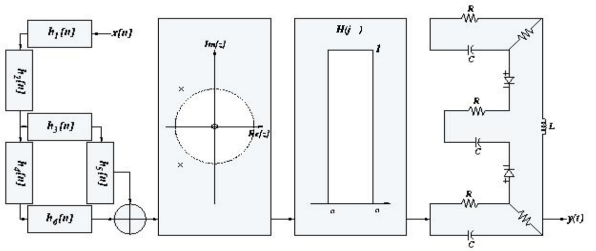


Señales y sistemas

Otoño 2003

Clase 5

18 se septiembre de 2003

1. Exponenciales complejos como funciones propias de sistemas LTI
2. Representación de las series de Fourier de señales periódicas de tiempo continuo (TC)
3. ¿Cómo se calculan los coeficientes de Fourier?
4. La convergencia y el fenómeno de Gibbs

Retrato de Jean Baptiste Joseph Fourier

Signals & Systems, 2ª ed. Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall, 1997, pág. 179.

Características deseables de un conjunto de señales "básicas"

a. Podemos representar clases de señales grandes y útiles utilizando estos bloques de construcción.

b. La respuesta de los sistemas LTI a estas señales básicas es especialmente sencilla, útil y perspicaz.

Enfoque anterior: muestra unitarias e impulsos

Enfoque actual: funciones propias de todos los sistemas LTI

Las funciones propias $\phi_k(t)$ y sus propiedades

(Ahora nos centramos en sistemas de tiempo continuo (TC), pero los resultados se aplican también a los sistemas de tiempo discreto (TD))

$$\phi_k(t) \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{System}\\ \text{(Sistema)}\end{array}} \longrightarrow \underbrace{\lambda_k}_{\text{valor propio}}\ \underbrace{\phi_k(t)}_{\text{función propia}}$$

función propia *in* → la misma función *out* con una "ganancia"

A partir d ela propiedad de superposición de los sistemas LTI:

$$x(t) = \sum_k a_k \phi_k(t) \longrightarrow \boxed{\text{LTI}} \longrightarrow y(t) = \sum_k \lambda_k a_k \phi_k(t)$$

A continuación, el cometido de hallar una respuesta de los sistemas LTI es determinar λ_k.

Exponenciales comlejos como funciones propias de cualquier sistema LTI

$$x(t) = e^{st} \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

$$\begin{aligned}
y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{s(t-\tau)} d\tau \\
&= \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau\right] e^{st} \\
&= \underbrace{H(s)}_{\text{valor propio}} \underbrace{e^{st}}_{\text{función propia}}
\end{aligned}$$

$$x[n] = z^{n} \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$$

$$\begin{aligned}
y[n] &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m] z^{n-m} \\
&= \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m] z^{-m}\right] z^{n} \\
&= \underbrace{H(z)}_{\text{valor propio}} \underbrace{z^{n}}_{\text{función propia}}
\end{aligned}$$

$$x(t) \xrightarrow{e^{st}} \boxed{h(t)} \xrightarrow{H(s)e^{st}} y(t)$$

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-st} dt$$

$$x(t) = \sum_k a_k e^{s_k t} \longrightarrow y(t) = \sum_k H(s_k) a_k e^{s_k t}$$

TD:

$$x[n] \xrightarrow{z_k^n} \boxed{h[n]} \xrightarrow{H(z_k)z_k^n} y[n]$$

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] z^{-n}$$

$$x[n] = \sum_k a_k z_k^n \longrightarrow y[n] = \sum_k H(z_k) a_k z_k^n$$

¿Qué tipo de señale spodemos representar como "sumas" de exponenciales complejos?

A partir de ahora, centrémonos en conjuntos reducidos de exponenciales complejos:

(puramente imaginario)

TC: $s = jw$ – purely imaginary,

i.e., signals of the form $e^{j\omega t}$

(es decir, señales de la forma)

Magnitud 1

TD: $z = e^{jw}$,

i.e., signals of the form $e^{j\omega n}$

(es decir, señales de la forma)

$$\Downarrow$$

Transformadas y series de Fourier en TC y TD

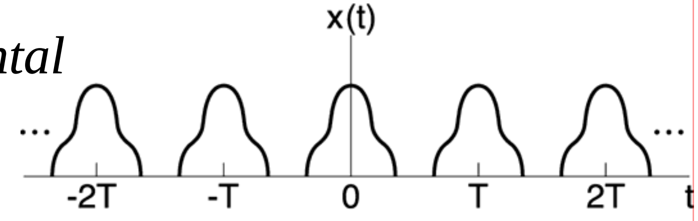
Señales periódicas

Representación de las series de Fourier de señales periódicas en tiempo continuo (TC)

$$x(t) = x(t+T) \quad \text{for all } t$$

(para todo)

- el inferior tal que T es el *periodo fundamental*
- $\omega_o = \dfrac{2\pi}{T}$ es la *frecuencia fundamental*



$$e^{j\omega t} \text{ periodic with period } T \Leftrightarrow \omega = k\omega_0$$

(periódico con periodo T)

$$\Downarrow$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk2\pi t/T}$$

- periódico con periodo T
- $\{a_k\}$ son los *coeficientes de las series de Fourier*
- $k = 0$ DC
- $k = \pm 1$ primer armónico
- $k = \pm 2$ segundo armónico

Pregunta 1: ¿Cómo hallamos los coeficientes de Fourier?

Primero, para señales periódicas sencillas consistentes en unos pocos términos senoidales:

$$\text{Ex: } x(t) = \cos 4\pi t + 2\sin 8\pi t$$

relación de Euler (¡memorizarla!)

$$= \frac{1}{2}\left[e^{j4\pi t} + e^{-j4\pi t}\right] + \frac{2}{2j}\left[e^{j8\pi t} - e^{-j8\pi t}\right]$$

$$\omega_0 = 4\pi \qquad T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
a_0 &= 0 \text{ – no existe componente dc} \\
a_1 &= \frac{1}{2} \\
a_{-1} &= \frac{1}{2} \\
a_2 &= \frac{1}{j} \\
a_{-2} &= -\frac{1}{j} \\
a_3 &= 0 \\
a_{-3} &= 0 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

- En el caso de las señales periódicas *reales*, generalmente se utilizan otras dos formas para las series de Fourier en tiempo continuo:

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}[\alpha_k \cos k\omega_0 t + \beta_k \sin k\omega_0 t]$$

or

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}[\gamma_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k)]$$

- Debido a la propiedad de función propia de $e^{j\omega t}$, por lo general, en el 6.003, utilizaremos la forma exponencial compleja.

  - Una consecuencia será la necesidad de incluir términos para las frecuencias positiva y negativa:

$$e^{jk\omega_0 t} \quad , \quad e^{-jk\omega_0 t}$$

$$\text{Remember } \cos(k\omega_0 t) = \frac{1}{2}(e^{jk\omega_0 t} + e^{-jk\omega_0 t})$$

(Recuerde)

$$\text{and } \sin(k\omega_0 t) = \frac{1}{2j}(e^{jk\omega_0 t} - e^{-jk\omega_0 t})$$

(y)

A continuación, la respuesta completa a la pregunta 1

(Given $x(t)$, how find a_k?)
(Dado $x(t)$, ¿cómo hallamos a_k?

Suppose (Suponga que)

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$\Downarrow$$

1) multiply by $e^{-jn\omega_0 t}$ (multiplicamos por)
2) integrate over one period (integramos sobre un periodo)

1) multiply by $e^{-jn\omega_0 t}$ (multiplicamos por)
2) integrate over one period (integramos sobre un periodo)

$$\begin{aligned}\int_T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt &= \int_T \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}\right) e^{-jn\omega_0 t}dt \\ &= \sum^{\infty} a_k \left(\int_T e^{j(k-n)\omega_0 t}dt\right)\end{aligned}$$

(Here $\int_T$ denotes integral over *any* interval of length T (one period).)
Next, note that (...indica la integral sobre cualquier intervalo de longitud T (un periodo))
(Observe que,)

$$\begin{aligned}\int_T e^{j(k-n)\omega_0 t}dt &= \begin{cases} T, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases} \\ &= T\delta[k-n] \quad \text{Orthogonality (Ortogonalidad)}\end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\int_T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \left(\int_T e^{j(k-n)\omega_0 t}dt\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot T\delta[k-n]$$

$$\int_T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = a_n T$$

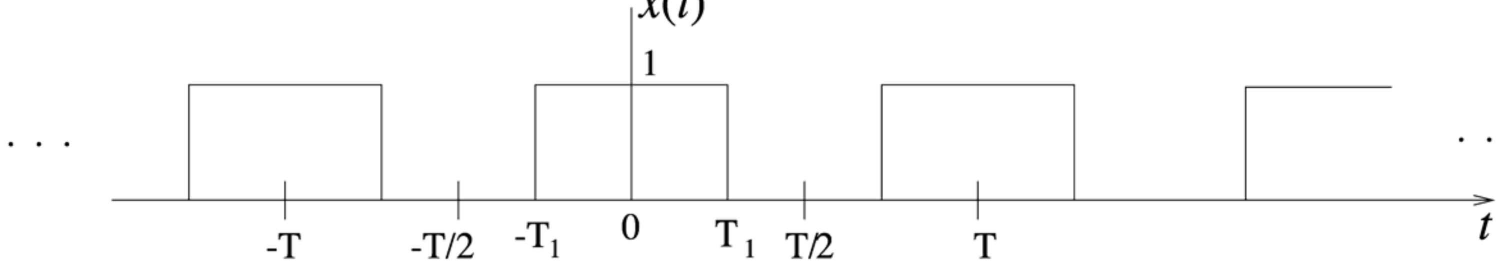
$$\Downarrow$$

CT Fourier Series Pair $\left(\omega_0 = \frac{2\pi}{T}\right)$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \qquad \text{(Synthesis equation)}$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt \qquad \text{(Analysis equation)}$$

Ej.: onda cuadrada periódica



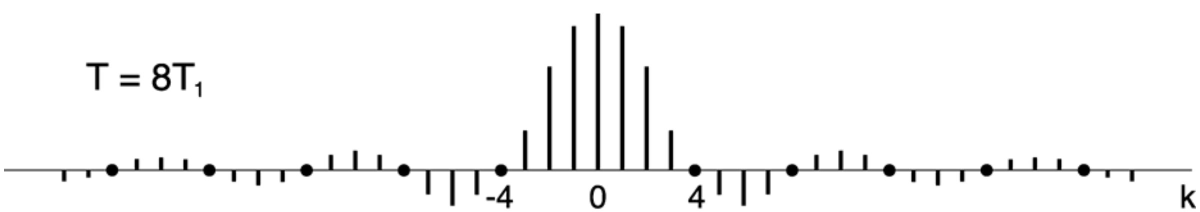
For $k = 0$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)dt = \frac{2T_1}{T}$$

El componente DC es justo la media

For $k \neq 0$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_{-T_1}^{T_1} e^{-jk\omega_0 t}dt \\ &= -\frac{1}{jk\omega_0 T}e^{-jk\omega_0 t}\Big|_{-T_1}^{T_1} = \frac{\sin k\omega_0 T_1}{k\pi} \qquad \left(\omega_0 = \frac{2\pi}{T}\right) \end{aligned}$$



Under a different, but reasonable set of conditions (the Dirichlet conditions)

Condition 1. $x(t)$ is *absolutely integrable* over one period, i. e.

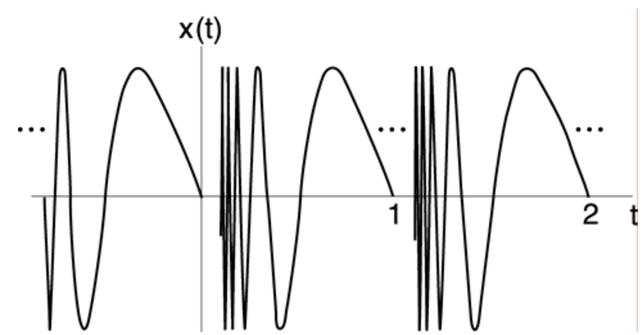
$$\int_T |x(t)|dt < \infty$$

And

Condition 2. In a finite time interval, $x(t)$ has a *finite* number of maxima and minima.

Ex. An example that violates Condition 2.

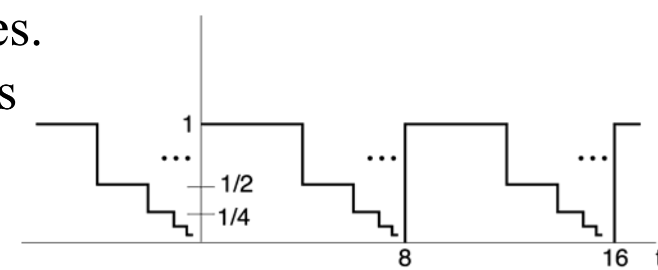
$$x(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{t}\right) \quad 0 < t \leq 1$$



And

Condition 3. In a finite time interval, $x(t)$ has only a *finite* number of discontinuities.

Ex. An example that violates Condition 3.



- Dirichlet conditions are met for the signals we will encounter in the real world. Then

  - The Fourier series = $x(t)$ at points where $x(t)$ is continuous

  - The Fourier series = "midpoint" at points of discontinuity

- Still, convergence has some interesting characteristics:

$$x_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

  - As $N \to \infty$, $x_N(t)$ exhibits *Gibbs*' phenomenon at points of discontinuity

Demo: Fourier Series for CT square wave (Gibbs phenomenon).