para } -2 \leq t \leq 0 \\ 2-2t, & \text{para } 0 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

$x(t)$ periódico con periodo $T = 3 \rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{3}$

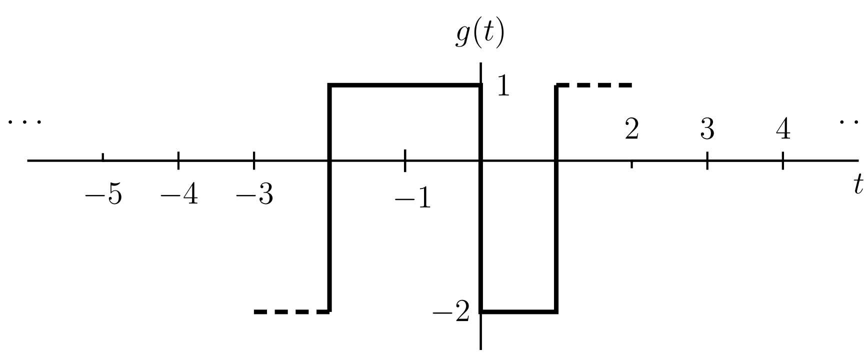
Uno de los objetivos de esta solución del problema es mostrar distintas formas de obtener la misma respuesta. Generalmente, para hallar los coeficientes de una señal de las series de Fourier mediante la ecuación de análisis se requiere el máximo esfuerzo, pero se puede volver a la misma si lo demás falla. A menudo, se puede descomponer una señal en señales más simples que resultan más fáciles de analizar, o se puede derivar a partir de una señal más simple mediante la integración, diferenciación, desplazamiento de tiempo, o cualquier combinación de las propiedades de las series de Fourier (véase la tabla 3.1, O&W, pág.206).

Comenzaremos hallando a_0, que generalmente es una operación directa y no requiere demasiado esfuerzo, y, a continuación, exploraremos los distintos métodos para hallar $a_{k\neq 0}$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_T x(t)dt = \frac{1}{3} \quad \text{(el área total bajo la curva para un periodo)} = \frac{1}{3}(2+1) = 1.$$

A continuación, se indican los cuatro métodos posibles para calcular $a_{k\neq 0}$, los coeficientes de las series de Fourier de $x(t)$ para $k \neq 0$:

- Método (a): utilizar la propiedad de integración:
  Sea $g(t) = \frac{dx(t)}{dt} \rightarrow x(t) = \int g(t)dt + p$, donde p es el valor de $x(t)$ al comienzo del periodo y es igual a cero para el periodo seleccionado que comienza en $t = -2$. Observe que, puesto que tratamos de hallar $a_{k\neq 0}$, el valor de p no es importante, ya que sólo afecta al nivel de DC de $x(t)$ y ya lo hemos calculado hallando a_0.



Observe que $g(t)$ debe tener un nivel de DC cero, de lo contrario se incluirá una señal en rampa en $x(t)$, haciendo que éste sea no periódico y que no esté limitado. Por definición, $g(t)$ debería tener un nivel de DC cero ya que la operación derivativa lo elimina, por lo que se puede utilizar ésto como doble comprobación.

Una vez hallados b_k, coeficientes de las series de Fourier para $g(t)$, podemos utilizar las propiedades de las series de Fourier para hallar a_k, los coeficientes de las series de Fourier para $x(t)$

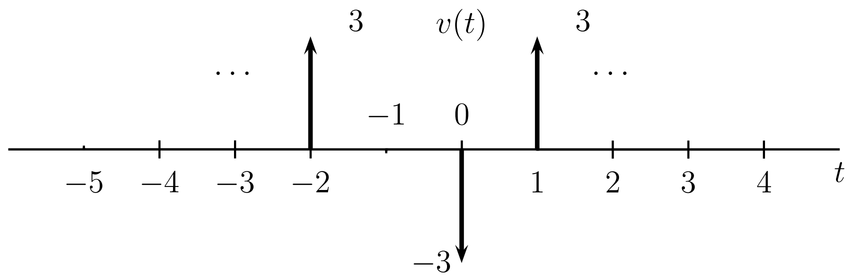
$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{1}{T}\int_T g(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{3}\left(\int_{-2}^{0}(1)e^{-jk\omega_0 t}dt + \int_0^1(-2)e^{-jk\omega_0 t}dt\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{-jk\omega_0}e^{-jk\omega_0 t}\Big|_{-2}^{0} - 2\,\frac{1}{-jk\omega_0}e^{-jk\omega_0 t}\Big|_{0}^{1}\right) = \frac{-1}{3jk\omega_0}\left(1 - e^{jk\omega_0 2} - 2e^{-jk\omega_0} + 2\right) \\
&= \frac{1}{3jk\omega_0}\left(e^{jk\omega_0 2} + 2e^{-jk\omega_0} - 3\right). \\
a_k &= \frac{1}{jk\omega_0}b_k \quad \text{(de la propiedad de integración, tabla 3.1, O \&W, pág.206)} \\
&= \frac{1}{jk\omega_0}\,\frac{1}{3jk\omega_0}\left(e^{jk\omega_0 2} + 2e^{-jk\omega_0} - 3\right) = \frac{1}{3k^2\omega_0^2}\left(3 - 2e^{-jk\omega_0} - e^{jk\omega_0 2}\right) \\
&= \frac{1}{k^2\omega_0^2}\left(1 - e^{jk\omega_0 2}\right) \qquad \text{(recuerde que } e^{-jk\omega_0} = e^{jk\omega_0 2} \text{ para } T = 3) \\
&= \frac{1}{k^2\omega_0^2}\left(1 - e^{jk\frac{4\pi}{3}}\right) = \frac{1}{k^2\omega_0^2}\left(1 - e^{-jk\frac{2\pi}{3}}\right).
\end{aligned}$$

- Método (b): utilizar la propiedad de integración dos veces:
  Definamos $v(t)$ de la forma siguiente:

$$v(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{dg(t)}{dt} \Rightarrow x(t) = \int\int v(t)\,dt\,dt + p = \int g(t)\,dt + p$$

Al igual que la discusión del método (a) del nivel de DC de $g(t)$, $v(t)$ debe tener un nivel cero de DC. Además, su integración limitada sobre un periodo debe de tener también un nivel cero de DC.

Podemos hallar $v(t)$ diferenciando $g(t)$. Sin embargo, en nuestro caso, aunque no siempre, podemos hallar $v(t)$ directamente a partir de $x(t)$ en un paso, colocando un impulso en cada punto de tiempo donde la pendiente de $x(t)$ cambia bruscamente. El valor de ese impulso (es decir, de su área) es el cambio en la pendiente de $x(t)$ en ese punto.



Para hallar c_k, los coeficientes de las series de Fourier de $v(t)$, tomemos el periodo entre -1 y 2, que contiene dos impulsos.
Observe que podemos tomar también el periodo entre -2 y 1, pero debemos tener la precaución de no incluir los impulsos en los dos, en -2 y en 1. En otras palabras, podemos tomar el periodo entre $-2+\delta$ y $1+\delta$ o el periodo entre $-2-\delta$ y $1-\delta$.

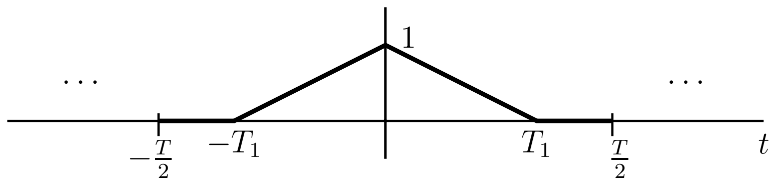
$$\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{T}\int_T v(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{3}\left(\int_{-1}^{2}\left[-3\delta(t)+3\delta(t-1)\right]e^{-jk\omega_0 t}dt\right) \\
&= \int_{-1}^{2}\left[-\delta(t)+\delta(t-1)\right]e^{-jk\omega_0 t}dt \\
&= -e^{-jk\omega_0(0)} + e^{-jk\omega_0(1)} = e^{-jk\omega_0} - 1.
\end{aligned}$$

Ahora, para hallar a_k, simplemente tenemos que utilizar la propiedad de integración dos veces:

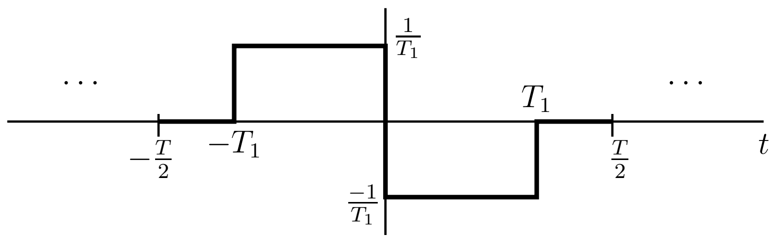
$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{jk\omega_0}\frac{1}{jk\omega_0}c_k \quad \text{(de la propiedad de integración, tabla 3.1, O \&W, pág.206)} \\
&= \frac{1}{(jk\omega_0)^2}\left(e^{-jk\omega_0}-1\right) \\
&= \frac{1}{k^2\omega_0^2}\left(1-e^{-jk\omega_0}\right) \\
&= \frac{1}{k^2\omega_0^2}\left(1-e^{-jk\frac{2\pi}{3}}\right), \text{ que es la misma respuesta del método (a).}
\end{aligned}$$

Antes de explorar los demás métodos, hallemos primero las series de Fourier para $y(t)$, indicadas más adelante, que es una función triangular periódica con un periodo de T. $y(t)$ será útil para el método (c):

$y(t)$



$z(t) = \frac{dy(t)}{dt}$



Sea $z(t) = \frac{dy(t)}{dt}$, $z(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} e_k$, e $y(t) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} d_k = \left(\frac{1}{jk\omega_0}\right) e_k$

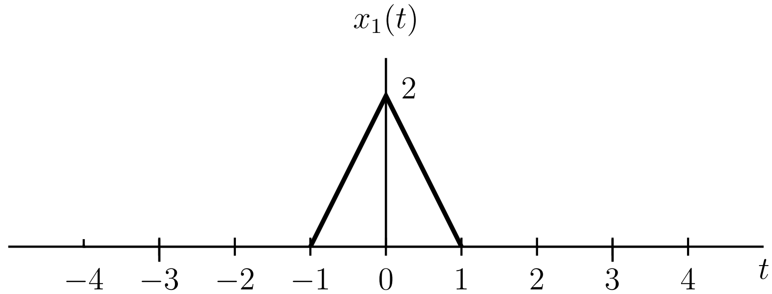
Hallaremos las series de Fourier para $z(t)$ y a partir de éstas, hallaremos las series de Fourier para $y(t)$, tal como se indica a continuación:

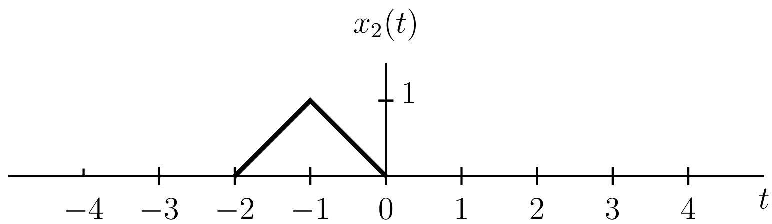
$$
\begin{aligned}
e_k &= \frac{1}{T}\int_T z(t)\, e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T}\left[\int_{-T_1}^{0} (\frac{1}{T_1}) e^{-jk\omega_0 t} dt + \int_0^{T_1} (\frac{-1}{T_1}) e^{-jk\omega_0 t} dt\right] \\
&= \frac{1}{TT_1}\frac{1}{(-jk\omega_0)}\left(e^{-jk\omega_0 t}|_{-T_1}^{0} - e^{-jk\omega_0 t}|_0^{T_1}\right) = \frac{1}{TT_1}\frac{1}{(-jk\omega_0)}\left(1 - e^{jk\omega_0 T_1} + 1 - e^{-jk\omega_0 T_1}\right) \\
&= \frac{-1}{TT_1 jk\omega_0}\left[2 - (e^{jk\omega_0 T_1} + e^{-jk\omega_0 T_1})\right] = \frac{-1}{TT_1 jk\omega_0}\left[2 - 2\cos\left(jk\omega_0 T_1\right)\right].
\end{aligned}
$$

De este modo,

$$
d_k = e_k(\frac{1}{jk\omega_0}) = \frac{2 - 2\cos\left(k\omega_0 T_1\right)}{TT_1 k^2 \omega_0^2}.
$$

- Método (c): diseccionar la señal en componentes más sencillos:
  En este caso, diseccionaremos $x(t)$ en $x_1(t)$ y $x_2(t)$ de los que conocemos las series de Foruier correspondientes (utilizando el resultado anterior de d_k y la propiedad de desplazamiento de tiempo).





$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$, y sea $x_1(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} b_k$ y $x_2(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} c_k$

$$\begin{aligned}
\therefore a_k &= b_k + c_k = (2)\,\frac{2 - 2\cos\left(k\omega_0(1)\right)}{(3)(1)k^2\omega_0^2} + (1)\frac{2 - 2\cos\left(k\omega_0(1)\right)}{(3)(1)k^2\omega_0^2}\,e^{-jk\omega_0(-1)} \\
&= \frac{2 - 2\cos k\omega_0}{3k^2\omega_0^2}(2 + e^{jk\omega_0}).
\end{aligned}$$

Aunque el resultado parece distinto de los hallados en los métodos anteriores, una simplificación más detenida nos muestra que las series son idénticas:

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{2 - 2\cos k\omega_0}{3k^2\omega_0^2}(2 + e^{jk\omega_0}) = \frac{1}{3k^2\omega_0^2}(2 - 2\cos k\omega_0)(2 + e^{jk\omega_0}) \\
&= \frac{1}{3k^2\omega_0^2}(2 - e^{jk\omega_0} - e^{-jk\omega_0})(2 + e^{jk\omega_0}) \\
&= \frac{1}{3k^2\omega_0^2}\left(4 + 2e^{jk\omega_0} - 2e^{jk\omega_0} - e^{jk\omega_0 2} - 2e^{-jk\omega_0} - e^0\right) \\
&= \frac{1}{3k^2\omega_0^2}\left(4 - e^{jk\omega_0 2} - 2e^{-jk\omega_0} - 1\right) = \frac{1}{3k^2\omega_0^2}\left(3 - e^{jk\omega_0 2} - 2e^{-jk\omega_0}\right) \\
&= \frac{1}{k^2\omega_0^2}\left(1 - e^{jk\omega_0 2}\right) \qquad \text{(recuerde que } e^{-jk\omega_0} = e^{jk\omega_0 2} \text{ para } T = 3) \\
&= \frac{1}{k^2\omega_0^2}\left(1 - e^{jk\frac{4\pi}{3}}\right), \text{ que es la misma respuesta de los métodos anteriores.}
\end{aligned}$$

- Método (d): utilizar la ecuación de análisis:
  Durante el proceso de evaluación de la ecuación de análisis, nos ahorraremos muchos pasos de derivación con la siguiente integral:

$$\int te^{at}dt = \left(\frac{t}{a} - \frac{1}{a^2}\right)e^{\,at}, \text{ para cualquier } a \neq 0$$

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{3}\int_{-2}^{1} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt \\
&= \frac{1}{3}\left[\int_{-2}^{0}(2+t)e^{-jk\omega_0 t}dt + \int_{0}^{1}(2-2t)e^{-jk\omega_0 t}dt\right] \\
&= \frac{1}{3}\left[2\int_{-2}^{1} e^{-jk\omega_0 t}dt + \int_{-2}^{0} te^{-jk\omega_0 t}dt - 2\int_{0}^{1} te^{-jk\omega_0 t}dr\right] \\
&= \frac{1}{3}\left[2\left.\frac{e^{-jk\omega_0 t}}{-jk\omega_0}\right|_{-2}^{1} + \left(\frac{1}{k^2\omega_0^2} - \frac{t}{jk\omega_0}\right)e^{-jk\omega_0 t}\Bigg|_{-2}^{0} - 2\left(\frac{1}{k^2\omega_0^2} - \frac{t}{jk\omega_0}\right)e^{-jk\omega_0 t}\Bigg|_{0}^{1}\right] \\
&= \frac{1}{3}\left\{\frac{-2}{jk\omega_0}\left(e^{-jk\omega_0(1)} - e^{-jk\omega_0(-2)}\right) + \frac{1}{k^2\omega_0^2} - \left(\frac{1}{k^2\omega_0^2} - \frac{(-2)}{jk\omega_0}\right)e^{-jk\omega_0(-2)}\right. \\
&\quad \left. -2\left[\left(\frac{1}{k^2\omega_0^2} - \frac{(1)}{jk\omega_0}\right)e^{-jk\omega_0(1)} - \frac{1}{k^2\omega_0^2}\right]\right\} \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{-2}{jk\omega_0}e^{-jk\omega_0} + \frac{2}{jk\omega_0}e^{jk\omega_0 2} + \frac{1}{k^2\omega_0^2} - \frac{1}{k^2\omega_0^2}e^{jk\omega_0 2} - \frac{2}{jk\omega_0}e^{jk\omega_0 2}\right. \\
&\quad \left. -\frac{2}{k^2\omega_0^2}e^{-jk\omega_0} + \frac{2}{jk\omega_0}e^{-jk\omega_0} + \frac{2}{k^2\omega_0^2}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{-2}{jk\omega_0}e^{-jk\omega_0} - \frac{2}{k^2\omega_0^2}e^{-jk\omega_0} + \frac{2}{jk\omega_0}e^{-jk\omega_0} + \frac{1}{k^2\omega_0^2} + \frac{2}{k^2\omega_0^2}\right. \\
&\quad \left. +\frac{2}{jk\omega_0}e^{jk\omega_0 2} - \frac{1}{k^2\omega_0^2}e^{jk\omega_0 2} - \frac{2}{jk\omega_0}e^{jk\omega_0 2}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{k^2\omega_0^2}e^{-jk\omega_0} + \frac{3}{k^2\omega_0^2} - \frac{1}{k^2\omega_0^2}e^{jk\omega_0 2}\right) \\
&= \frac{1}{3k^2\omega_0^2}\left(3 - 2e^{-jk\omega_0} - e^{jk\omega_0 2}\right) \\
&= \frac{1}{k^2\omega_0^2}\left(1 - e^{jk\omega_0 2}\right) \qquad \text{(recuerde que } e^{-jk\omega_0} = e^{jk\omega_0 2} \text{ para } T = 3) \\
&= \frac{1}{k^2\omega_0^2}\left(1 - e^{jk\frac{4\pi}{3}}\right), \text{ que es la misma respuesta de métodos anteriores.} \\
&= \frac{9}{4k^2\pi^2}\left(1 - e^{jk\frac{4\pi}{3}}\right).
\end{aligned}$$

Problema 2 O&W, 3.23 (a)
Dado a_k , los coeficientes de las series de Fourier de una señal periódica de tiempo continuo con periodo 4, determine la señal $x(t)$.
A continuación, se indican los coeficientes de las series de a_k:

$$a_k = \begin{cases} 0, & k = 0 \\ (j)^k \dfrac{\sin k\pi/4}{k\pi}, & \text{de lo contrario.} \end{cases}$$

Estas son algunas de las cuestiones que conocemos de $x(t)$:

- $a_0 = 0 \rightarrow$ no hay componente DC en $x(t)$
- $T = 4 \rightarrow \omega_0 = 2\pi/4 = \pi/2$
- $$\begin{aligned} a_{-k} &= (j)^{-k} \frac{\sin(-k\pi/4)}{-k\pi} = \left(\frac{1}{j}\right)^k \frac{-\sin(k\pi/4)}{-k\pi} \\ &= (-j)^k \frac{\sin(k\pi/4)}{k\pi} = a_k^*. \end{aligned}$$
  De este modo, $x(t)$ es una señal real (O&W, sección 3.5.6, pág.204).

Observando que $j = e^{j\pi/2} \rightarrow (j)^k = \left(e^{j\pi/2}\right)^k = e^{jk\pi/2} = e^{jk\omega_0} = e^{-jk\omega_0(-1)}$, podemos considerar que $x(t)$ es una versión desplazada en el tiempo de otra señal $y(t)$ tal que:

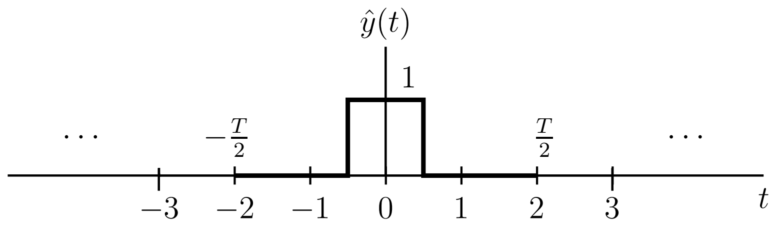
$$x(t) = y(t+1), \text{donde } y(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} b_0 = 0, b_{k\neq 0} = \frac{\sin k\pi/4}{k\pi} \text{ y } a_k = b_k e^{jk\omega_0(1)}$$

Retrocediendo a la ecuación de derivación de b_k, podemos hallar la señal $\hat{y}(t)$, que tiene el mismo b_k pero que puede tener un nivel de DC distinto (es decir, b_0) :

$$\begin{aligned} \hat{b}_{k\neq 0} = b_{k\neq 0} &= \frac{\sin k\pi/4}{k\pi} = \frac{1}{k\pi}\left(\frac{e^{jk\pi/4} - e^{-jk\pi/4}}{2j}\right) \\ &= \frac{1}{(4)} \frac{1}{jk(\frac{\pi}{2})} \left(e^{jk\pi/4} - e^{-jk\pi/4}\right) \\ &= \frac{1}{T}\frac{1}{jk\omega_0}\left(e^{jk\omega_0(\frac{1}{2})} - e^{jk\omega_0(-\frac{1}{2})}\right) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (1) e^{jk\omega_0 t} dt. \end{aligned}$$

La integración anterior sugiere que:

$$\hat{y}(t) = \begin{cases} 1, & -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2} \\ 0, & \text{en otro sitio en el mismo periodo T=4.} \end{cases}$$



Observe que se puede llegar a la misma conclusión fijándonos en que $\hat{y}(t)$ es la misma señal que en el ejemplo 3.5 (O& W, pág.193) con $T_1 = \frac{1}{2}$ y $T = 4$.

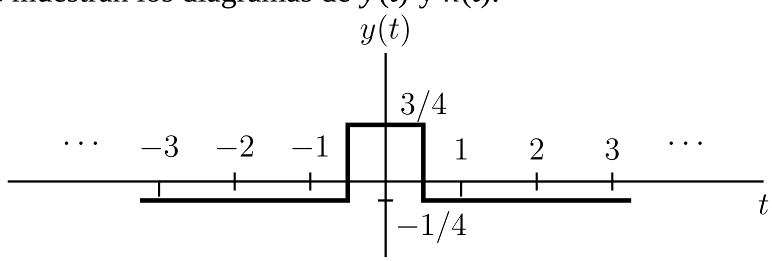
Para hallar $y(t)$, que tiene $b_0 = 0$, calculamos primero $\hat{b}_0$ y después lo restamos de $\hat{y}(t)$:

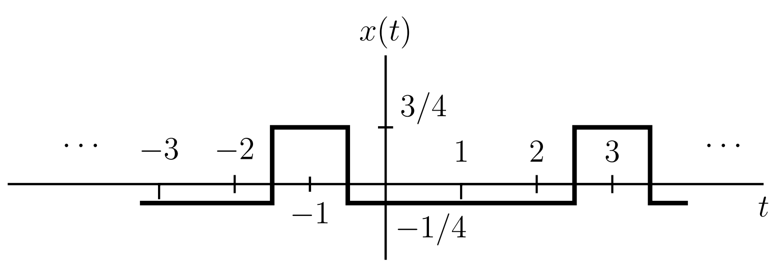
$$\hat{b}_0 = \frac{1}{T}\int_T \hat{y}(t)dt = \frac{1}{4}\int_{-1/2}^{1/2}(1)dt = \frac{1}{4}$$

$$\rightarrow y(t) = \hat{y}(t) - \frac{1}{4} \Rightarrow y(t) = \begin{cases} \frac{3}{4}, & -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4}, & \frac{1}{2} < |t| < 2. \end{cases}$$

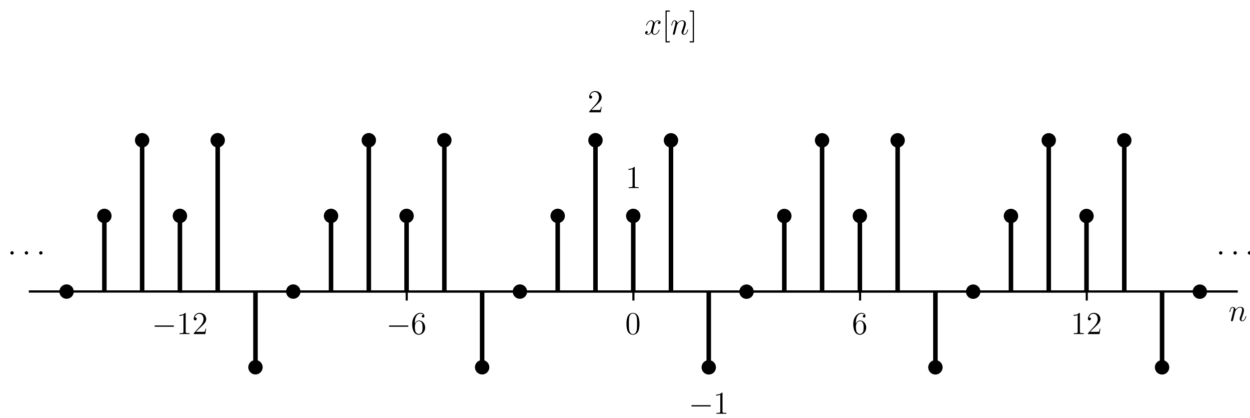
$$\rightarrow x(t) = y(t+1) = \begin{cases} \frac{3}{4}, & -1.5 < t < -0.5 \\ -\frac{1}{4}, & -0.5 < t < 2.5 \end{cases}$$

A continuación, se muestran los diagramas de $y(t)$ y $x(t)$:





Problema 3 Determine los coeficientes de las series de Fourier para la señal periódica $x[n]$ que se muestra a continuación. Trace la magnitud y la fase de estos coeficientes.



Periodo fundamental $N = 6 \rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$.

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n] e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{5} x[n] e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{6} \sum_{n=-3}^{2} x[n] e^{-jk\omega_0 n}$$

Observe que las dos últimas expresiones darán el mismo resultado, pero que la última se aprovechará de la simetría de algunas de las muestras para integrarlas en sinusoides.

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{6}\left[(0)e^{-jk\omega_0(-3)} + (1)e^{-jk\omega_0(-2)} + (2)e^{-jk\omega_0(-1)} + (1)e^{-jk\omega_0(0)} + \right. \\
&\qquad \left. + (2)e^{-jk\omega_0(1)} + (-1)e^{-jk\omega_0(2)}\right] \\
&= \frac{1}{6}\left[e^{-jk\omega_0(-2)} - e^{-jk\omega_0(2)} + 2e^{-jk\omega_0(-1)} + 2e^{-jk\omega_0(1)} + 1\right] \\
&= \frac{1}{6}\left[(2j)\sin k\omega_0 2 + 2(2)\cos k\omega_0 + 1\right] \\
&= \frac{1}{6} + \frac{2}{3}\cos k\omega_0 + \frac{j}{3}\sin k\omega_0 2 \\
\therefore a_k &= \frac{1}{6} + \frac{2}{3}\cos\left(k\frac{\pi}{3}\right) + j\frac{1}{3}\sin\left(k\frac{2\pi}{3}\right) \\
&= \frac{1}{6}\left[1 + 4\cos\left(k\frac{\pi}{3}\right) + j2\sin\left(k\frac{2\pi}{3}\right)\right]
\end{aligned}$$

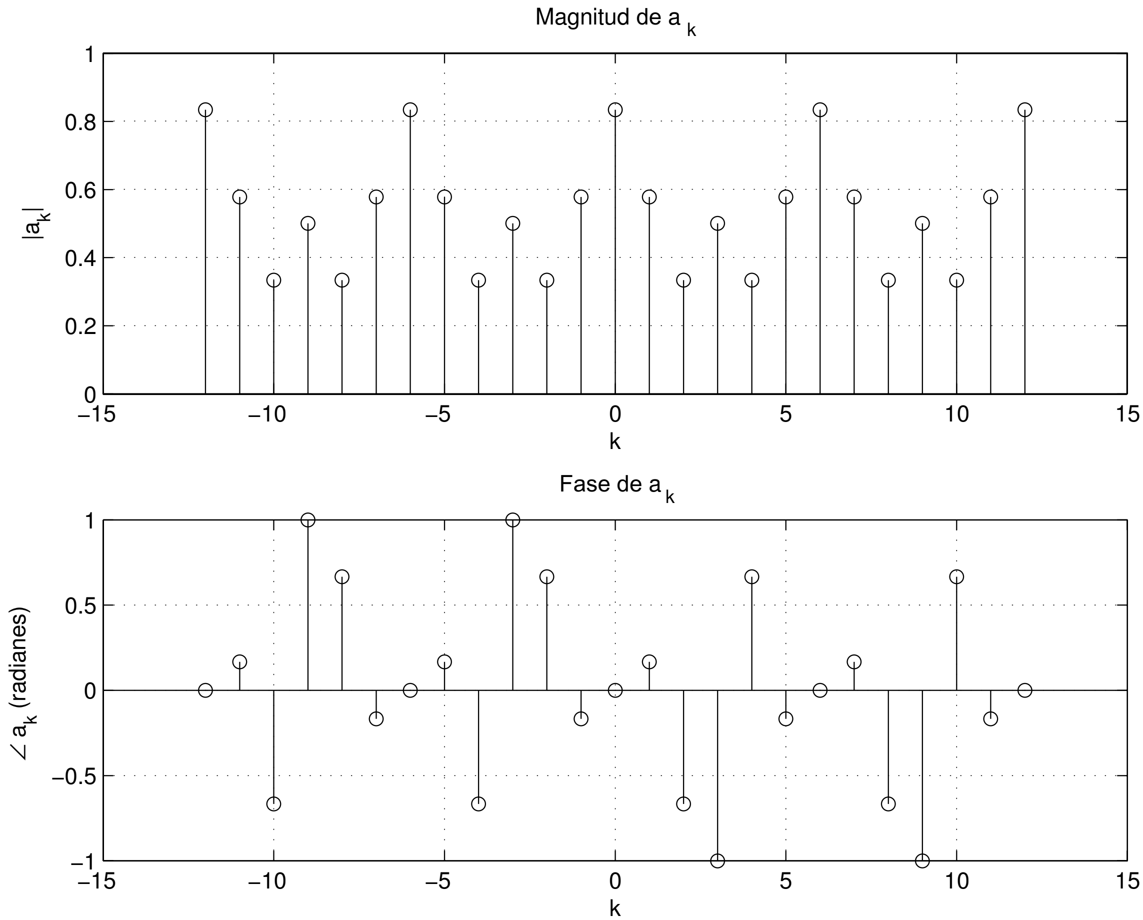
Estos son los valores de a_k para un periodo de seis puntos consecutivos (de k=-2 a k=3):

$$\begin{aligned}
a_{-2} &= \frac{1}{6}\left[1+4\cos\left((-2)\frac{\pi}{3}\right)+2j\sin\left((-2)\frac{2\pi}{3}\right)\right] \\
&= \frac{1}{6}\left[1+4\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)-2j\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right] = \frac{1}{6}\left[1+4\left(\frac{-1}{2}\right)-2j\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{6}(-1+j\sqrt{3}) = -0.1667+j0.2887 \\
&= \frac{\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}}{6}\,e^{j\ \mathrm{atan}(\sqrt{3},-1)} = \frac{1}{3}e^{j\frac{2\pi}{3}} \rightarrow |a_{-2}| = \frac{1}{3}, \angle a_{-2} = \frac{2\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Lo mismo para la magnitud y la fase de a_k para $k=-1 \rightarrow 3$ que se resume en la siguiente tabla:

k	a_k	$\lvert a_k \rvert$	$\angle a_k$
-2	-0.1667 + j 0.2887	$1/3$	$2\pi/3$
-1	0.5000 - j 0.2887	$1/\sqrt{3}$	$-\pi/6$
0	0.8333	$5/6$	0
1	0.5000 + j 0.2887	$1/\sqrt{3}$	$\pi/6$
2	-0.1667 -j 0.2887	$1/3$	$-2\pi/3$
3	-0.5000	$3/2$	$-\pi$

A continuación, se indican la magnitud y la fase de los coeficientes de las series de Fourier con la ayuda de MATLAB:



Como referencia, a continuación se muestra el código de MATLAB utilizado para calcular y trazar la magnitud y la fase de los coeficientes de las series de Fourier:

```
MATLAB Code:
A=inline ('1/6 +2/3*cos(k*pi/3)+j/3*sin(k*2*pi/3)');
k=-12:12;a=A(k);am=abs(a);ap=angle (a); subplot(2,1,1);stem (k,am);grid
on;xlabel('k');ylabel('|a_k|');title('Magnitude of a_k');
subplot(2,1,2);stem(k,ap/pi);grid on; xlabel('k');ylabel('\angle a_k
(radians)');title('Phase of a_k');
```

Sugerencia de MATLAB: puede utilizar las expresiones TEX en el texto de las figuras.

Problema 4 O&W, 3.29 (a)

Dado a_k, los coeficientes de las series de Fourier de una señal periódica de tiempo discreto con periodo 8, determine la señal $x[n]$.

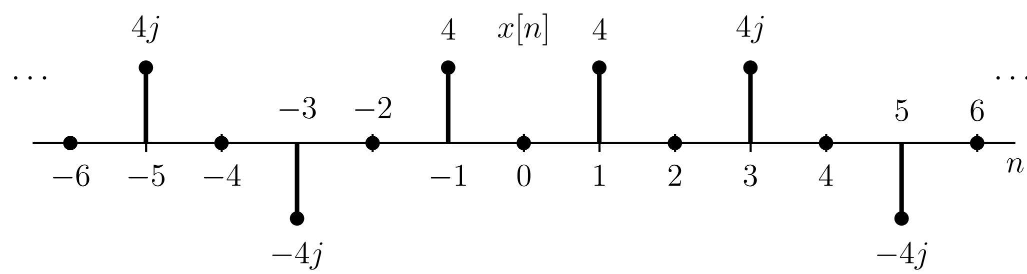
Los coeficientes de Fourier se proporcionan de la siguiente forma:

$$a_k = \cos\frac{k\pi}{4} + \sin\frac{3k\pi}{4}.$$

N=8 $\rightarrow$ sólo hay 8 muestras para calcular en $x[n]$, algunas de las cuales pueden tener un valor cero, $\omega_0 = 2\pi/8 = \pi/4$.

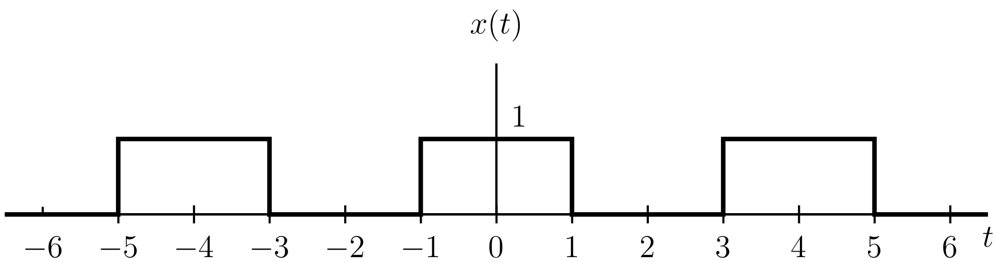
$$\begin{aligned}
a_k &= \cos\frac{k\pi}{4} + \sin\frac{3k\pi}{4} = \cos k\omega_0 + \sin 3k\omega_0 \\
&= \frac{1}{2}\, e^{jk\omega_0} + \frac{1}{2}\, e^{-jk\omega_0} + \frac{1}{2j}\, e^{j3k\omega_0} - \frac{1}{2j}\, e^{-j3k} \\
&= \frac{1}{8}\left[4\, e^{-jk\omega_0(-1)} + 4\, e^{-jk\omega_0(1)} + \frac{4}{j}\, e^{-jk(-3)\omega_0} - \frac{4}{j}\, e^{-jk(3)}\right] \\
&= \frac{1}{8}\left[(4)\, e^{-jk\omega_0(-1)} + (4)\, e^{-jk\omega_0(1)} + (-4j)\, e^{-jk(-3)\omega_0} + (4j)\, e^{-jk(3)}\right] \\
&= \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n]e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{8}\sum_{n=-3}^{4} x[n]e^{-jk\omega_0 n}
\end{aligned}$$

Agrupando las expresiones de $a_k \rightarrow x[n] = \begin{cases} -4j, & n=-3 \\ 4j, & n=3 \\ 4, & n=\pm 1 \\ 0, & n = 0, \pm 2, 4 \end{cases}$



Problema 5 Considere las siguientes señales periódicas de tiempo continuo, $x(t)$, $y(t)$, y $z(t)$.

(a) Determine la propiedad fundamental, el periodo y los coeficientes de las series de Fourier, a_k, para $x(t)$.

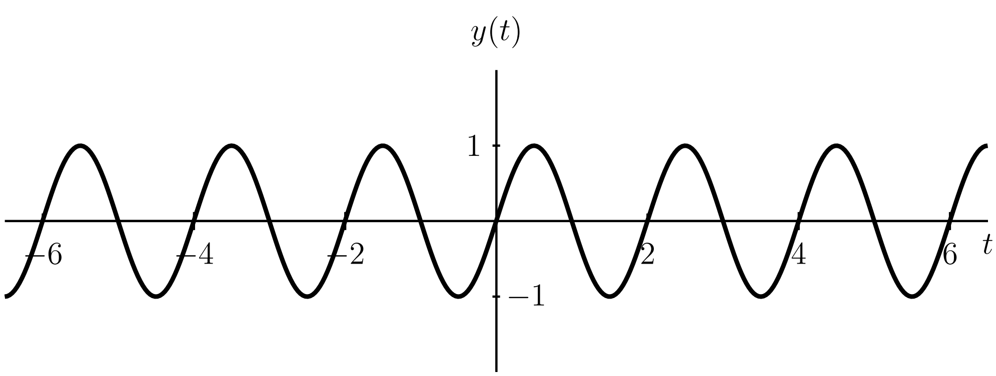


Periodo fundamental de $x(t) = T = 4 \longrightarrow \omega_0 = 2\pi/4 = \pi/2$.

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{T}\int_T x(t)\,dt = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} x(t)\,dt = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}. \\
a_k &= \frac{1}{T}\int_T x(t)\,e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}(1)\,e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{-jk\omega_0 4}\,e^{-jk\omega_0 t}\Big|_{-1}^{1} \\
&= \frac{1}{jk2\pi}\left(e^{jk\omega_0} - e^{-jk\omega_0}\right) = \frac{\sin(k\omega_0)}{k\pi} = \frac{\sin(k\frac{\pi}{2})}{k\pi}.
\end{aligned}
$$

Se puede hallar el mismo resultado utilizando directamente el ejemplo 3.5 (O&W, pág.193).

(b) Determine la frecuencia fundamental, el periodo y los coeficientes de las series de Fourier b_k, para $y(t)$.



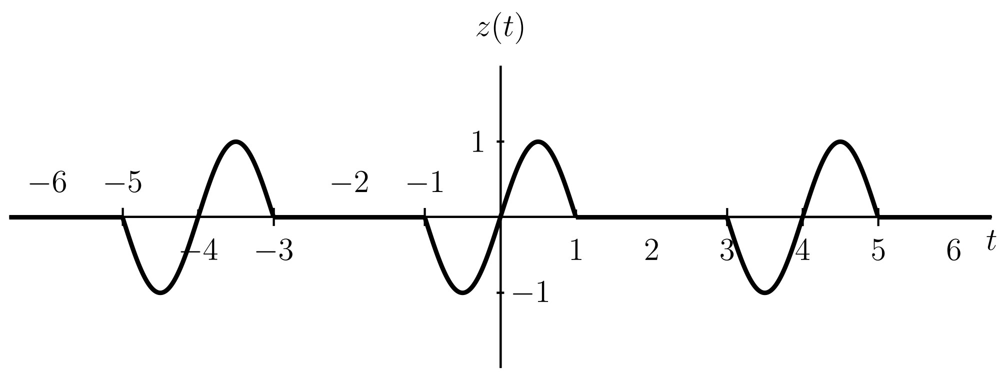
Periodo fundamental de $y(t) = \hat{T} = 2 \longrightarrow \hat{\omega}_0 = 2\pi/2 = \pi$.

$$
b_0 = \frac{1}{T}\int_T y(t)dt = 0 \quad (\because y(t) \text{ no tiene componente DC}).
$$

$$y(t) = \sin \hat{\omega}_0 t = \frac{e^{j\hat{\omega}_0 t} - e^{-j\hat{\omega}_0 t}}{2j} = \frac{-j}{2}\, e^{j(1)\hat{\omega}_0 t} - \frac{-j}{2}\, e^{j(-1)\hat{\omega}_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k e^{jk\hat{\omega}_0 t}$$

$$\rightarrow b_k = \begin{cases} \frac{-j}{2}, & k = 1 \\ \frac{j}{2}, & k = -1 \\ 0, & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

(c) Determine la frecuencia fundamental y el periodo para $z(t)$. Además, utilice los resultados de los apartados (a) y (b) para determinar los coeficientes de las series de Fourier, c_k para $z(t)$.



Periodo fundamental de $z(t)$=Periodo fundamental de $x(t) = T = 4 \rightarrow \omega_0 = 2\pi/4 = \frac{\pi}{2}$.

$$c_0 = \frac{1}{T}\int_T z(t)dt = 0 \quad (\because z(t) \text{ no tiene componente DC}).$$

Si observamos que $z(t) = x(t)y(t)$, podemos hallar c_k utilizando la propiedad de multiplicación. Sin embargo, las frecuencias fundamentales de $x(t)$ e $y(t)$ deben ser idénticas en orden para que los coeficientes de Fourier coincidan (es decir, para representar las mismas frecuencias). El periodo fundamental de $y(t)$ es 2, pero si determinamos que sea 4, sólo necesitamos realizar a escala los componentes de frecuencia acorde para mantener el valor de $k\omega_0$ constante. En nuestro caso, para $y(t)$: $\omega_0 = \frac{\pi}{2} = \hat{\omega}_0/2$

$$b'_k = \begin{cases} \frac{-j}{2}, & k = 2 \\ \frac{j}{2}, & k = -2 \\ 0, & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

Utilización de la propiedad de la multiplicación:

$$c_k = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n b'_{k-n},$$ que se parece, en la frecuencia, a la convolución en tiempo discreto.

Observe que $a_n b'_{k-n} \neq 0$ sólo cuando $k - n = \pm 2$

$$\rightarrow c_k = a_{k-2} b'_2 + a_{k+2} b'_{-2} = a_{k-2} \frac{-j}{2} + a_{k+2} \frac{j}{2} = \frac{j}{2}(a_{k+2} - a_{k-2})$$

$$a_{k+2} = \begin{cases} \frac{\sin(k+2)\frac{\pi}{2}}{(k+2)\pi}, & k \neq -2 \\ \frac{1}{2}, & k = -2 \end{cases} = \begin{cases} \frac{-\sin(k\frac{\pi}{2})}{(k+2)\pi}, & k \neq -2 \\ \frac{1}{2}, & k = -2 \end{cases}$$

$$a_{k-2} = \begin{cases} \frac{\sin(k-2)\frac{\pi}{2}}{(k-2)\pi}, & k \neq 2 \\ \frac{1}{2}, & k = 2 \end{cases} = \begin{cases} \frac{-\sin(k\frac{\pi}{2})}{(k-2)\pi}, & k \neq 2 \\ \frac{1}{2}, & k = 2 \end{cases}$$

Problema 6 Sea $x(t)$ una señal periódica con periodo fundamental T y coeficientes de las series de Fourier a_k. Derive los coeficientes de las series de Fourier de cada una de las siguientes señales en términos de a_k:

(a) $\mathcal{O}d\{x(t-T/2)\}$

$$\begin{aligned} x(t-T/2) \longleftrightarrow b_k &= a_k e^{-jk\omega_0 \frac{T}{2}} \quad \text{(propiedad de desplazamiento de tiempo)} \\ &= a_k e^{-jk\pi} = a_k(e^{-j\pi})^k \\ &= a_k(-1)^k \end{aligned}$$

Si suponemos que $x(t)$ es real:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}d\{x(t-T/2)\} \longleftrightarrow c_k &= j\,\Im m\{b_k\} \quad \text{(Descomposición par-impar de la propiedad de las señales reales, tabla 3.1, O\&W, pág. 206)} \\ &= j\,\Im m\{a_k(-1)^k\} = (-1)^k j \Im m\{a_k\}. \end{aligned}$$

No obstante, la pregunta no especifica que $x(t)$ sea real, por lo tanto, suponiendo que $x(t)$ es complejo, simplemente utilizaremos la fórmula general para hallar la parte impar de una señal:

$$\mathcal{O}d\{x(t)\} = \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)] \quad \text{(O\&W, sección 1.2.3, y específicamente la ecuación (1.19), pág.14)}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{O}d\{x(t-T/2)\} = \frac{1}{2}\left[x(t-T/2) - x(-t-T/2)\right] \longleftrightarrow d_k &= \frac{1}{2}[a_k(-1)^k - a_{-k}(-1)^{-k}] \\ &= \frac{1}{2}(-1)^k(a_k - a_{-k}). \end{aligned}$$

Observe que para $x(t)$: $a_{-k} = a_k^* \rightarrow a_k - a_{-k} = 2j\,\Im m\{a_k\} \rightarrow c_k = d_k$.

(b) $x(T/4-t)$

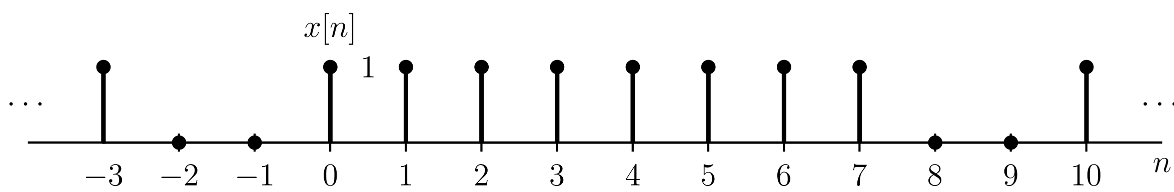
$$x(-t) \longleftrightarrow c_k = a_{-k} \quad \text{(propiedad de inversión de tiempo)}$$

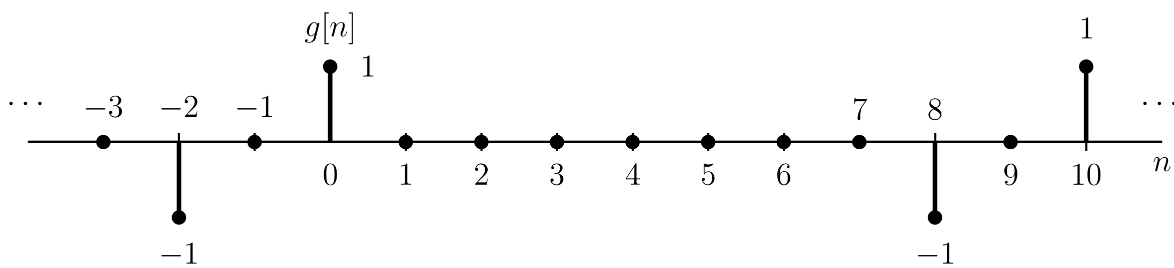
$$\begin{aligned} x(T/4-t) \longleftrightarrow d_k = c_k e^{-jk\omega_0 T/4} \quad &\text{(desplazamiento de tiempo en la dirección de tiempo positivo, es decir, retardo)} \\ = c_k e^{-jk\frac{\pi}{2}} = c_k(-j)^k = a_{-k}(-j)^k. \end{aligned}$$

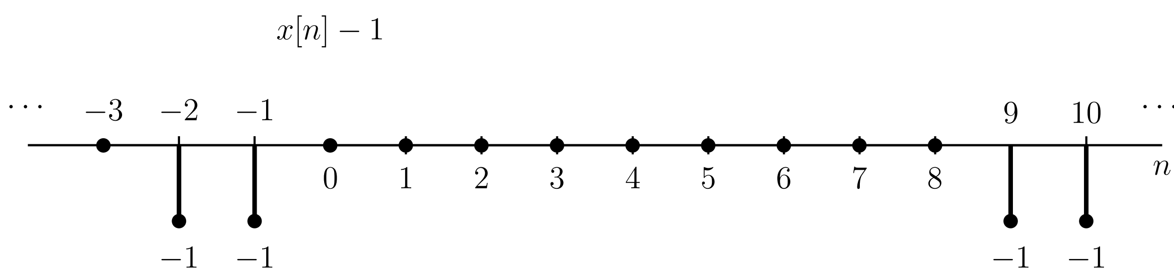
Problema 7 O&W, 3.31 (determine también a_0)

Sea $x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 7 \\ 0, & 8 \leq n \leq 9 \end{cases}$, $x[n]$: periódico, $N = 10$, coeficientes de las series de Fourier: a_k.

Además, sea $g[n] = x[n] - x[n-1]$.







Periodo fundamental $= N = 10 \rightarrow \omega_0 = \frac{\pi}{5}$.

$$a_0 = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n] = \frac{1}{10} \sum_{n=0}^{9} x[n] = \frac{1}{10}[1(8) + 0(2)] = 8/10 = 4/5.$$

(a) Demuestre que $g[n]$ tiene un periodo fundamental de 10.

$$g[n+N] = x[n+N] - x[n+N-1]$$

$$\because x[n+N] = x[n] \rightarrow g[n+N] = x[n] - x[n-1] = g[n]$$

$\rightarrow g[n]$ tiene un periodo fundamental de $N = 10$.

(b) Determine los coeficientes de las series de Fourier de $g[n]$.

$$g[n] = x[n] - x[n-1] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & 1 \leq n \leq 7 \\ -1, & n = 8. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} g[n] e^{-jk\omega_0 n} \\ &= \frac{1}{10} \sum_{n=-2}^{7} g[n] e^{-jk\omega_0 n} \text{ , los límites se escogieron para utilizar los no ceros cercanos al origen} \\ &= \frac{1}{10} \left[(-1) e^{-jk\omega_0(-2)} + (1) e^{-jk\omega_0(0)} \right] = \frac{1}{10} \left[1 - e^{jk\omega_0 2} \right] = \frac{1}{10} e^{jk\omega_0} \left[e^{-jk\omega_0} - e^{jk\omega_0)} \right] \\ &= \frac{-j2}{10} e^{jk\omega_0} \left[\frac{e^{jk\omega_0} - e^{-jk\omega_0}}{2j} \right] = \frac{-j}{5} e^{jk\omega_0} \sin k\omega_0 = \frac{-j}{5} e^{jk\frac{\pi}{5}} \sin k\frac{\pi}{5} \end{aligned}$$

(c) Utilice los coeficientes de las series de Fourier de $g[n]$ y la propiedad de primera diferencia en la tabla 3.2, y determ~~i~~ne a_k para $k \neq 0$.

De la tabla 3.2 (O&W, pág. 221): $x[n] - x[n-1] \longleftrightarrow (1 - e^{-jk(2\pi/N)})\, a_k = b_k$

$$\rightarrow b_k = \frac{1}{10}(1 - e^{jk\omega_0 2}) = (1 - e^{-jk\omega_0})\, a_k$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{10} \frac{1 - e^{jk\omega_0 2}}{1 - e^{-jk\omega_0}} = \frac{1}{10} \frac{(1 - e^{jk\omega_0})(1 + e^{jk\omega_0})}{e^{-jk\omega_0}(e^{jk\omega_0} - 1)} = \frac{-1}{10} \frac{(1 + e^{jk\omega_0})}{e^{-jk\omega_0}} \\ &= \frac{-1}{10} \frac{e^{jk\omega_0 \frac{1}{2}}}{e^{-jk\omega_0}} (e^{-jk\omega_0 \frac{1}{2}} + e^{jk\omega_0 \frac{1}{2}}) = \frac{-1}{5} e^{jk\omega_0 \frac{3}{2}} \cos\left(k\omega_0 \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{-1}{5} e^{jk\frac{3\pi}{10}} \cos\left(k\frac{\pi}{10} \right). \end{aligned}$$

Compruebe nuevamente el resultado y, al mismo tiempo, utilice otra ruta para hallar a_k:

Observe que $x[n] - 1$ tendría el mismo a_k (solamente cambia a_0 con un cambio en el nivel de DC de una señal).

$$x[n] - 1 = \begin{cases} 0, & 0 \leq n \leq 7 \\ -1, & 8 \leq n \leq 9 \end{cases} = \begin{cases} 0, & 0 \leq n \leq 7 \\ -1, & -2 \leq n \leq -1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} (x[n] - 1) e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{10} \left[(-1) e^{-jk\omega_0(-2)} + (-1) e^{-jk\omega_0(-1)} \right] = \frac{-1}{10} \left[e^{jk\omega_0 2} + e^{jk\omega_0} \right] \\ &= \frac{-1}{10} e^{jk\omega_0(3/2)} \left[e^{jk\omega_0(\frac{1}{2})} + e^{-jk\omega_0(\frac{1}{2})} \right] = \frac{-1}{5} e^{jk\omega_0(3/2)} \cos(k\omega_0 \frac{1}{2}) = \frac{-1}{5} e^{jk\frac{3\pi}{10}} \cos\left(k\frac{\pi}{10} \right). \end{aligned}$$

Problema 8 O & W 3.51

$x[n]$: señal periódica con periodo $N = 8$ y coeficientes de las series de Fourier $a_k = -a_{k-4}$.
$y[n]$: señal periódica con periodo $N = 8$ y coeficientes de las series de Fourier b_k ,

$$y[n] = \left(\frac{1+(-1)^n}{2}\right) x[n-1]$$

Halle una función $f[k]$ tal que $b_k = f[k]a_k$.

$$y[n] = \left(\frac{1+(-1)^n}{2}\right) x[n-1] = \frac{1}{2}x[n-1] + \frac{1}{2}(-1)^n x[n-1].$$

$$x[n-1] \longleftrightarrow a_k e^{-jk\omega_0(1)} \text{ (Propiedad de desplazamiento de tiempo)} \qquad (1)$$

Observe que $(-1)^n = (e^{j\pi})^n = e^{j4(\frac{2\pi}{8})n} = e^{j4\omega_0 n}, \omega_0 = 2\pi/8 = \frac{\pi}{4}$

$$(-1)^n x[n-1] = e^{j4\omega_0 n} x[n-1] \longleftrightarrow a_{k-4} e^{-j(k-4)\omega_0} \text{ (Propiedad de desplazamiento de frecuencia)} \quad (2)$$

A partir de (1) y (2): $y[n] = \frac{1}{2}x[n-1] + \frac{1}{2}(-1)^n x[n-1] \longleftrightarrow b_k = \frac{1}{2} a_k e^{-jk\omega_0} + \frac{1}{2} a_{k-4} e^{-j(k-4)\omega_0}$.
Sustituyendo $a_k = -a_{k-4}$:

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{2} a_k e^{-jk\omega_0} + \frac{1}{2}(-a_k) e^{-jk\omega_0} e^{j4\omega_0} \\ &= \frac{1}{2} a_k e^{-jk\omega_0}(1 - e^{j4\omega_0}) = \frac{(1-e^{j4\omega_0})}{2} e^{-jk\omega_0} a_k \\ &= \frac{(1-e^{j4\frac{\pi}{4}})}{2} e^{-jk\frac{\pi}{4}} a_k = \frac{1-(-1)}{2} e^{-jk\frac{\pi}{4}} a_k \\ &= e^{-jk\frac{\pi}{4}} a_k \end{aligned}$$

$$\rightarrow f[k] = e^{-jk\frac{\pi}{4}} .$$