Señales y sistemas

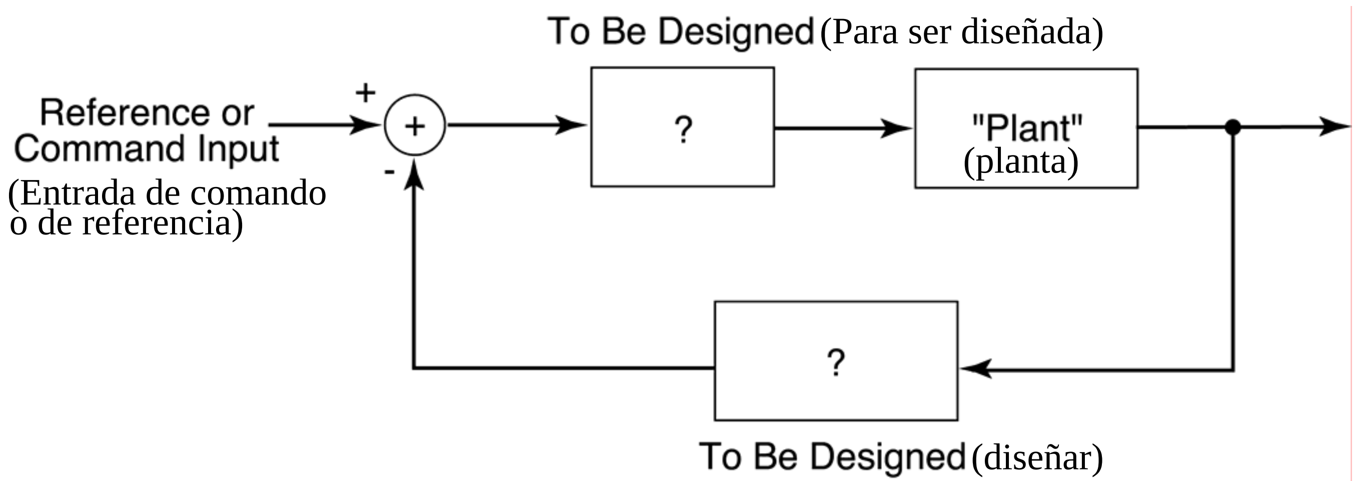
Otoño 2003

Clase 20

20 de noviembre de 2003

1. Sistemas de retroalimentación.
2. Aplicaciones de los sistemas de retroalimentación.

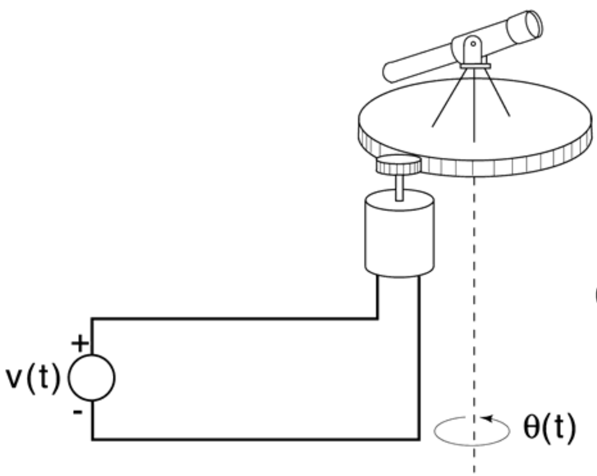
Un sistema de retroalimentación típico

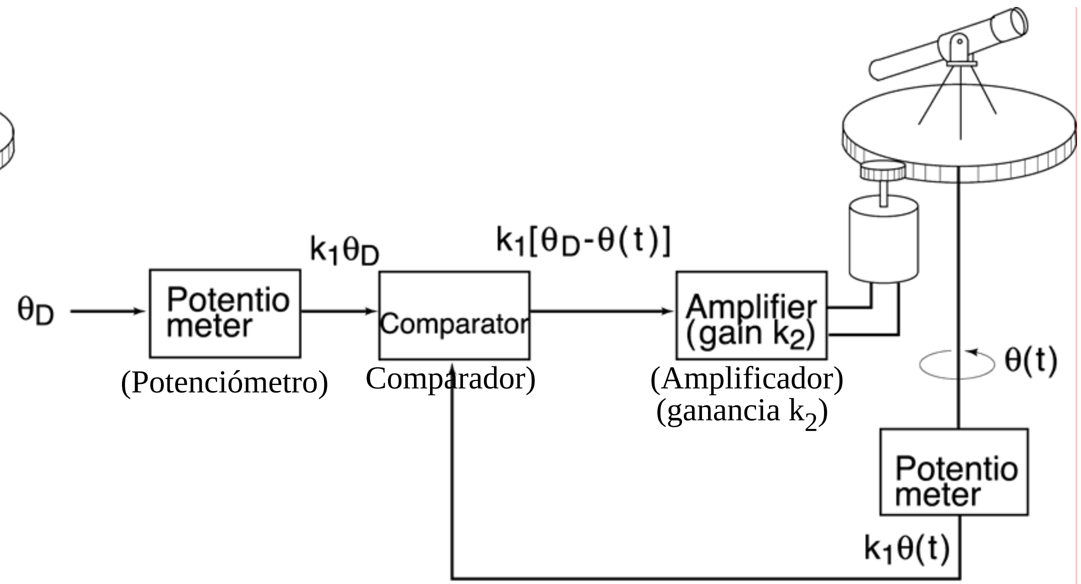


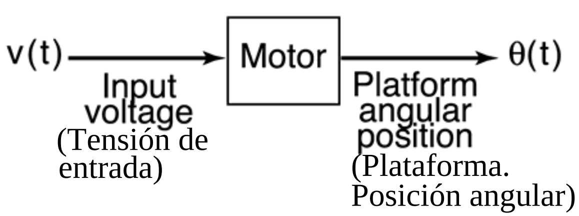
¿Por qué utilizar la retroalimentación?

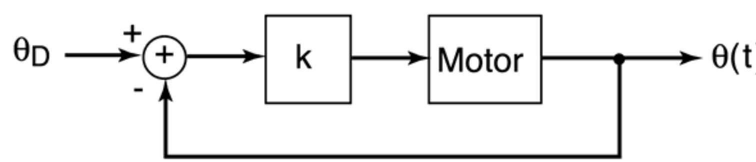
- Para reducir los efectos de las no idealidades.
- Para reducir la sensibilidad a la variabilidad y a las incertidumbres.
- Para estabilizar los sistemas inestables.
- Para reducir los efectos de las perturbaciones.
- Para el seguimiento.
- Para dar forma a las características de respuesta del sistema (ancho de banda / velocidad).

Ejemplo de aplicación







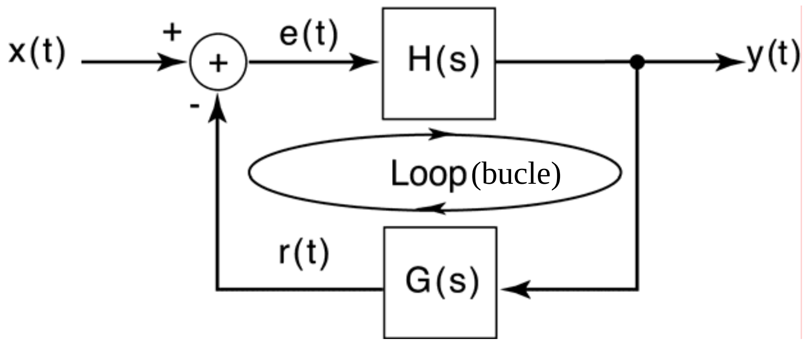


Sistema de bucle abierto

Sistema de retroalimentación de bucle cerrado

Análisis de sistemas LTI (causales) de retroalimentación: fórmula de Black

Sistema en TC



$$Q(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{H(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

Fórmula de Black (1920)

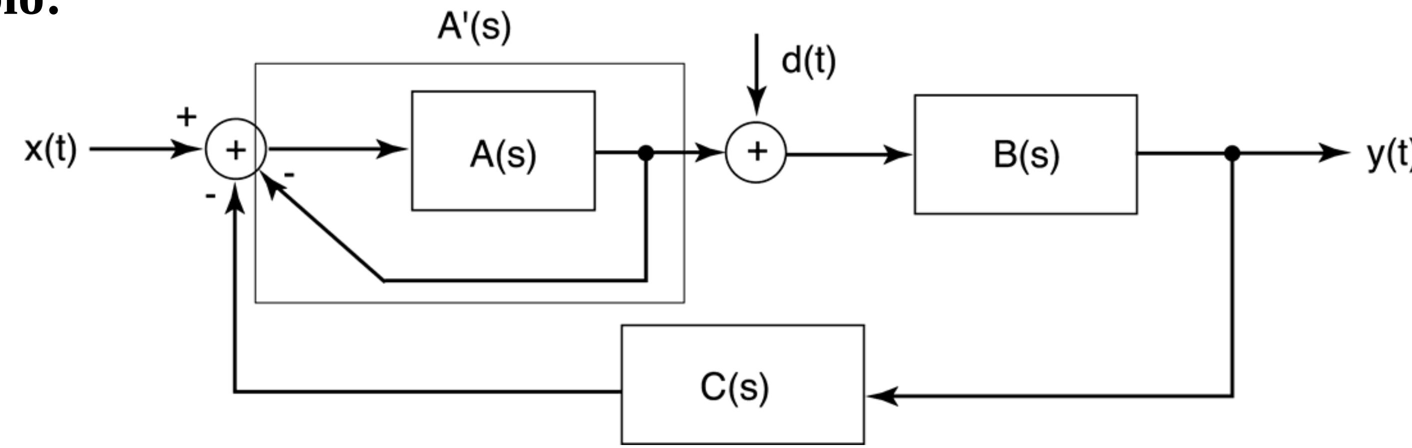
$$\text{Función de sistema de bucle cerrado} = \frac{\text{ganancia directa}}{\text{1- ganancia de bucle}}$$

Ganancia directa — ganancia total a lo largo del camino directo desde la entrada hasta la salida.

Ganancia de bucle — ganancia total alrededor del bucle cerrado.

Aplicaciones de la fórmula de Black

Ejemplo:



1) (ganancia directa) / (1 – ganancia de bucle)

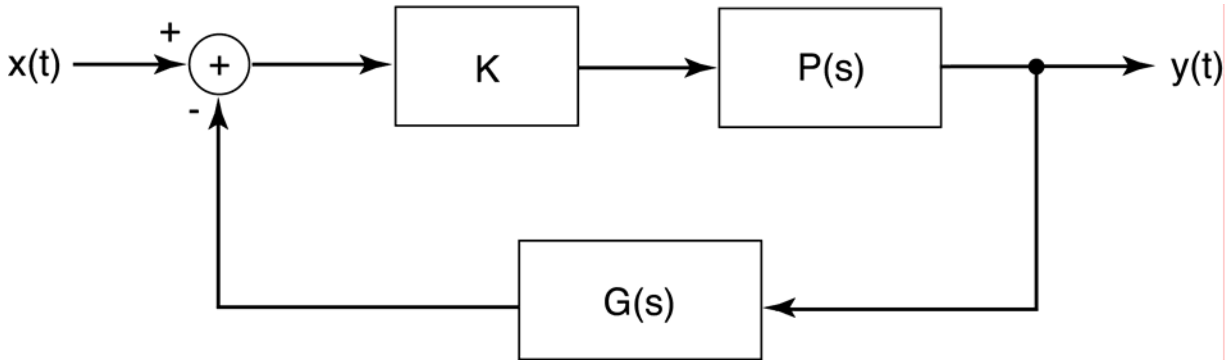
$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\text{Forward gain}}{1-\text{loop gain}} = \frac{A^{'}B}{1+A'BC}$$

$$A^{'} = \frac{A}{1+A} \Rightarrow \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{AB}{1+A+ABC}$$

2)

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{\text{Forward gain}}{1-\text{loop gain}} = \frac{B}{1+A'BC} = \frac{B(1+A)}{1+A+ABC}$$

Utilización de la retroalimentación para compensar las no idealidades



Suponga que $KP(j\omega)$ es *muy grande* por encima del rango de frecuencia que nos interesa. De hecho, suponga que:

$$|KP(j\omega)G(j\omega)| >> 1$$

$$\Downarrow$$

$$Q(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{KP(j\omega)}{1 + KP(j\omega)G(j\omega)} \approx \frac{1}{G(j\omega)}$$ — Independiente de P(s)

Ejemplo de sensibilidad reducida

1) Uso de amplificadores operacionales
2) Reducción de la sensibilidad de ganancia del amplificador

Ejemplo:

(a) Suponga que $KP(j\omega_1) = 1000 \quad , \quad G(j\omega_1) = 0.099$

$$Q(j\omega_1) = \frac{1000}{1 + (1000)(0.099)} = 10$$

(b) Suponga que $KP(j\omega_2) = 500 \quad , \quad G(j\omega_2) = 0.099$

(cambio de ganancia del 50%)

$$Q(j\omega_2) = \frac{500}{1 + (500)(0.099)} \cong 9.9$$ (cambio de ganancia del 1%)

Bien, pero, ¿por qué no fluctúa $G(j\omega)$?

Observe:

$$Q(j\omega) \approx \frac{1}{G(j\omega)}$$

$$\Downarrow$$

Para la amplificación, $G(j\omega)$ debe *atenuar*, y resulta mucho más fácil construir atenuadores (*ej*. resistencias) con las características deseadas.

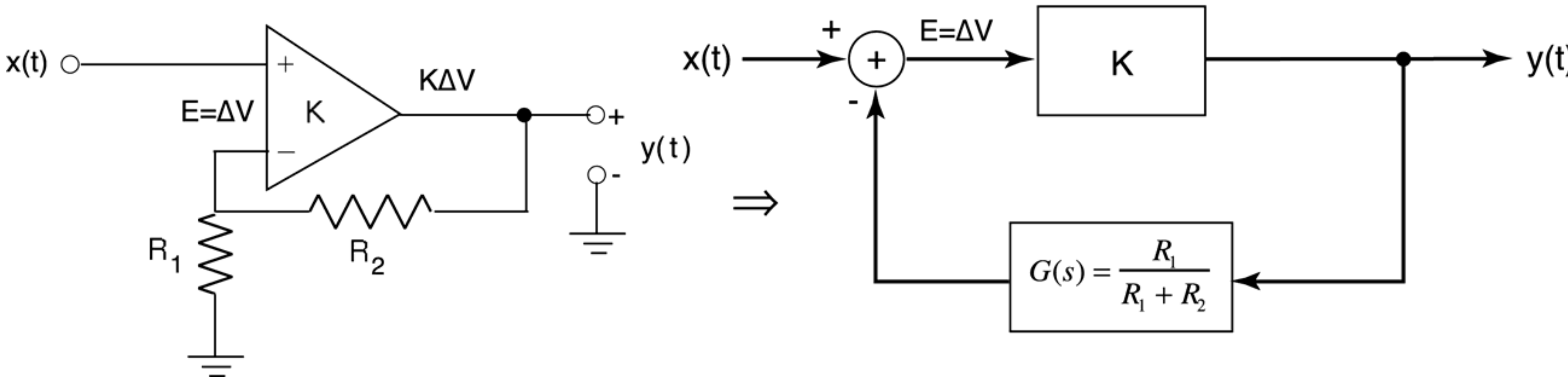
Pero tiene un precio:

$$|KPG(j\omega)| >> 1 \Rightarrow |KP(j\omega)| >> \frac{1}{|G(j\omega)|}$$

Es necesaria una ganancia grande de bucle para producir una ganancia *estacionaria* (y *lineal*) para todo el sistema.

$\Rightarrow$ Consecuencia de la retroalimentación *negativa* (*degenerativa*).

Ejemplo: amplificadores operacionales



Si la amplitud de la ganancia de bucle:

$|KG(s)| >> 1$ — generalmente es el caso, a menos que no haya nada de batería.

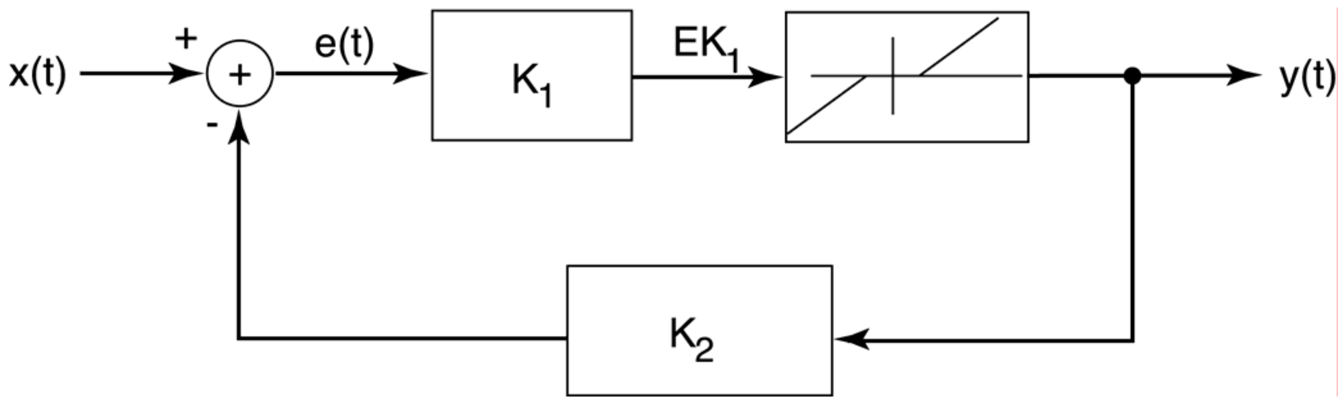
Entonces $$\frac{Y(s)}{X(s)} \approx \frac{1}{G(s)} = \frac{R_1+R_2}{R_1}$$ —— Estado estacionario

La ganancia de bucle cerrado depende únicamente de los componentes *pasivos* (R_1 y R_2), independiente de la ganancia del amplificador de bucle abierto K.

La misma idea funciona para la compensación de las no linealidades

Ejemplo y demostración:

Amplificador con una zona muerta



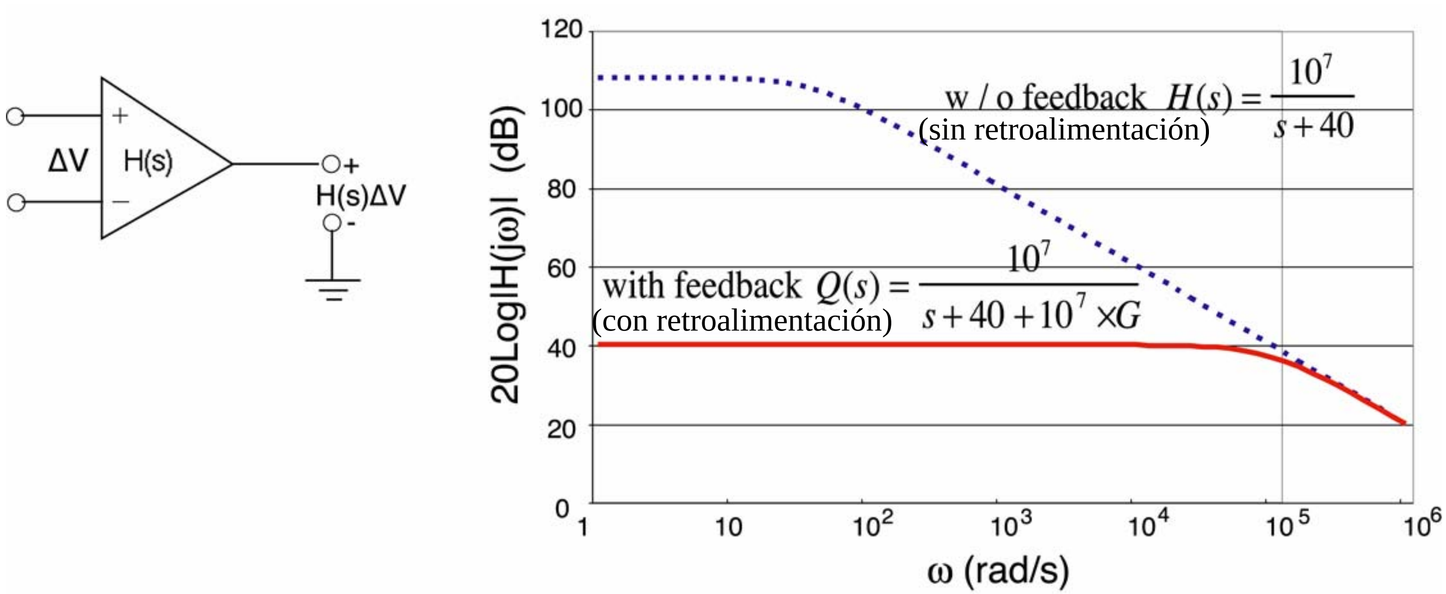
El segundo sistema en el camino directo tiene una relación no lineal de entrada y de salida (zona muerta para entrada pequeña), que provocará una distorsión si se utiliza como amplificador. Sin embargo, mientras la amplitud de la "ganancia de bucle" sea lo suficientemente grande, la respuesta de entrada y de salida $\cong 1/K_2$

Mejora de la dinámica de los sistemas

Ejemplo: amplificador operacional 741

La ganancia de bucle abierto tiene un valor muy grande en dc pero un ancho de banda muy limitado.

$$H(s) = \frac{10^7}{s+40} \quad \text{—— por sí sola no es muy útil}$$



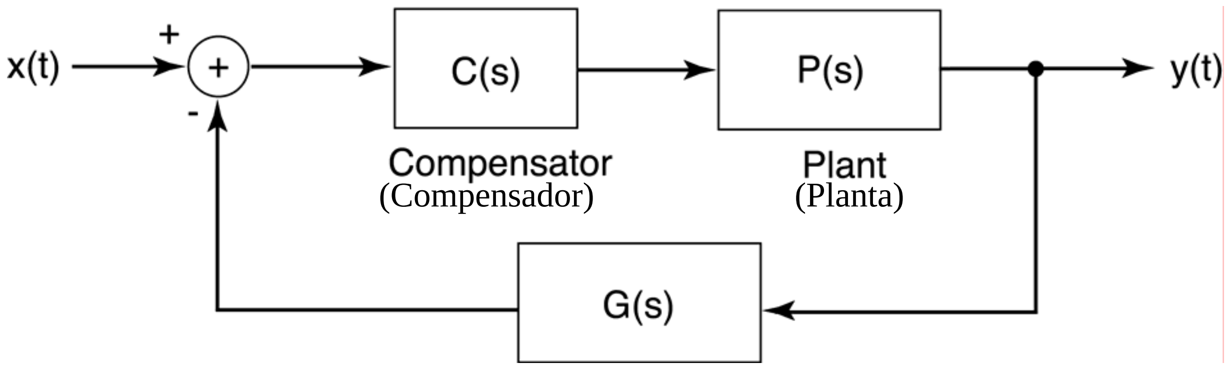
$$\text{With feedback } Q(s) = \frac{H(s)}{1+G(s)H(s)} = \frac{10^7}{s+40+10^7 G(s)}$$

(con retroalimentación)

—— Much broader bandwidth, also $Q(0) \approx 1/G$

(ancho de banda mucho más amplio, también ...)

Estabilización de sistemas inestables



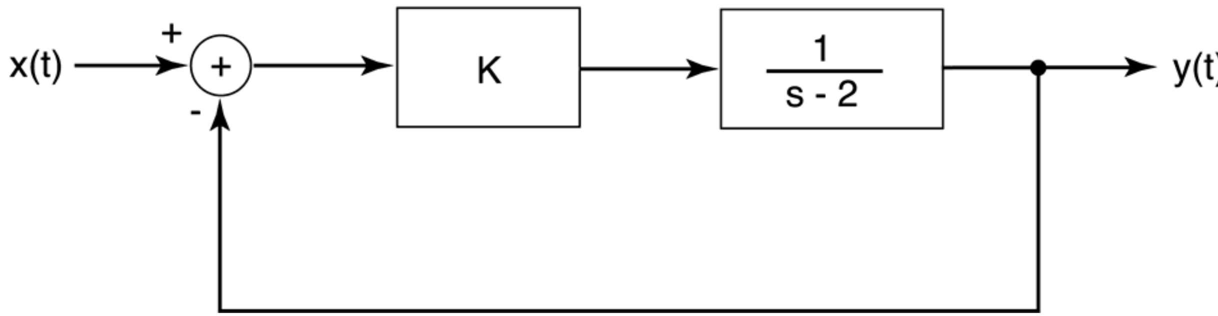
- $P(s)$ — inestable
- Diseñe $C(s)$, $G(s)$ de forma que el sistema de bucle cerrado,

$$Q(s) = \frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)G(s)}$$

sea estable.

$\Rightarrow$ *polos* de $Q(s)$ = *raíces* de $1+C(s)P(s)G(s)$ en LHP

Ejemplo 1: Sistemas inestables de primer orden



$$P(s) = \frac{1}{s-2}$$
$$G(s) = 1$$

Try: $C(s) = K$ proportional feedback (retroalimentación proporcional)

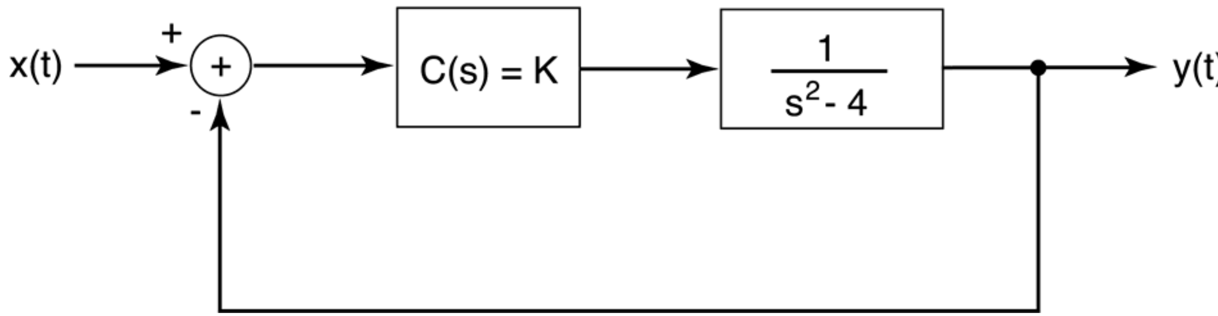
$$Q(s) = \frac{\frac{K}{s-2}}{1+\frac{K}{s-2}} = \frac{K}{s-2+K}$$

Stable as long as $K > 2$
(Estable siempre y cuando...)

Ejemplo 2: Sistemas inestables de segundo orden

$$P(s) = \frac{1}{s^2 - 4}$$

$$G(s) = 1$$



Attempt #1: Proportional Feedback $C(s) = K$
(1er intento: retroalimentación proporcional...)

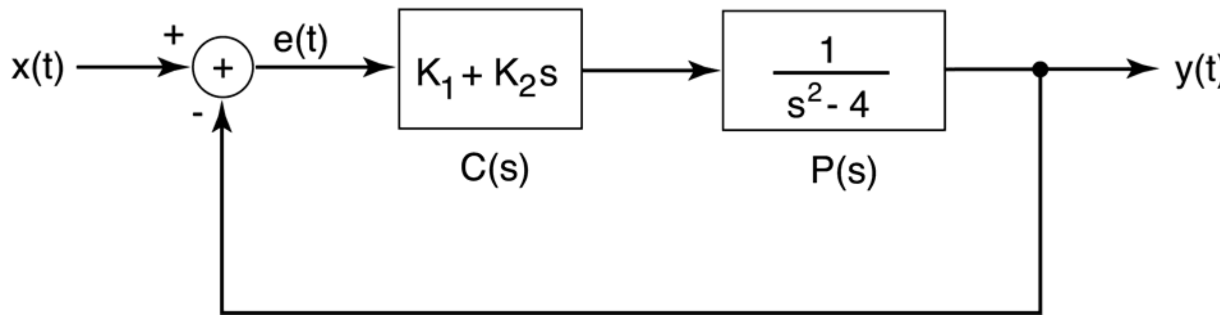
$$Q(s) = \frac{\frac{K}{s^2-4}}{1+\frac{K}{s^2-4}} = \frac{K}{s^2 - 4 + K}$$

— Inestable para *todos* los valores de K

—Físicamente, es necesaria una amortiguación — término proporcional a $s \Leftrightarrow d/dt$

Ejemplo 2 (continuación):

2º intento: inténtelo con la retroalimentación proporcional más derivativa (PD)



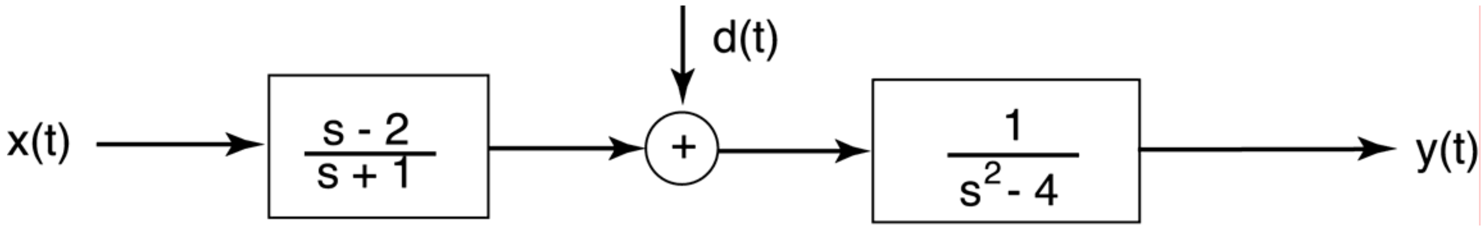
$$C(s) = K_1 + K_2 s$$

$$\begin{aligned} Q(s) &= \frac{\frac{K_1+K_2 s}{s^2-4}}{1+\frac{K_1+K_2 s}{s^2-4}} \\ &= \frac{K_1 + K_2 s}{s^2 + K_2 s + (K_1 - 4)} \end{aligned}$$

— Estable siempre y cuando $K_2 > 0$ (amortiguación suficiente) y $K_1 > 4$ (ganancia suficiente).

Ejemplo 2 (una vez más):

¿Por qué no estabilizamos cancelando los polos inestables?

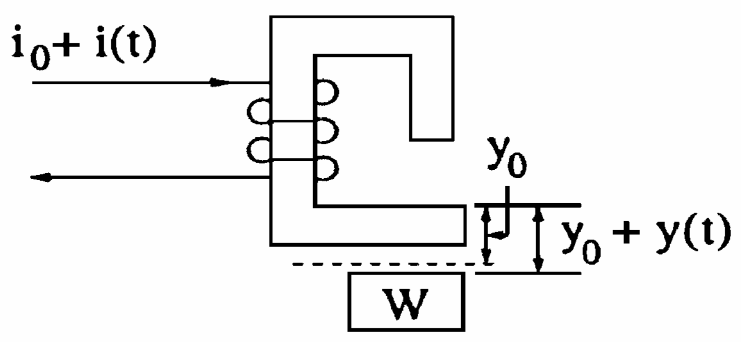


Existen al menos *dos* razones para afirmar que no es una buena idea:

a) En los sistemas físicos reales, no podemos conocer *nunca* los valores concretos de los polos. Podría ser $2\pm\Delta$.

b) La perturbación entre los dos sistemas provocará la inestabilidad.

Demo: levitación magnética



i_o = corriente necesaria para equilibrar el peso W en la altura de reposo y_o

Equilibrio de fuerzas

$$\frac{W}{g}\frac{d^2y}{dt^2} = W - \frac{(i_0 + i(t))^2}{(y_0 + y(t))}$$

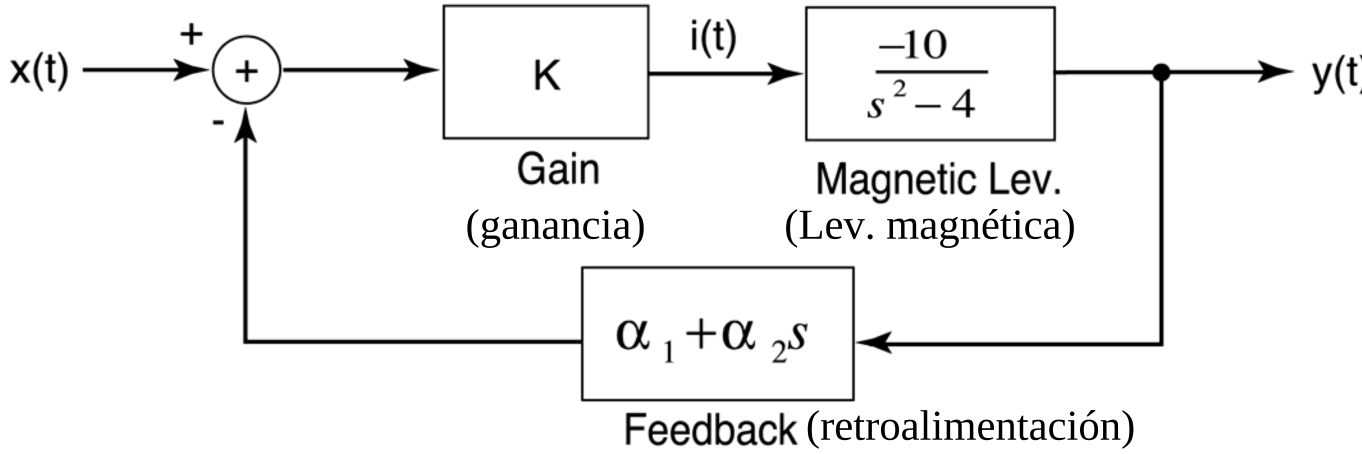
Linealizar sobre el equilibrio con valores específicos para los parámetros:

$$\frac{dy^2}{dt^2} = 4y(t) - 10i(t)$$

$$\Downarrow$$

$$Y(s) = \left(\frac{-10}{s^2 - 4}\right) I(s)$$ — sistema inestable de segundo orden

Levitación magnética (continuación)



$$Q(s) = \frac{-10K}{s^2 - 10K\alpha_2 s - (4 + 10K\alpha_1)}$$

$$E.g.: \quad K = 1, \quad \alpha_1 = -1.3, \quad \alpha_2 = -0.6$$

$$\Downarrow$$

$$Q(s) = \frac{-10}{(s+3)^2}$$ — Estable