Señales y sistemas

Otoño 2003

Clase 18

6 de noviembre de 2003

- Transformadas inversas de Laplace.
- Propiedades de la transformada de Laplace.
- La función de sistema de un sistema LTI.
- Evaluación geométrica de las transformadas de Laplace y de las respuestas de frecuencia.

Transformada inversa de Laplace

$$\begin{aligned} X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt, \quad s = \sigma + j\omega \in \text{ ROC} \\ &= \mathcal{F}\{x(t)e^{-\sigma t}\} \end{aligned}$$

Fije $\sigma \in$ ROC y aplique la transformada inversa de Fourier

$$x(t)e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$\Downarrow$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + j\omega)e^{(\sigma+j\omega)t}d\omega$$

Pero $s = \sigma + j\omega$ (σ fixed) $\Rightarrow ds = jd\omega$

$$\Downarrow$$

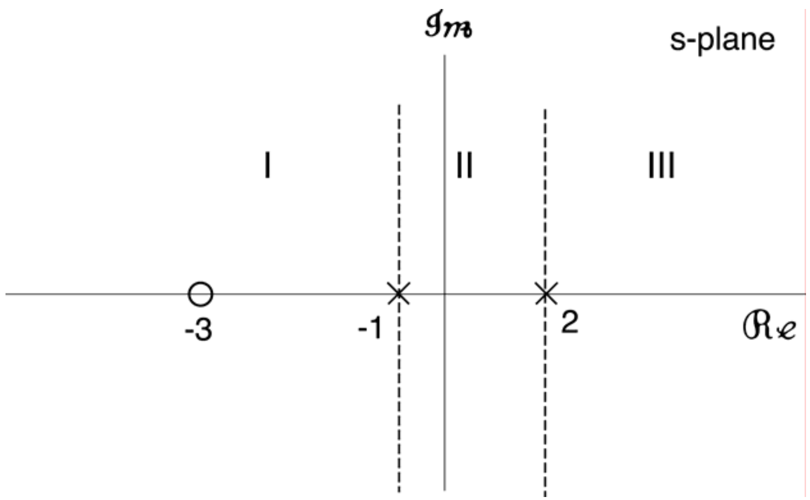
$$x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} X(s)e^{st}ds$$

Transformadas inversas de Laplace a partir de las propiedades y la expansión de la fracción parcial

Ejemplo:
$$X(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s-2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-2}$$

$$A = -\frac{2}{3}, \quad B = \frac{5}{3}$$

Tres ROC posibles — correspondientes a tres señales *distintas*



Recuerde, $\dfrac{1}{s+a}, \quad \Re e\{s\} < -a \longleftrightarrow -e^{-at}u(-t)$ left-sided (del lado izquierdo)

$\dfrac{1}{s+a}, \quad \Re e\{s\} > -a \longleftrightarrow e^{-at}u(t)$ right-sided (del lado derecho)

ROC I: — señal del lado izquierdo.

$$\begin{aligned} x(t) &= -Ae^{-t}u(-t) - Be^{2t}u(-t) \\ &= \left[\frac{2}{3}e^{-t} - \frac{5}{3}e^{2t}\right]u(-t) \qquad \text{Diverges as } t \to -\infty \end{aligned}$$

(Diverge cuando ...)

ROC II: — señales de dos lados, incluye transformada de Fourier.

$$\begin{aligned} x(t) &= Ae^{-t}u(t) - Be^{2t}u(-t) \\ &= -\left[\frac{2}{3}e^{-t}u(t) + \frac{5}{3}e^{2t}u(-t)\right] \qquad \to 0 \text{ as } t \to \pm\infty \end{aligned}$$

(cuando)

ROC III:— señal del lado derecho.

$$\begin{aligned} x(t) &= Ae^{-t}u(t) + Be^{2t}u(t) \\ &= \left[-\frac{2}{3}e^{-t} + \frac{5}{3}e^{2t}\right]u(t) \qquad \text{Diverges as } t \to +\infty \end{aligned}$$

Propiedades de las transformadas de Laplace

- Muchas propiedades coinciden con la TF en tiempo continuo, pero para la transformada de Laplace necesitamos determinar las implicaciones para la ROC.

- Por ejemplo:

Linealidad

$$ax_1(t) + bx_2(t) \longleftrightarrow aX_1(s) + bX_2(s)$$

La ROC es al menos la intersección de las ROC de $X_1(s)$ y $X_2(s)$

La ROC puede ser mayor (debido a la cancelación de polo cero)

E.g. (Ej.) $x_1(t) = x_2(t)$ and $a = -b$

Then (Entonces) $ax_1(t) + bx_2(t) = 0 \longrightarrow X(s) = 0$

$\Rightarrow$ la ROC es todo el plano s

Desplazamiento de tiempo

$$x(t-T) \longleftrightarrow e^{-sT}X(s), \text{ same ROC as } X(s)$$

(la misma ROC que...)

Example: (Ejemplo:)

$$\frac{e^{3s}}{s+2}, \quad \Re e\{s\} > -2 \quad \longleftrightarrow \quad ?$$

$$\frac{e^{-sT}}{s+2}, \quad \Re e\{s\} > -2 \quad \longleftrightarrow \quad e^{-2t}u(t)|_{t \to t-T}$$

$$\downarrow T = -3$$

$$\frac{e^{3s}}{s+2}, \quad \Re e\{s\} > -2 \quad \longleftrightarrow \quad e^{-2(t+3)}u(t+3)$$

Diferenciación del dominio del tiempo

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma - j\omega}^{\sigma + j\omega} X(s)e^{st}ds, \quad \frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma - j\omega}^{\sigma + j\omega} sX(s)e^{st}ds$$

$$\Downarrow$$

$\dfrac{dx(t)}{dt} \longleftrightarrow sX(s)$, with ROC containing the ROC of $X(s)$
(la ROC contiene la ROC de $X(s)$)

La ROC podría ser mayor que la ROC de $X(s)$ si existe una cancelación de polo cero. Ej.,

$$\begin{aligned} x(t) &= u(t) \leftrightarrow \tfrac{1}{s}, && \Re e\{s\} > 0 \\ \frac{dx(t)}{dt} &= \delta(t) \leftrightarrow 1 = s \cdot \tfrac{1}{s} && \text{ROC} = \text{entire s-plane} \end{aligned}$$

(todo el plano s)

Diferenciación del dominio *s*

$-tx(t) \leftrightarrow \dfrac{dX(s)}{ds}$, with same ROC as $X(s)$
(la misma ROC que $X(s)$)

(Derivation is similar to $\frac{d}{dt} \leftrightarrow s$)

E.g., $\quad te^{-at}u(t) \leftrightarrow -\dfrac{d}{ds}\left[\dfrac{1}{s+a}\right] = \dfrac{1}{(s+a)^2}, \quad \Re e\{s\} > -a$

(La derivación es similar a...)

Propiedad de la convolución

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) = h(t) * x(t)$$

Para $x(t) \longleftrightarrow X(s), y(t) \longleftrightarrow Y(s), h(t) \longleftrightarrow H(s)$

Entonces,

$$Y(s) = H(s) \cdot X(s)$$

- La ROC de $Y(s) = H(s)X(s)$: al menos la superposición de las ROC de $H(s)$ y $X(s)$

- La ROC podría estar vacía si no existe superposición entre las dos ROC.

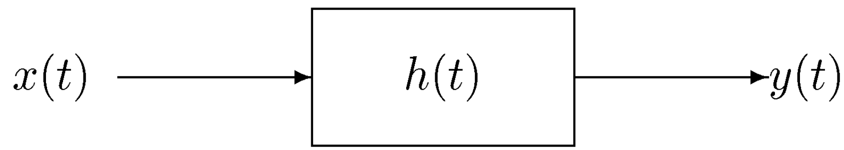
  Ej.

$$x(t) = e^{t}u(t), \quad \text{y} \quad h(t) = -e^{-t}u(-t)$$

- La ROC podría ser mayor que la superposición de las dos. Ej.:

$$x(t) * h(t) = \delta(t)$$

La función del sistema de un sistema LTI



$h(t) \quad \longleftrightarrow \quad H(s)$ – the system function
(la función del sistema)

La función del sistema caracteriza al propio sistema

$$\Downarrow$$

Las propiedades del sistema corresponden a las propiedades de $H(s)$ y de su ROC

Un primer ejemplo:

System is stable (El sistema es estable) $\Leftrightarrow \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt < \infty \quad \Leftrightarrow$ ROC of $H(s)$ includes the $j\omega$ axis (incluye el eje (...))

Evaluación geométrica de las transformadas racionales de Laplace

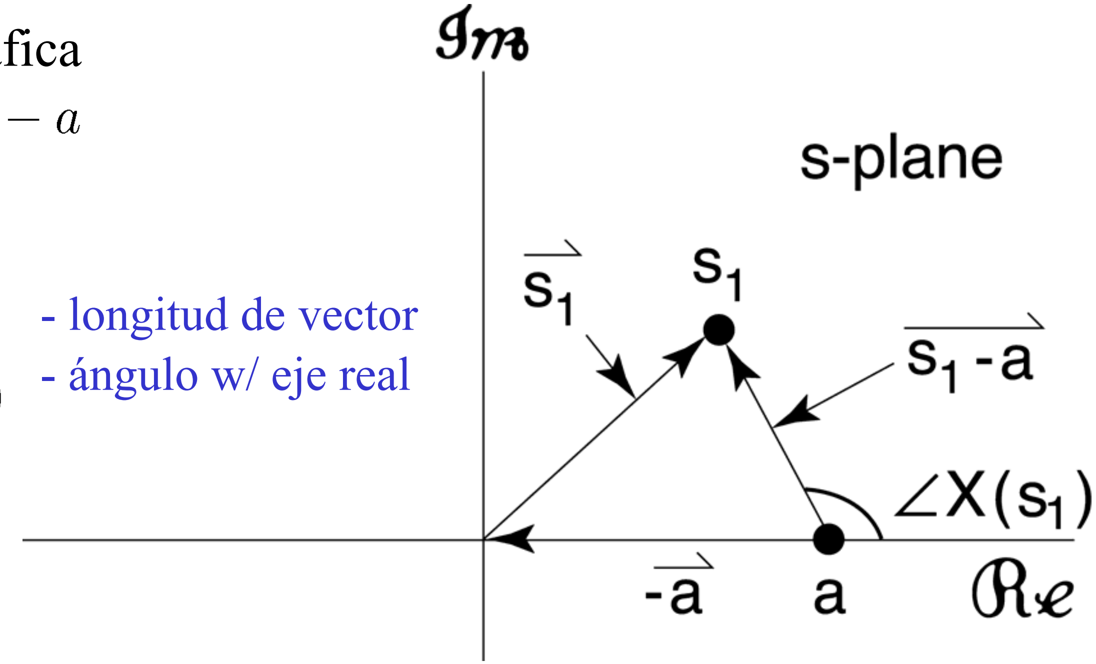
Ejemplo 1: $X_1(s) = s - a$ Un cero de primer orden

Evaluación gráfica de $X_1(s) = s_1 - a$

Puede partir de

$|X_1(s)|$ - longitud de vector

$\angle X_1(s)$ - ángulo w/ eje real



Ejemplo 2: polo de primer orden

$$X_2(s) = \frac{1}{s-a} = \frac{1}{X_1(s)}$$

$$\Rightarrow |X_2(s)| = \frac{1}{|X_1(s)|} \quad (\text{or } \log|X_2(s)| = -\log|X_1(s)|)$$

$$\angle X_2(s) = -\angle X_1(s)$$

Razone todavía con el vector, pero recuerde "invertir" los polos

Ejemplo 3: transformada racional de Laplace de orden superior

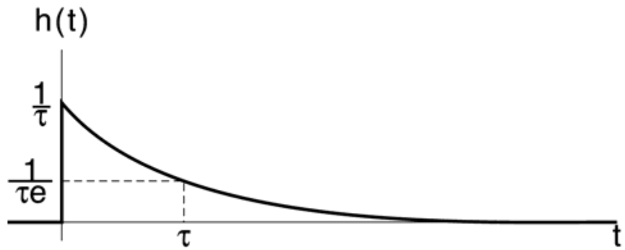
$$X(s) = M\frac{\Pi_{i=1}^{R}(s-\beta_i)}{\Pi_{j=1}^{P}(s-\alpha_j)}$$

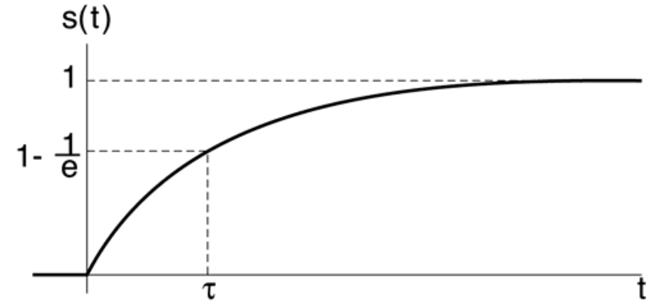
$$|X(s)| = |M|\frac{\Pi_{i=1}^{R}|s-\beta_i|}{\Pi_{j=1}^{P}|s-\alpha_j|}$$

$$\angle X(s) = \angle M + \sum_{i=1}^{R}\angle(s-\beta_i) - \sum_{j=1}^{P}\angle(s-\alpha_j)$$

Sistema de primer orden $H(s) = \dfrac{1}{s\tau + 1} = \dfrac{1/\tau}{s + 1/\tau}, \Re e\{s\} > -\dfrac{1}{\tau}$

$$h(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} u(t) \qquad\qquad s(t) = [1 - e^{-t/\tau}] u(t)$$





Evaluación gráfica de $H(j\omega)$: $H(j\omega) = \dfrac{1/\tau}{j\omega + 1/\tau} = \dfrac{1}{\tau} \cdot \dfrac{1}{j\omega + 1/\tau}$

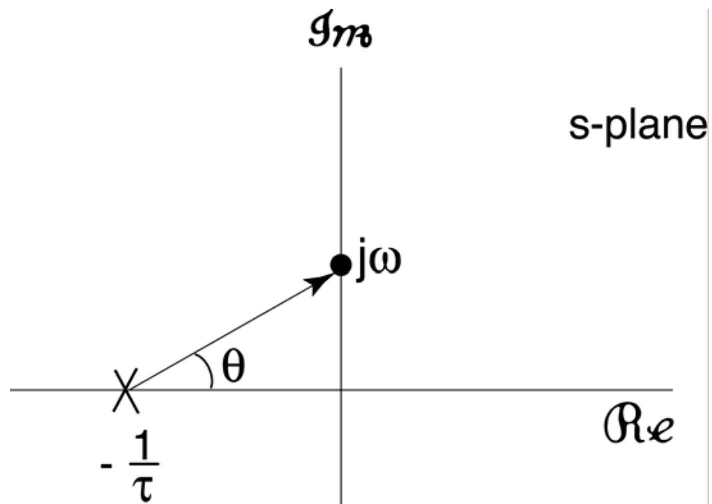
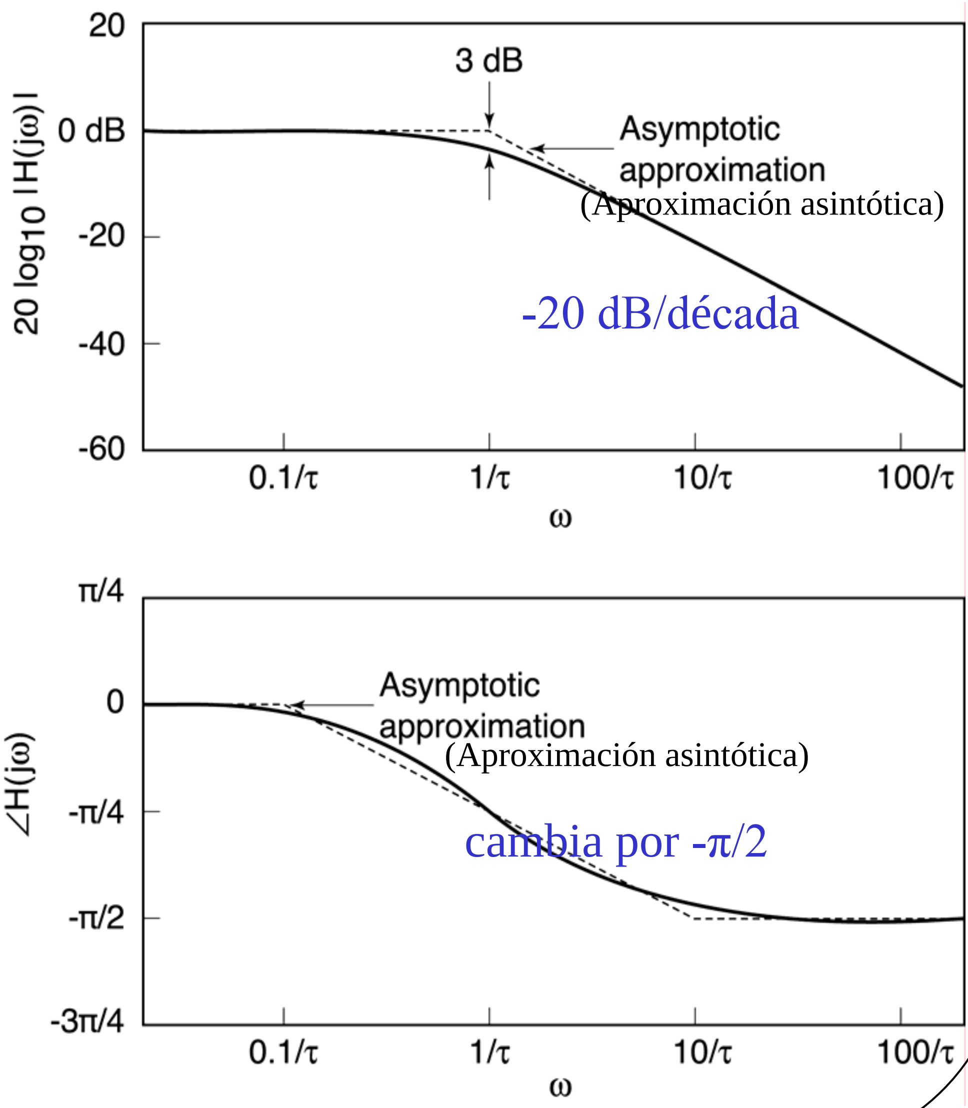


Diagrama de Bode del sistema de primer orden

$$
\begin{aligned}
H(j\omega) &= \frac{1/\tau}{j\omega + 1/\tau} \\
|H(j\omega)| &= \frac{1/\tau}{\sqrt{\omega^2 + (1/\tau)^2}} \\
&= \begin{cases} 1 & \omega = 0 \\ 1/\sqrt{2} & \omega = 1/\tau \\ 1/\omega\tau & \omega >> 1/\tau \end{cases} \\
\angle H(j\omega) &= -\theta = -\tan^{-1}(\omega\tau) \\
&= \begin{cases} 0 & \omega = 0 \\ -\pi/4 & \omega = 1/\tau \\ -\pi/2 & \omega >> 1/\tau \end{cases}
\end{aligned}
$$



Sistema de segundo orden

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \qquad \text{ROC } \Re e\{s\} > \Re e(\text{pole})$$

$0 < \zeta < 1 \quad \Rightarrow$ polos complejos
— *Sub*amortiguado

$\zeta = 1 \quad \Rightarrow$ polo doble en $s = -\omega_n$
— *Críticamente* amortiguado

$\zeta > 1 \quad \Rightarrow$ 2 polos en el eje real negativo

— *Sobre*amortiguado

Demo: Diagramas de polo cero, respuesta de frecuencia y respuesta a escalón de sistemas causales de primer y segundo orden en tiempo continuo

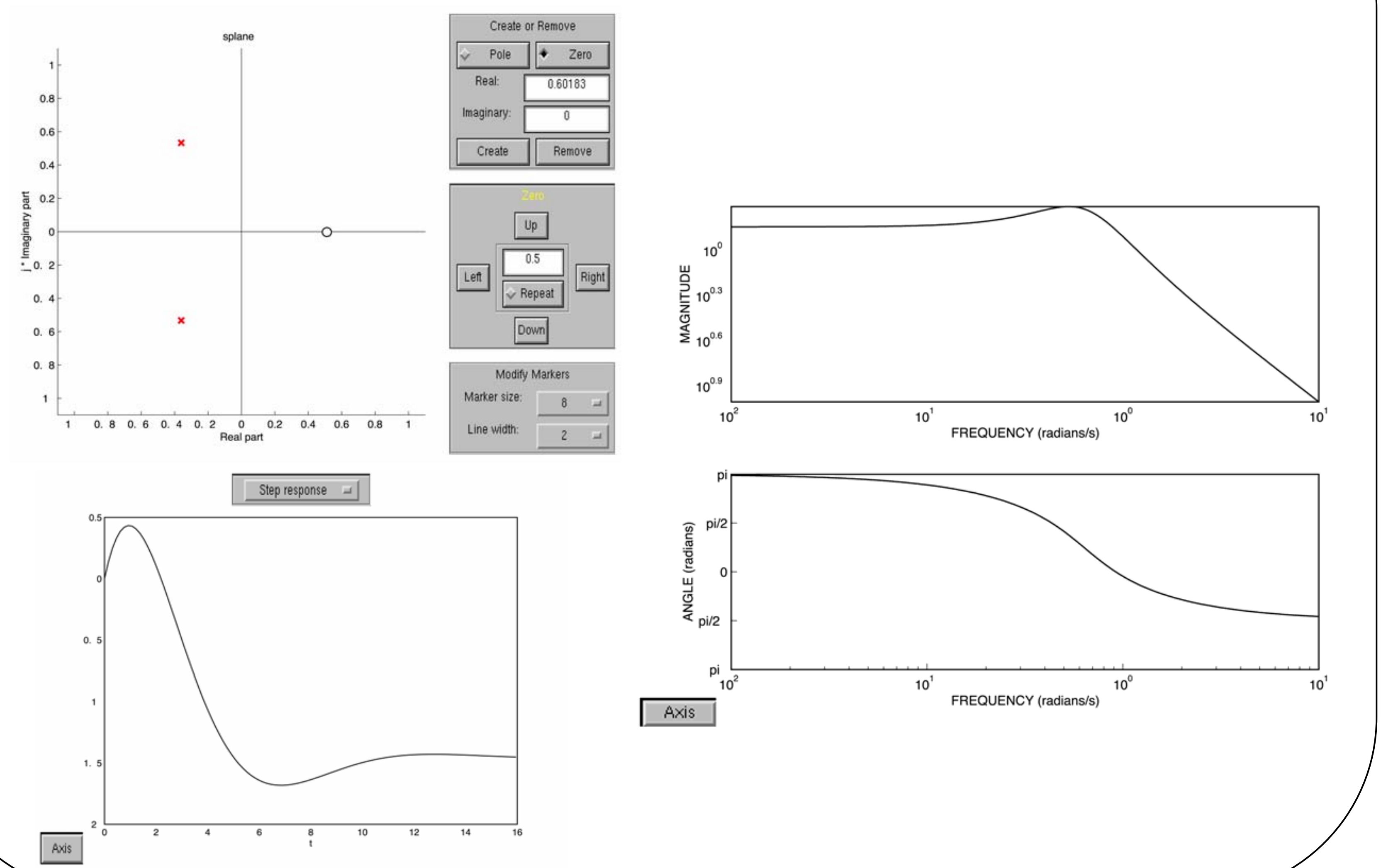
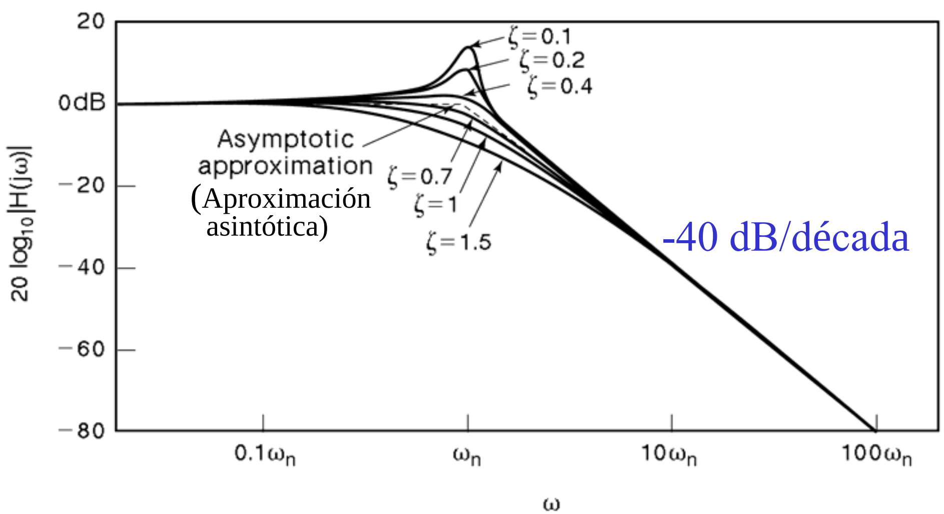
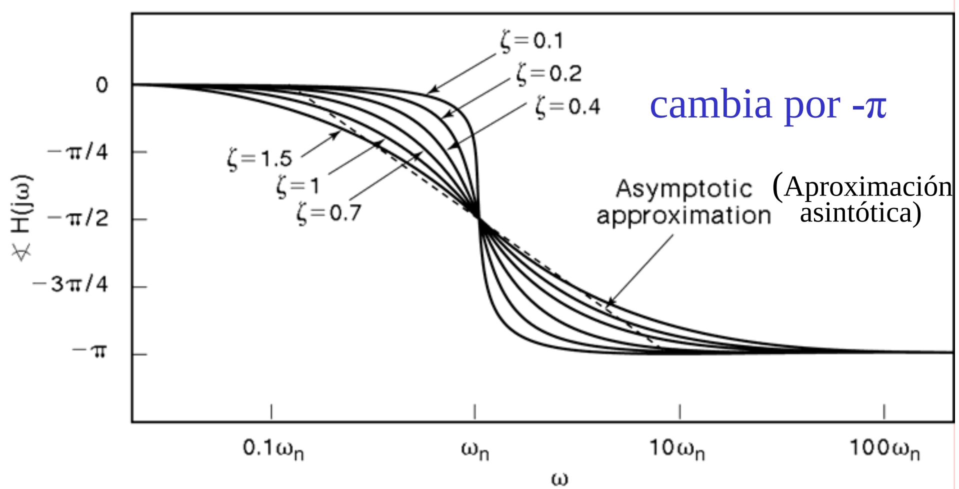


Diagrama de Bode de un sistema de segundo orden

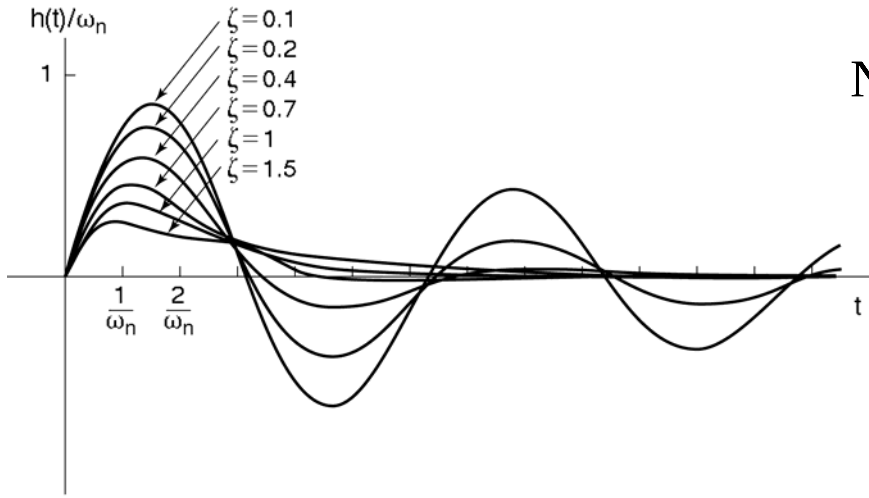




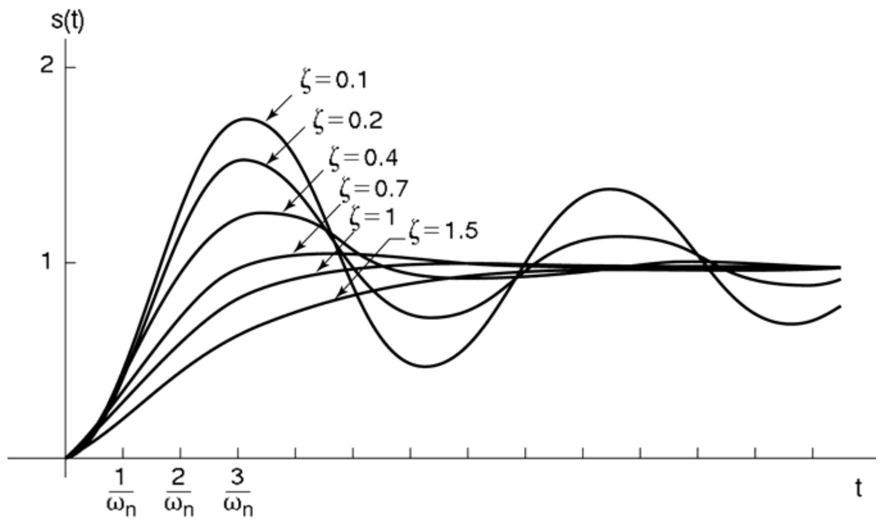
Parte superior plana cuando $\zeta = 1/\sqrt{2} = 0.707$

$\Rightarrow$ un LPF para $\omega < \omega_n$

Respuesta a impulso unitario y respuesta a escalón de un sistema de segundo orden

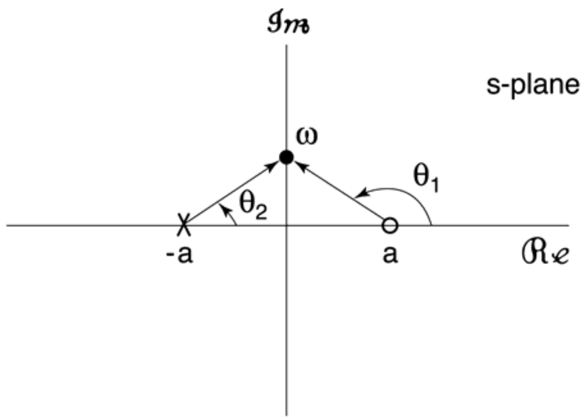


No se dan oscilaciones cuando $\zeta \geq 1$
$\Rightarrow$ Críticamente amortiguado (=) y sobreamortiguado (>).



Sistema paso-todo de primer orden

$$H(s) = \frac{s-a}{s+a}, \quad \Re e\{s\} > -a \quad (a > 0)$$



1. Dos vectores tienen las mismas longitudes
2. $$\begin{aligned} \angle H(j\omega) &= \theta_1 - \theta_2 \\ &= (\pi - \theta_2) - \theta_2 \\ &= \pi - 2\theta_2 \\ &= \begin{cases} \pi & \omega = 0 \\ \pi/2 & \omega = a \\ \backsim 0 & \omega >> a \end{cases} \end{aligned}$$