Señales y sistemas

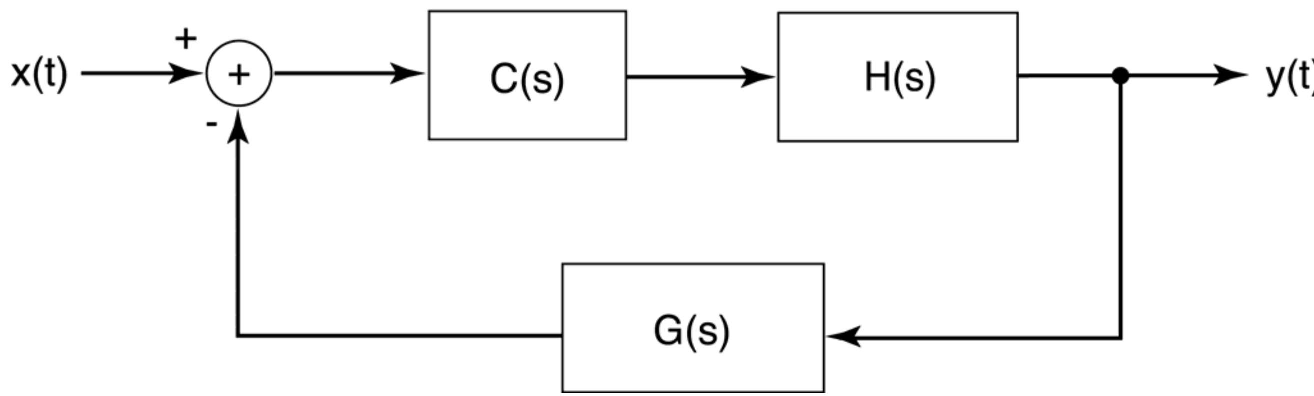
Otoño 2003

Clase 21

25 de noviembre 2003

1. Retroalimentación
   a) Lugar de las raíces (root locus).
   b) Seguimiento.
   c) Rechazo de la perturbación.
   d) El péndulo invertido.
2. Introducción a la transformada Z.

El concepto de lugar de las raíces

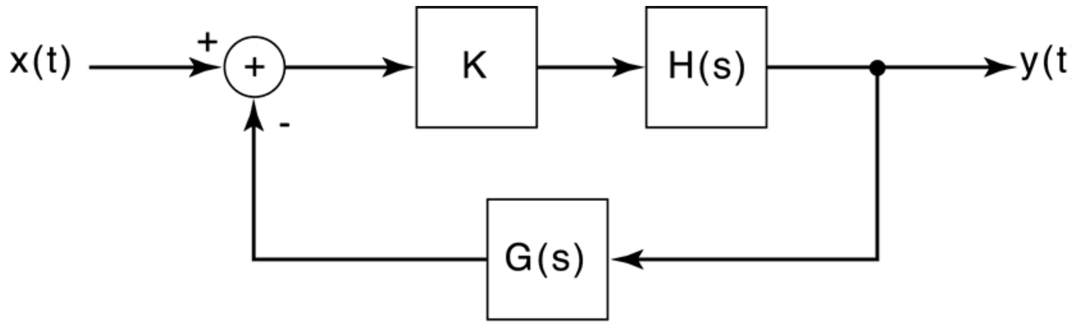


$$Q(s) = \frac{C(s)H(s)}{1 + C(s)G(s)H(s)}$$

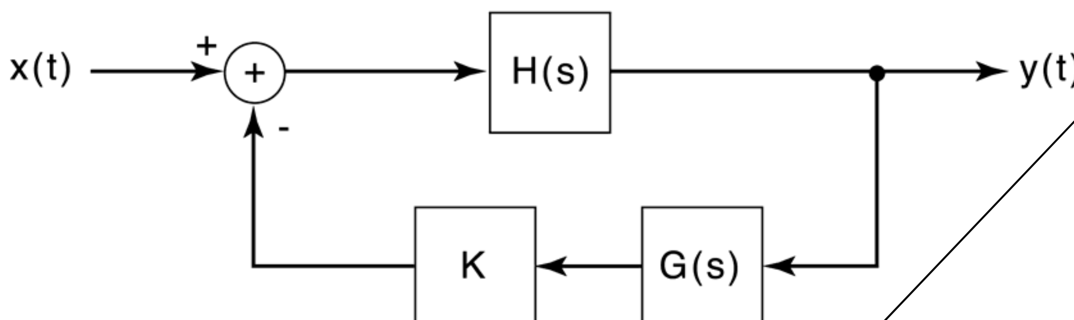
- C(s), $G(s)$ — diseñado con uno o más parámetros libres
- Pregunta: ¿Cómo se desplazan los polos del bucle cerrado cuando variamos estos parámetros? — lugar de las raíces de 1+ C(s)$G(s)H(s)$

El problema clásico del lugar de las raíces

$C(s) = K$ — un amplificador lineal sencillo



$$Q(s) = \frac{KH(s)}{1 + KH(s)G(s)}$$



$$Q(s) = \frac{H(s)}{1 + KH(s)G(s)}$$

Los polos del bucle cerrado son los mismos.

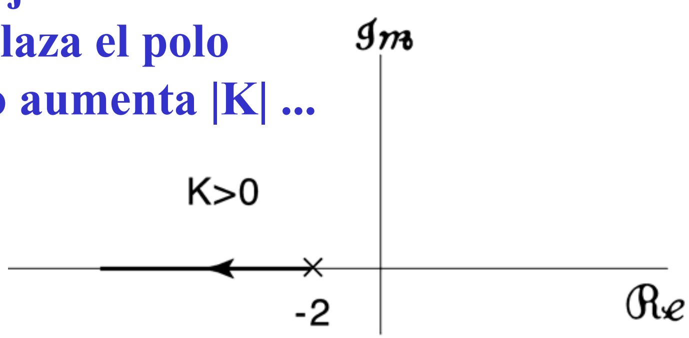
Un ejemplo sencillo

$$H(s) = \frac{1}{s+2}, \quad G(s) = 1$$

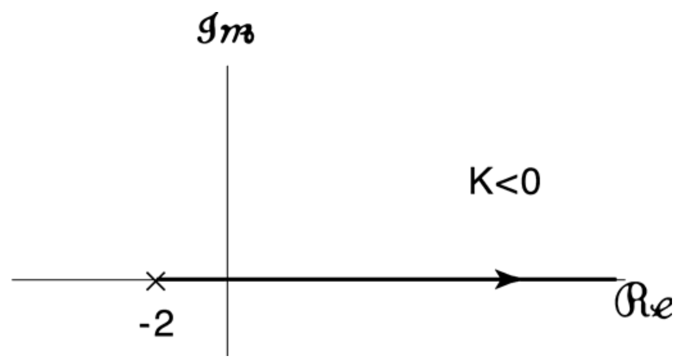
$$\text{(a)}\ Q(s) = \frac{\frac{K}{s+2}}{1+\frac{K}{s+2}} = \frac{K}{s+K+2} \qquad \text{(b)}\ Q(s) = \frac{\frac{1}{s+2}}{1+\frac{K}{s+2}} = \frac{1}{s+K+2}$$

En cualquier caso, el polo se ubica en $s_o = -2 - K$

Dibuje dónde se desplaza el polo cuando aumenta |K| ...



Se vuelve *más* estable



Se vuelve *menos* estable

¿Qué sucede en general?

- Para simplificar las cosas, suponga que no se da una cancelación de polo cero en $G(s)H(s)$

$$Q(s) = \frac{H(s)}{1 + KG(s)H(s)}$$

Los polos del bucle cerrado son las soluciones de:

$$1 + KG(s)H(s) = 0$$

Es decir, $$G(s)H(s) = -\frac{1}{K}$$

— Resulta difícil resolver explícitamente para las soluciones dado *cualquier* valor específico de K, a menos que $G(s)H(s)$ sea de segundo orden o inferior.

— Resulta más sencillo trazar el *lugar de las raíces*, los valores de s que son las soluciones para *algún* valor de K, puesto que:

1) Es mucho más fácil hallar las raíces en los casos restrictivos para $K = 0, \pm\infty$.
2) Existen reglas acerca de cómo conectar estos puntos restrictivos.

Reglas para trazar el lugar de las raíces

$$G(s)H(s) = -\frac{1}{K}$$

- Puntos finales:

— En $K = 0$, $G(s_o)H(s_o) = \infty$

$\Rightarrow$ s_o son *polos* de la función de sistema del bucle abierto $G(s)H(s)$.

— En $|K| = \infty$, $G(s_o)H(s_o) = 0$

$\Rightarrow$ s_o son *ceros* de la función de sistema del bucle abierto $G(s)H(s)$.

Por consiguiente:

Regla 1:

Un lugar de las raíces comienza (en $K = 0$) en un *polo* de $G(s)H(s)$ y finaliza (en $|K| = \infty$) en un *cero* de $G(s)H(s)$.

Pregunta: ¿Qué sucede si el número de *polos* $\neq$ del número de *ceros*?

Respuesta: Que comienza o termina en $\pm\infty$.

Regla 2: Criterio del ángulo del lugar de las raíces

$$G(s)H(s) = \underbrace{-\frac{1}{K}}_{\text{real number (número real)}}$$

- Por consiguiente, s_0 es un polo para algún valor *positivo* de K si:

$$K \geq 0 \Rightarrow \angle G(s_0)H(s_0) = (2n+1)\pi;$$

En este caso, s_0 es un polo si $K = 1/|G(s_0)\,H(s_0)|$.

- Igualmente s_0 es un polo para algún valor *negativo* de K si:

$$K \leq 0 \Rightarrow \angle G(s_0)H(s_0) = 2n\pi$$

En este caso, s_0 es un polo si $K = -1/|G(s_0)\,H(s_0)|$.

Ejemplo de lugar de las raíces

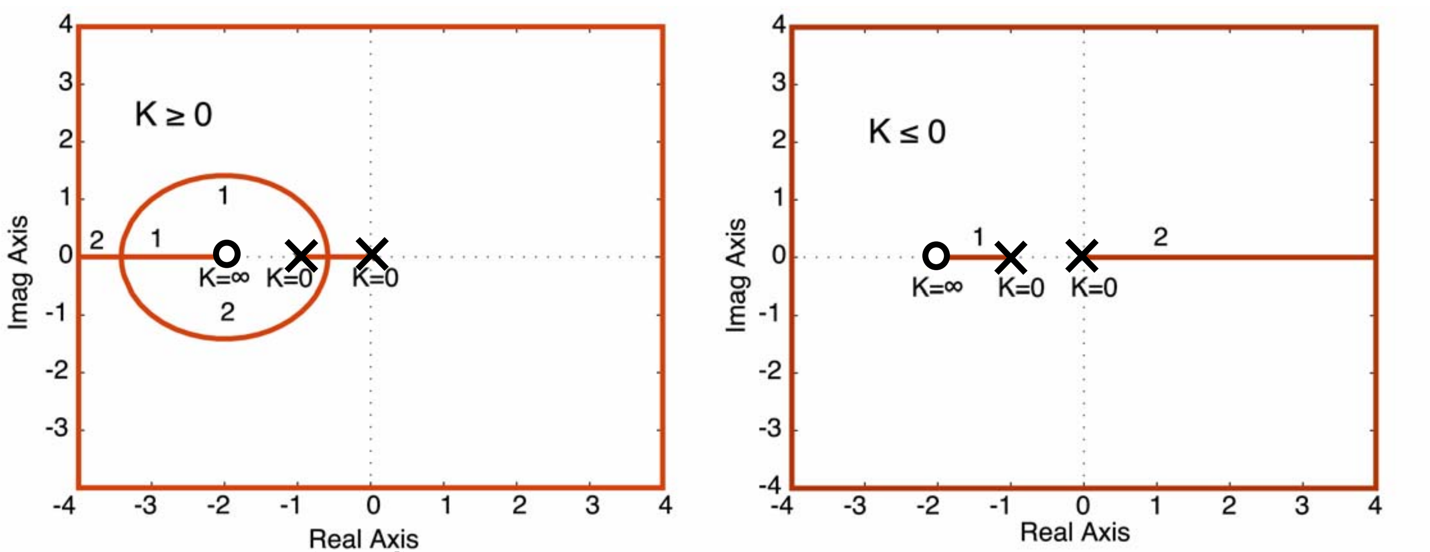
$$G(s)H(s) = \frac{s+2}{s(s+1)}$$

un cero en -2,
dos polos en $0, -1$.

$$rlocus(G(s)H(s))$$

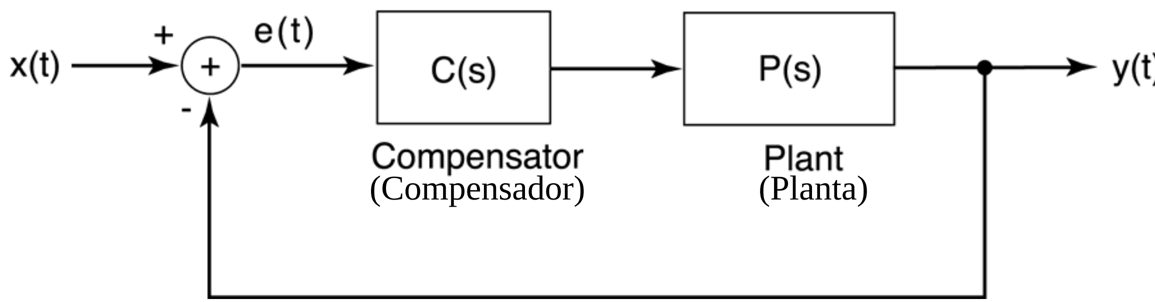
(lugar de las raíces...)

(eje de la imagen)



(eje real)

Seguimiento



Además de la estabilidad, posiblemente deseemos un buen comportamiento de seguimiento, es decir:

$$e(t) = x(t) - y(t) \approx 0 \text{ as } t \to \infty$$

para, al menos, algún conjunto de señales de entrada.

$$E(s) = \frac{1}{1 + C(s)P(s)} X(s)$$

$$\Downarrow$$

$$E(j\omega) = \frac{1}{1 + C(j\omega)P(j\omega)} X(j\omega)$$

Deseamos que $C(j\omega)P(j\omega)$ sea *grande* en aquellas bandas de frecuencia en las que queremos un buen seguimiento.

Seguimiento (continuación)

Utilizando el teorema de valor final:

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s}{1+C(s)P(s)}X(s)$$

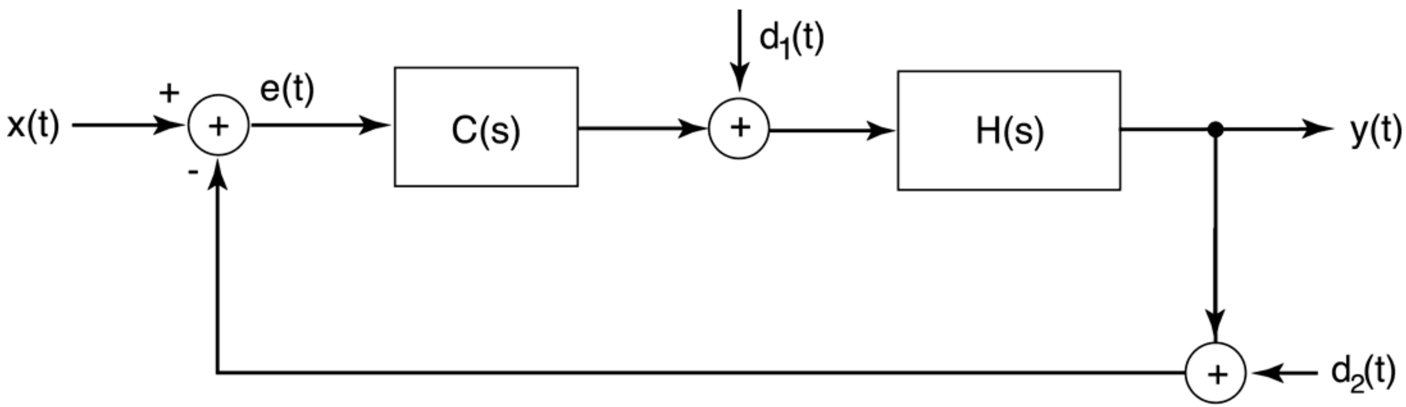
Ejemplo básico: seguimiento del error para una entrada escalón

Suppose (Suponga que) $\quad x(t) = u(t) \longleftrightarrow X(s) = \frac{1}{s}$

Then (Entonces) $\quad \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+C(s)P(s)}$

Rechazo de la perturbación

Posiblemente existen *otros* objetivos en los controles de la retroalimentación debido a perturbaciones inevitables.

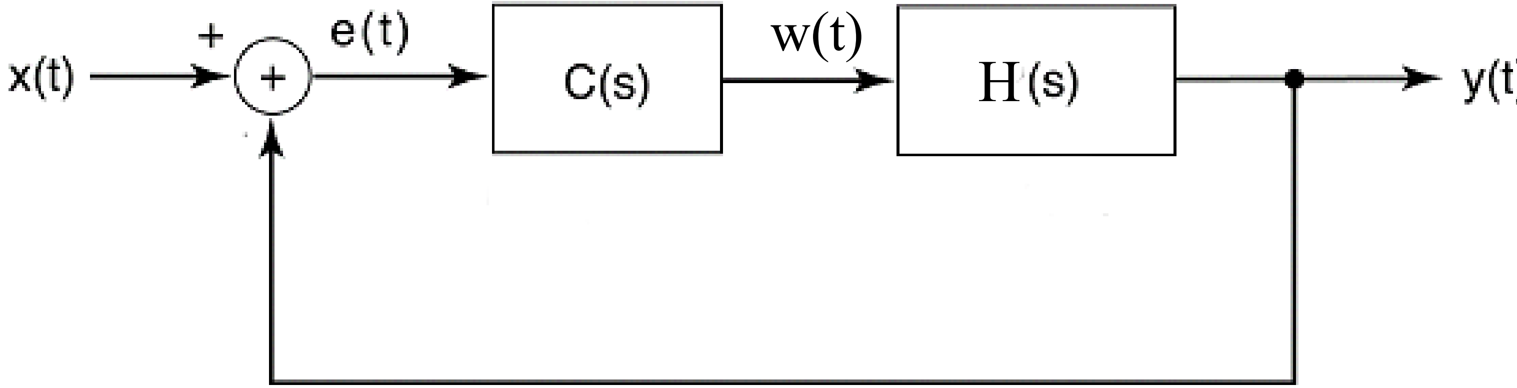


$$E(s) = \left[\frac{1}{1+C(s)H(s)}\right] X(s) - \left[\frac{H(s)}{1+C(s)H(s)}\right] D_1(s) - \left[\frac{1}{1+C(s)H(s)}\right] D_2(s)$$

Evidentemente, las sensibilidades a las perturbaciones $D_1(s)$ y $D_2(s)$ son bastante menos acusadas cuando la amplitud de la ganancia de bucle es:

$$|C(s)H(s)| >> 1$$

Inestabilidades internas provocadas por la cancelación de polo cero



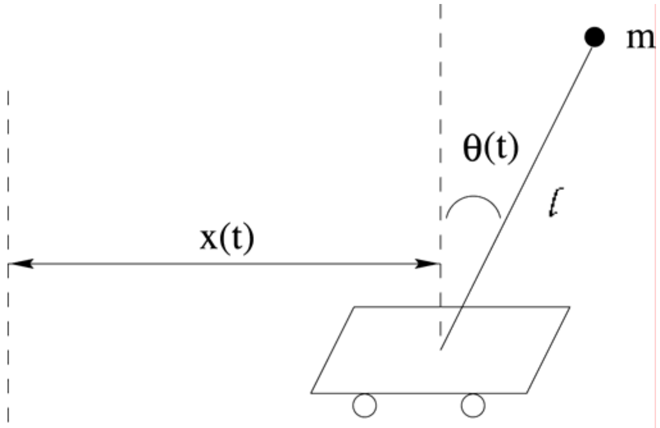
$$C(s) = \frac{1}{s(s+1)} \quad , \quad H(s) = \frac{s}{s+2}$$

$$Y(s) = \frac{C(s)H(s)}{1+C(s)H(s)}X(s) = \frac{1}{\underbrace{s^2+3s+3}_{\text{estable}}}X(s)$$

Sin embargo,

$$W(s) = \frac{C(s)}{1+C(s)H(s)}X(s) = \frac{s+2}{\underbrace{s(s^2+3s+3)}_{\text{inestable}}}X(s)$$

Péndulo invertido



$m = \text{Mass},$ (masa) $\quad I = \text{moment of inertia}$ (momento de inercia)

$$mgl \sin\theta(t) - ml\frac{d^2x(t)}{dt^2}\cos\theta(t) = I\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} \qquad \text{(Moment balance)}$$

(momento de equilibrio)

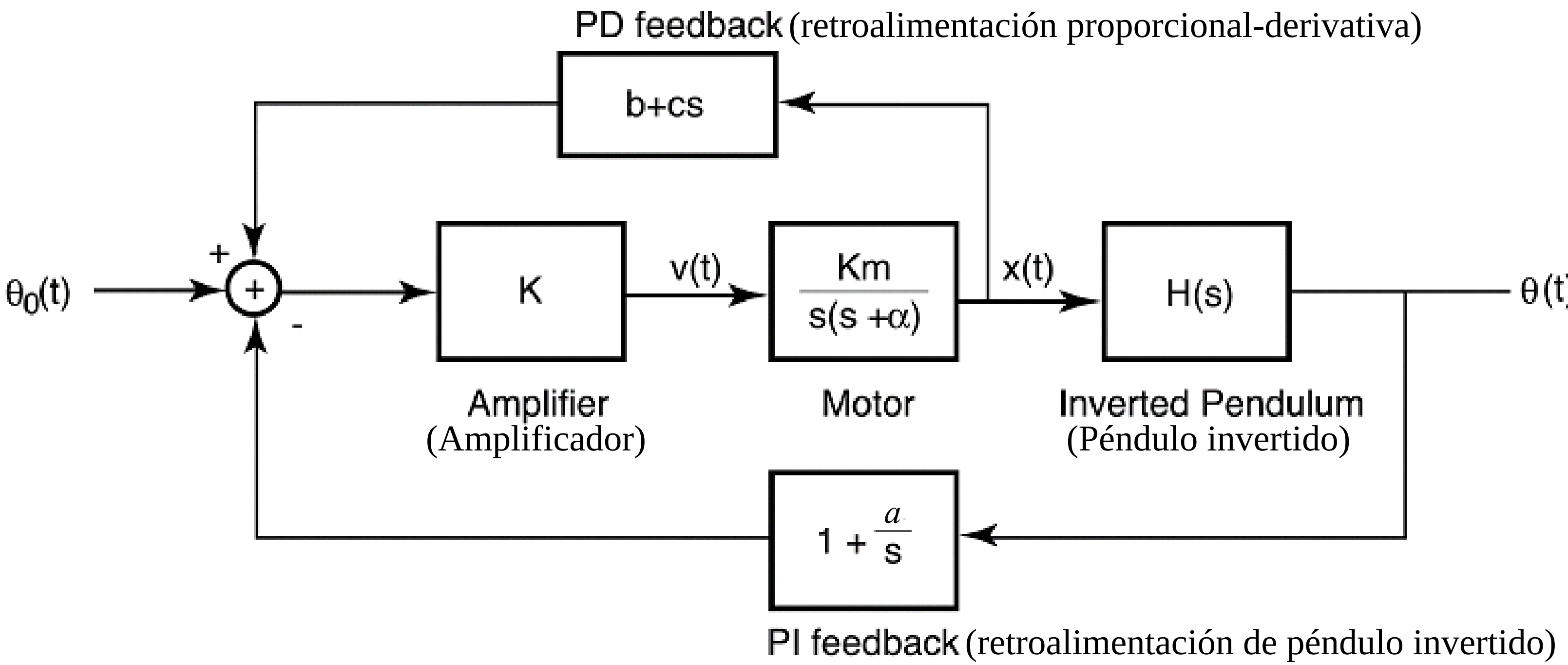
Linearize assuming θ is small: $\sin\theta \approx \theta, \cos\theta \approx 1$
(Linealice suponiendo que θ es pequeño: ...)

$$I\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} - mgl\theta(t) = -ml\frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

$$\Theta(s) = \underbrace{\frac{-mls^2}{Is^2 - mgl}}_{H(s)} X(s)$$

— Inestable

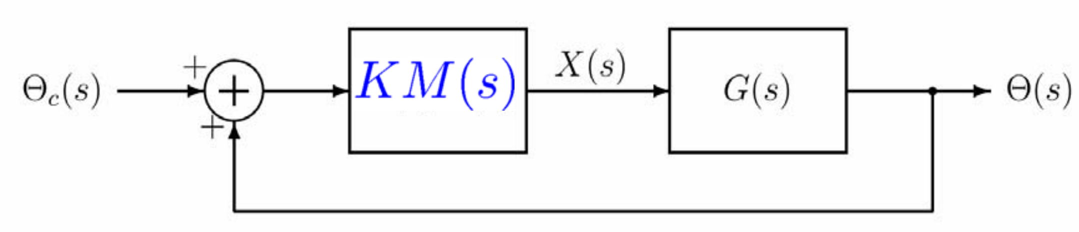
Sistema de retroalimentación para estabilizar el péndulo



- La retroalimentación del péndulo invertido (PI) estabiliza θ.
- Pequeño problema: inestabilidad interna en x(t).
  – La retroalimentación proporcional-derivativa (PD) adicional alrededor del motor / amplicador centra el péndulo.

Lugar de las raíces y péndulo invertido

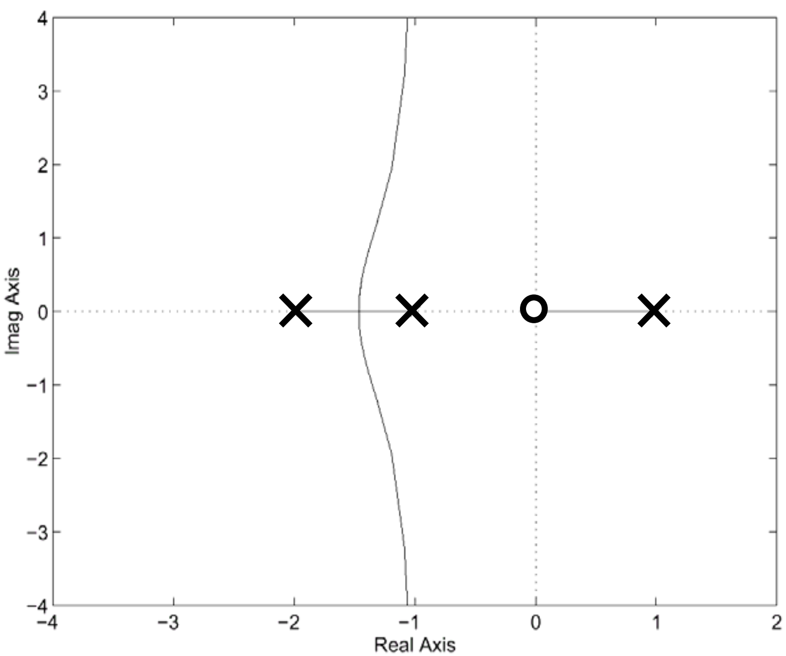
- 1[er] intento: retroalimentación negativa que acciona el motor.



$$G(s) = \frac{\Theta(s)}{X(s)} = \frac{-s^2/g}{(\tau_L s + 1)(\tau_L s - 1)}$$

$$M(s) = \frac{X(s)}{V(s)} = \frac{k_m}{s(\tau_M s + 1)}$$

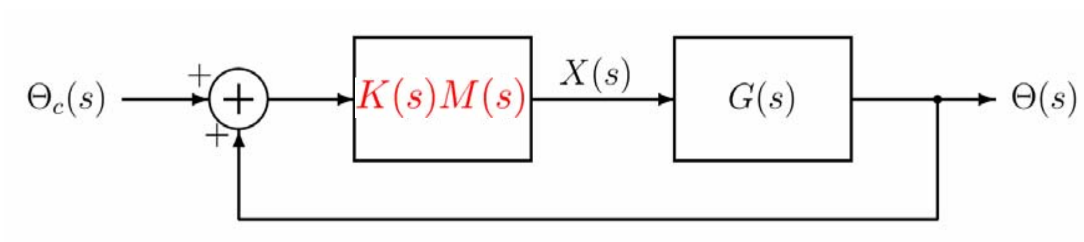
- Lugar de las raíces de *M(s)G(s)*
  - Permanece inestable



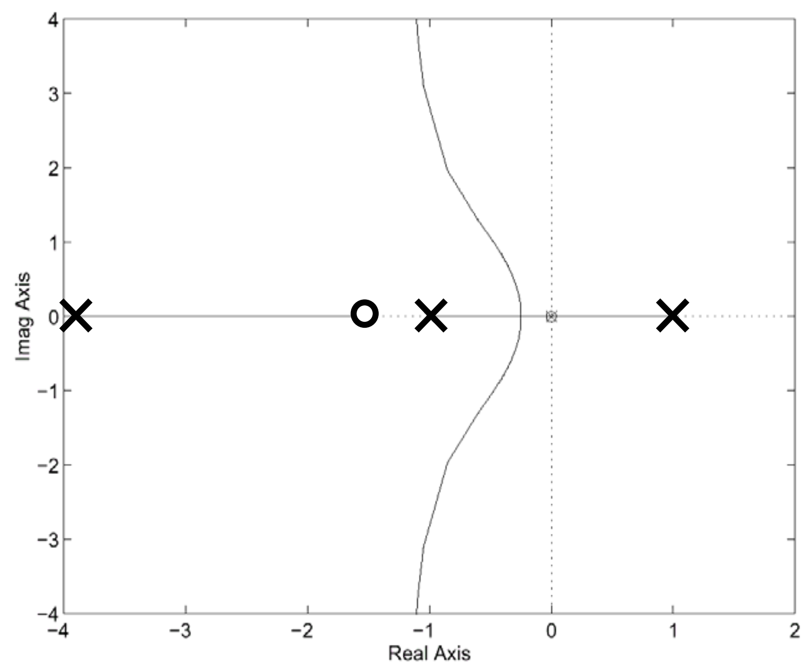
según K. Lundberg

Lugar de las raíces y péndulo invertido

- 2º intento: compensador proporcional / integral



$$K(s) = 1 + \frac{1}{\tau_k s}$$



- Lugar de las raíces de *K(s)M(s)G(s)*
  - Estable para un *K* lo suficientemente grande

según K. Lundberg

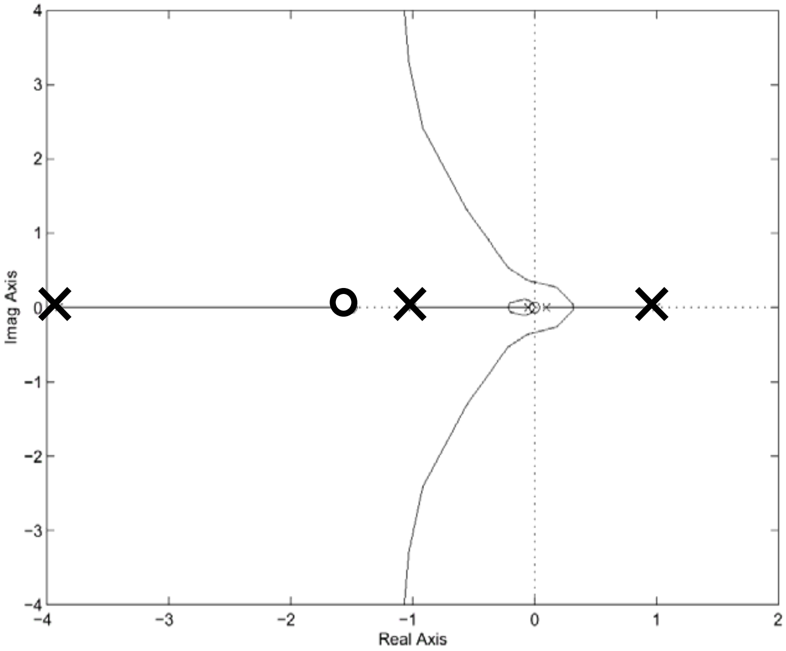
Lugar de las raíces y péndulo invertido

- PERO – x(t) es inestable

$$\frac{X(s)}{\Theta_c(x)} = \frac{K(s)M(s)}{1 - K(s)M(s)G(s)}$$

$$= \frac{1}{s^2}\left(\frac{k_M(\tau_K s + 1)(\tau_L^2 s^2 - 1)}{\tau_K(\tau_M s + 1)(\tau_L^2 s^2 - 1) + (k_M/g)(\tau_K s + 1)}\right)$$

Sistema sujeto a cambio ...



- Solución: añadir retroalimentación proporcional-derivativa (PD) alrededor del compensador:

según K. Lundberg

La transformada Z

Utilización: análoga a la de la transformada de Laplace en tiempo continuo

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$$

Ahora *no* nos limitamos sólo a $z = e^{j\omega}$

$$x[n] = \underbrace{z^n}_{\substack{\text{Eigenfunction} \\ \text{for DT LTI}}} \longrightarrow y[n] = H(z)z^n$$

(Función propia para tiempo continuo y tiempo discreto)

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n} \quad \text{assuming it converges}$$

(suponiendo que converja)

La transformada (bilateral) Z

$$x[n] \longleftrightarrow X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = \mathcal{Z}\{x[n]\}$$

La ROC y la relación entre T*z* y la TF en tiempo discreto

$$z = re^{j\omega} \quad , r = |z|$$

$$\begin{aligned} X(re^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \left(re^{j\omega}\right)^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(x[n]r^{-n}\right) e^{-j\omega n} \\ &= \mathcal{F}\{x[n]r^{-n}\} \end{aligned}$$

- $$\mathrm{ROC} = \left\{ z = re^{j\omega} \underset{\text{(en el que)}}{\text{ at which }} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]r^{-n}| < \infty \right\}$$

  — sólo depende de $r = |z|$, al igual que la ROC en el plano s depende sólo de $Re(s)$

- Círculo unitario ($r = 1$) en la ROC $\Rightarrow$ existe la TF $X(e^{j\omega})$ en tiempo discreto.

Ejemplo 1

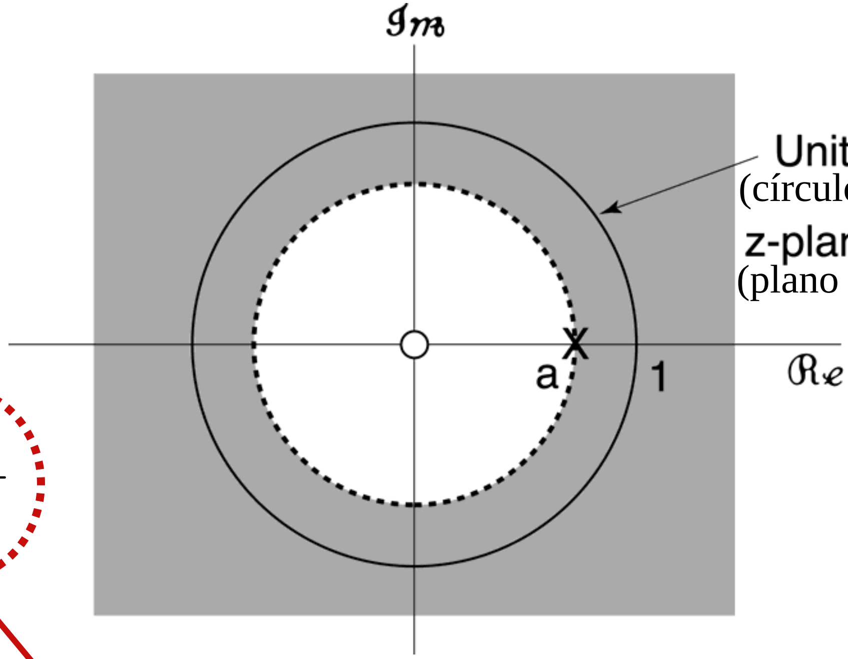
$x[n] = a^n u[n]$ - right-sided (del lado derecho)

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] z^{-n}$$

Esta forma para PFE y la transformada inversa z

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n$$

$$= \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$$



If $|az^{-1}| < 1$, i.e., $|z| > |a|$
(Si) (es decir)

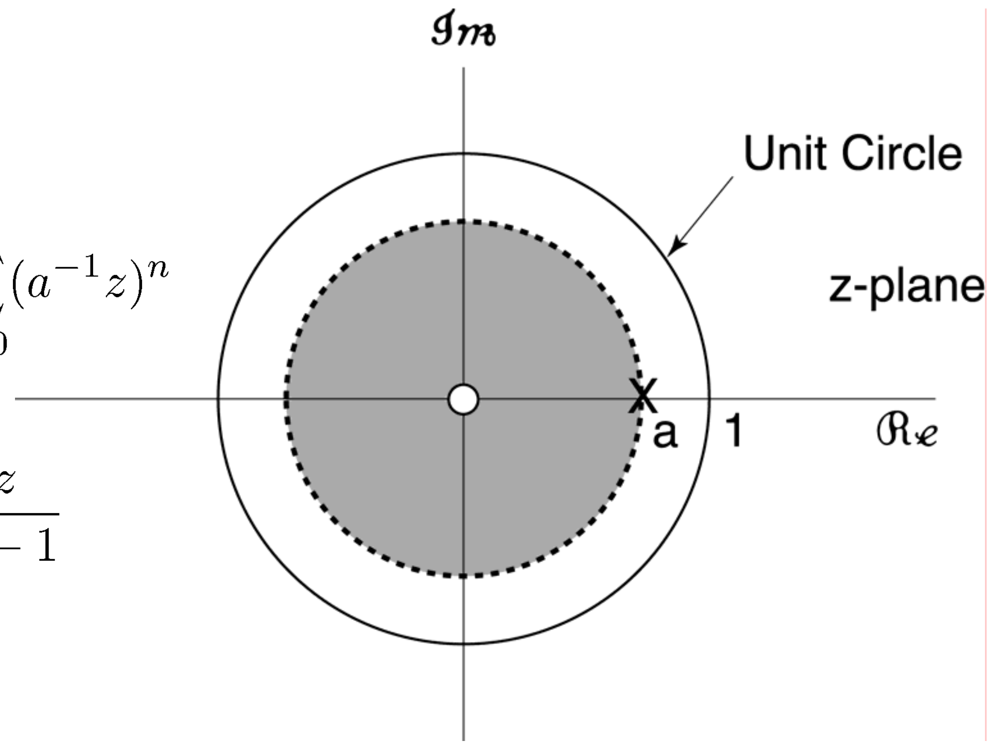
Es decir, ROC $|z| > |a|$, fuera de un círculo

Esta forma sirve para hallar las ubicaciones del polo y del cero

Ejemplo 2:

$x[n] = -a^n u[-n-1]$ - left-sided (del lado izquierdo)

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{-a^n u[-n-1] z^{-n}\} \\ &= -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} z^n = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1}z)^n \\ &= 1 - \frac{1}{1-a^{-1}z} = \frac{a^{-1}z}{a^{-1}z-1} \\ &= \frac{z}{z-a}, \end{aligned}$$



If $|a^{-1}z| < 1$, $i.e.$, $|z| < |a|$

(Si) (es decir)

El mismo $X(z)$ que en el **Ej. 1**, pero una ROC distinta.

Transformadas racionales Z

$x[n]$ = combinación lineal de exponenciales para $n > 0$ y para $n < 0$

$$\Downarrow$$

$X(z)$ is rational (es racional)

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

Polinomios en z

— caracterizado (excepto por una ganancia) por sus polos y ceros.