INSTITUTO TECNOLÓGICO DE MASSACHUSETTS
Departamento de Ingeniería Eléctrica e Informática

0.4pt0pt

6.003: Señales y sistemas—Otoño 2003

Prueba 1
Martes 14 de octubre de 2003

Instrucciones: El examen consta de 5 problemas (paginas 2-19) y de un espacio en blanco para trabajar (paginas 20 y 21). Asegúrese de que no le falta ninguna pagina. Al final de este cuadernillo se facilitan las tablas de las propiedades de las series de Fourier. **Escriba sus respuestas directamente en los espacios indicados en las páginas de este cuadernillo. No olvide escribir su nombre en todas y cada una de las páginas. HÁGALO AHORA**. Todos los y dibujos deben incluir las correspondientes leyendas. Salvo que se indique lo contrario, **debe razonar las respuestas**. Este es un examen a libro cerrado, aunque los estudiantes pueden utilizar una hoja 8 1/2 $\times$ 11 para consultas. No se autoriza el uso de calculadoras.

NOMBRE: SOLUCIONES_______________________________

Indique su sección	Sección	Hora	Profesor de la clase de repaso
☐	1	10-11	Prof. Zue
☐	2	11-12	Prof. Zue
☐	3	1- 2	Prof. Gray
☐	4	11-12	Dr. Rohrs
☐	5	12- 1	Prof. Voldman
☐	6	12- 1	Prof. Gray
☐	7	10-11	Dr. Rohrs
☐	8	11-12	Prof. Voldman

Le rogamos no escriba nada en esta hoja a partir de la línea, ya que el espacio está reservado para uso de los examinadores:

Problema	Nº de puntos	Puntuación	Examinad.
1	18		
2	20		
3	20		
4	21		
5	21		
Total	100		

PROBLEMA 1 (18%)

No es necesario añadir ninguna explicación para las preguntas de este problema.

Considere los tres sistemas siguientes:

SISTEMA A: $y(t) = x(t+2)\sin(\omega t + 2),$ where $\omega \neq 0$

SISTEMA B: $y[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \; (x[n]+1)$

SISTEMA C: $y[n] = \sum_{k=1}^{n} \left(x^2[k+1] - x[k]\right)$

donde x e y son la entrada y la salida, respectivamente, de cada uno de los sistemas.

Rodee la respuesta correcta, SÍ o NO, a las siguientes preguntas en el caso de los tres sistemas.

	SISTEMA A	SISTEMA B	SISTEMA C
¿Es lineal?	$\boxed{\text{SÍ}}$ NO	SÍ $\boxed{\text{NO}}$	SÍ $\boxed{\text{NO}}$
¿Es invariante en el tiempo?	SÍ $\boxed{\text{NO}}$	SÍ $\boxed{\text{NO}}$	SÍ $\boxed{\text{NO}}$
¿Es causal?	SÍ $\boxed{\text{NO}}$	$\boxed{\text{SÍ}}$ NO	SÍ $\boxed{\text{NO}}$
¿Es estable?	$\boxed{\text{SÍ}}$ NO	SÍ $\boxed{\text{NO}}$	SÍ $\boxed{\text{NO}}$

Página de trabajo para el problema 1
Linealidad

Sistema A: SÍ

$$\begin{aligned} x_1(t) \rightarrow y_1(t) &= x_1(t+2)sin(wt+2) \\ x_2(t) \rightarrow y_2(t) &= x_2(t+2)sin(wt+2) \\ x_3(t) = ax_1(t) + bx_2(t) \rightarrow y_3(t) &= x_3(t+2)sin(wt+2) \\ &= ax_1(t+2)sin(wt+2) + bx_2(t+2)sin(wt+2) \\ &= ay_1(t) + by_2(t) \end{aligned}$$

Sistema B: NO si $x[n] = 0$, entonces $y[n] \neq 0$

Sistema C: NO no es lineal debido al término $x\ [k+1]^2$.

Invariancia del tiempo

Sistema A: NO la salida tiene ganancia invariante en el tiempo

Sistema B: NO la salida tiene ganancia invariante en el tiempo

Sistema C: NO el número de términos sumados depende de n

Causalidad

Sistema A: NO $y(t)$ depende de $x(t+2)$

Sistema B: SÍ $y[n]$ depende solamente del valor actual de $x[n]$

Sistema C: NO $y[n]$ depende del valor futuro de $x[n]$

Estabilidad

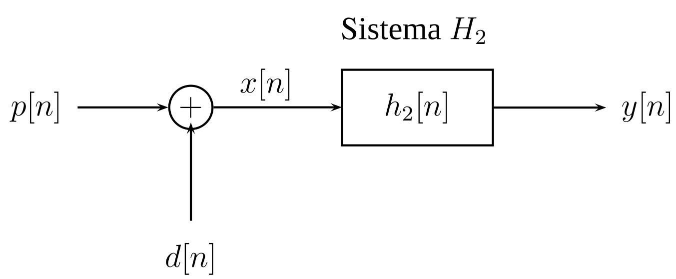
Sistema A: YES $x(t)$ acotado $\longrightarrow y(t)$ acotado

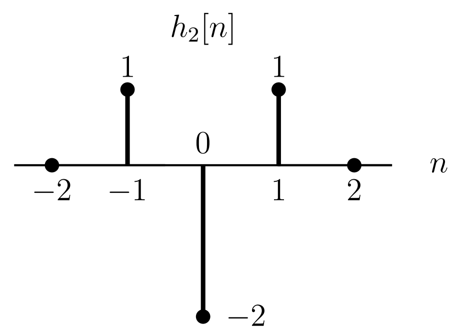
Sistema B: NO $(-\frac{1}{2})^n \longrightarrow \infty$ cuando $n \longrightarrow -\infty$

Sistema C: NO si $x[n] = -1 \longrightarrow y[n] = \sum_{k=1}^{n} 2$, $y \longrightarrow \infty$ cuando $n \longrightarrow \infty$

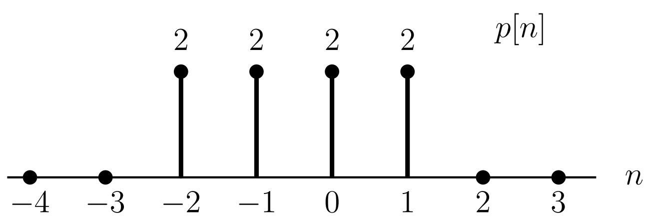
PROBLEMA 2 (20%)

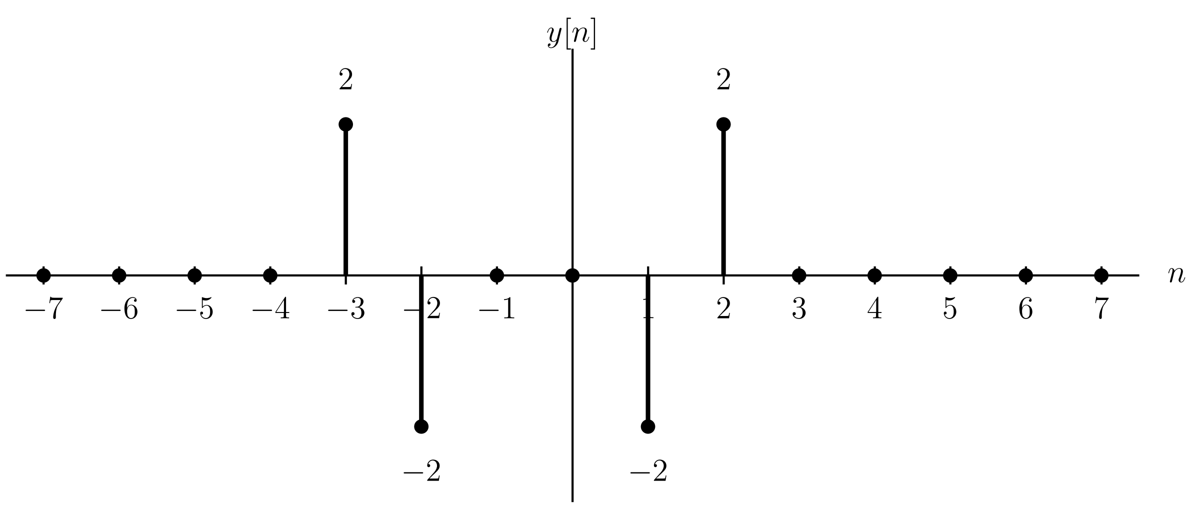
Considere un sistema LTI de DT, H_2 con respuesta de muestra unitaria $h_2[n] = h[n] * h[n+1]$, tal como se muestra más adelante, donde $h[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$. Recordará de una de las clases que $h[n]$ puede tratarse como la respuesta de muestra unitaria de un sistema LTI de DT que actúa como un detector de bordes. El objetivo de este problema es desarrollar un detector de bordes resistente contra el ruido aditivo.





Apartado a. Suponga que la entrada del sistema, $p[n]$ es la que se muestra a continuación, y que no existe ruido, es decir, $d[n] = 0$ y $p[n] = x[n]$. Realice un esquema etiquetado de $y[n]$, la salida del sistema.

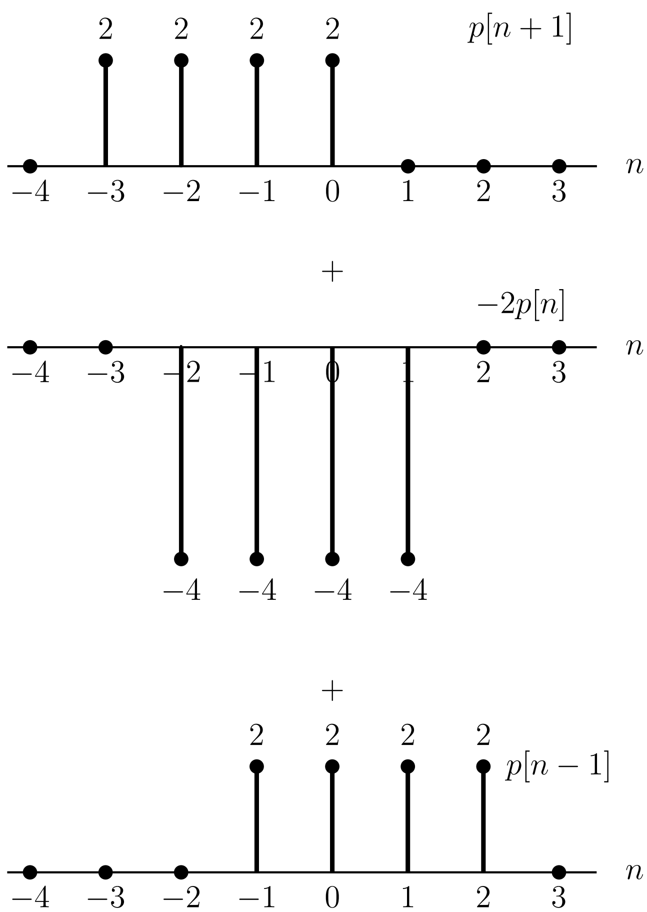




Página de trabajo para el problema 2

$x[n] = p[n]$, $\qquad y[n] = x[n] * h_2[n]$

Utilizando la suma de convolución de DT, $y[n]$ es la suma de 3 copias de $p[n]$ desplazadas y a escala según $h_2[n]$



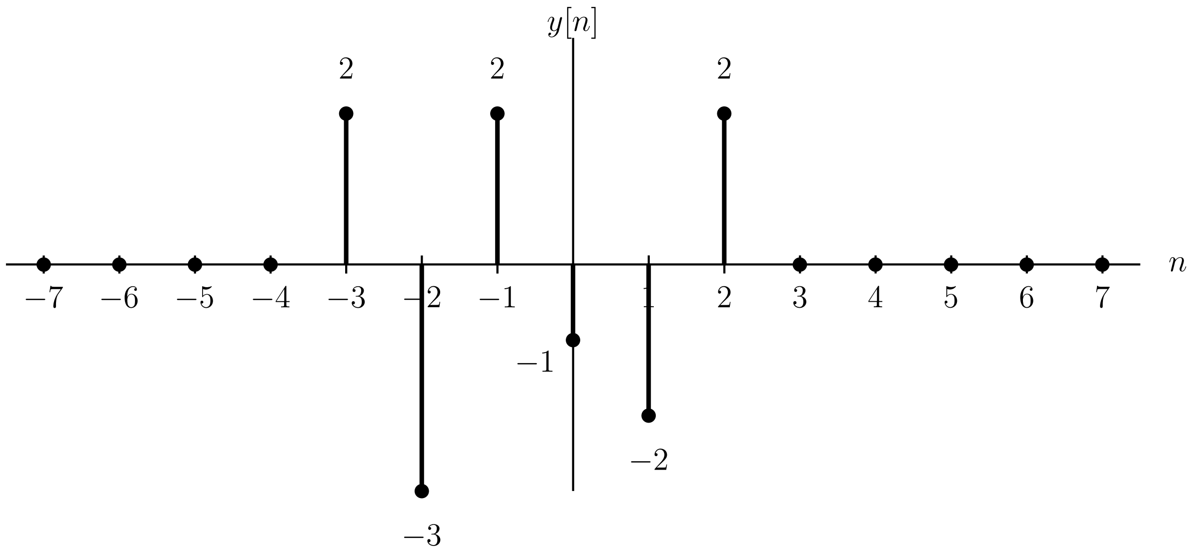
La $y[n]$ que resulta se muestra en la página 4.

 El problema 2 continua en la página siguiente.

Apartado b. Para la misma señal de entrada que en el **apartado a.**, suponga ahora que la señal de ruido es:

$$d[n] = -\delta[n+1].$$

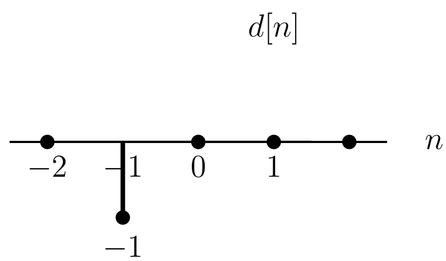
Realice un diagrama etiquetado de la salida $y[n]$, es decir, la respuesta a $x[n] = p[n] + d[n]$.

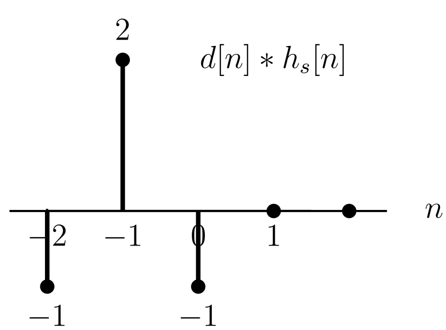


Página de trabajo para el problema 2

$$\begin{aligned} y[n] &= x[n] * h_2[n] \\ &= (p[n] + d[n]) * h_2[n] \\ &= (p[n] * h_2[n]) + (d[n] * h_2[n]) \end{aligned}$$

Ya hemos hallado $(p[n] * h_2[n])$ en el **apartado a**. Ahora necesitamos hallar $d[n] * h_2[n]$.

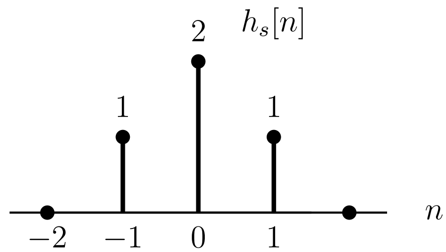


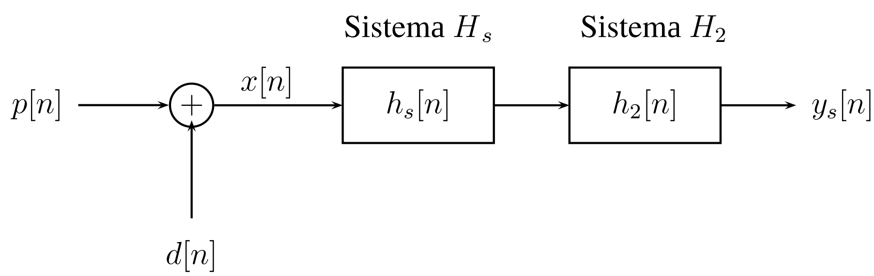


Si añadimos $(d[n] * h_2[n])$ a la respuesta del **apartado a**, obtenemos $y[n]$ para este apartado (se indica en la página 6).

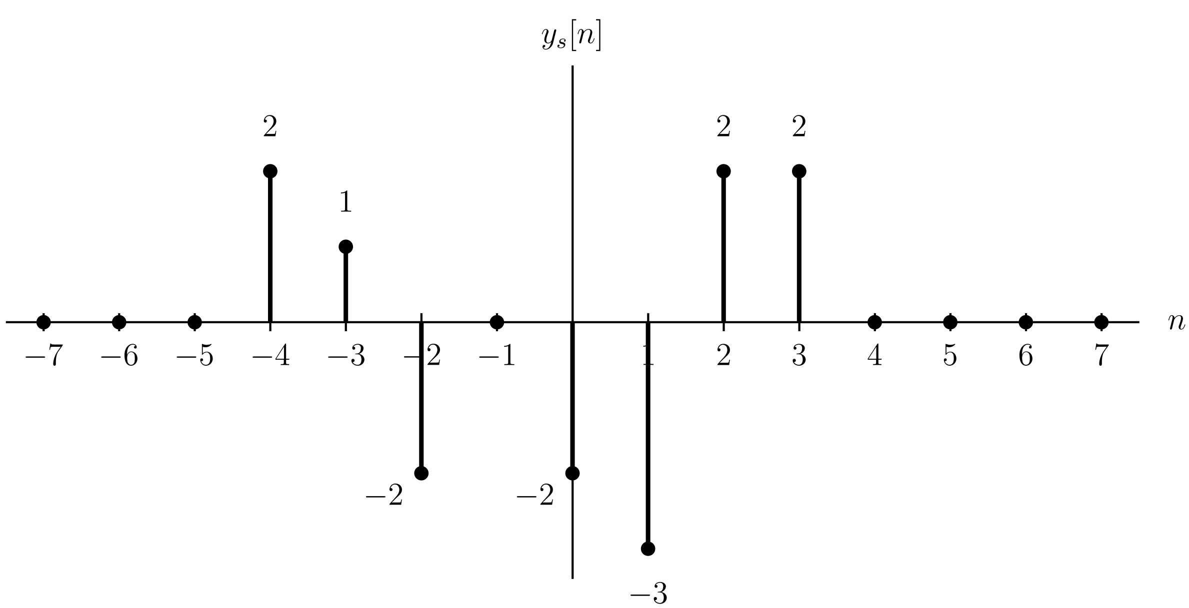
 El problema 2 continua en la página siguiente.

Apartado c. Para utilizar el sistema H_2 como parte de un detector de bordes, nos gustaría añadir un sistema LTI H_s cuya respuesta de muestra unitaria, $h_s[n]$, se indica a continuación. El sistema H_s resuelve el efecto del ruido en $x[n]$ y, en su conjunto, puede representarse de la forma siguiente:





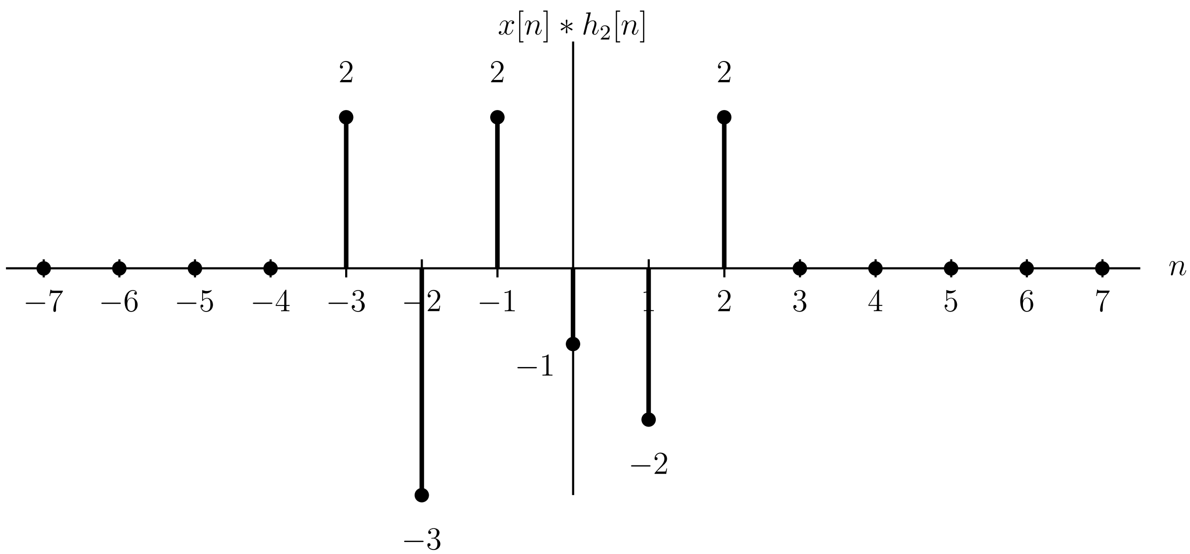
Realice un diagrama etiquetado de la salida global $y_s[n]$, cuando $p[n]$ y $d[n]$ son exactamente los mismos que en el **apartado b.**



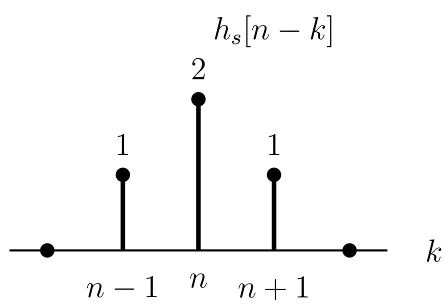
Página de trabajo para el problema 2

$$\begin{aligned} y_s[n] &= x[n] * h_s[n] * h_2[n] \\ &= (x[n] * h_2[n]) * h_s[n] \end{aligned}$$

$x[n] = p[n] + d[n]$ es tal como se define en el **apartado b**. Por tanto, ya sabemos que $(x[n] * h_2[n])$ (por ese apartado).



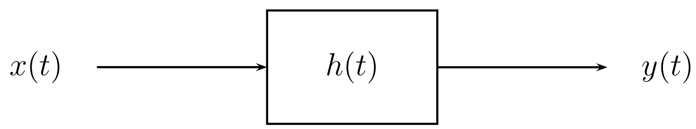
Ahora sólo necesitamos convolucionar la señal anterior con $h_s[n]$. Podemos realizar esta convolución invirtiendo y deslizando $h_s[n]$.

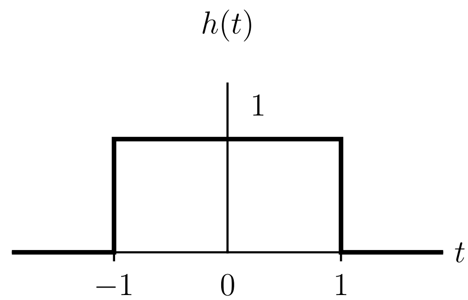


El resultado, que se indica en la página 8, es la $y_s[n]$ deseada.

PROBLEMA 3 (20%)

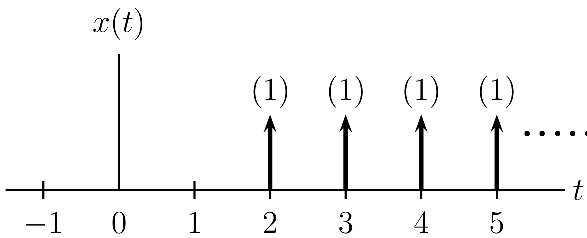
Considere el sistema LTI de CT cuya respuesta a impulso viene dada de la forma siguiente:



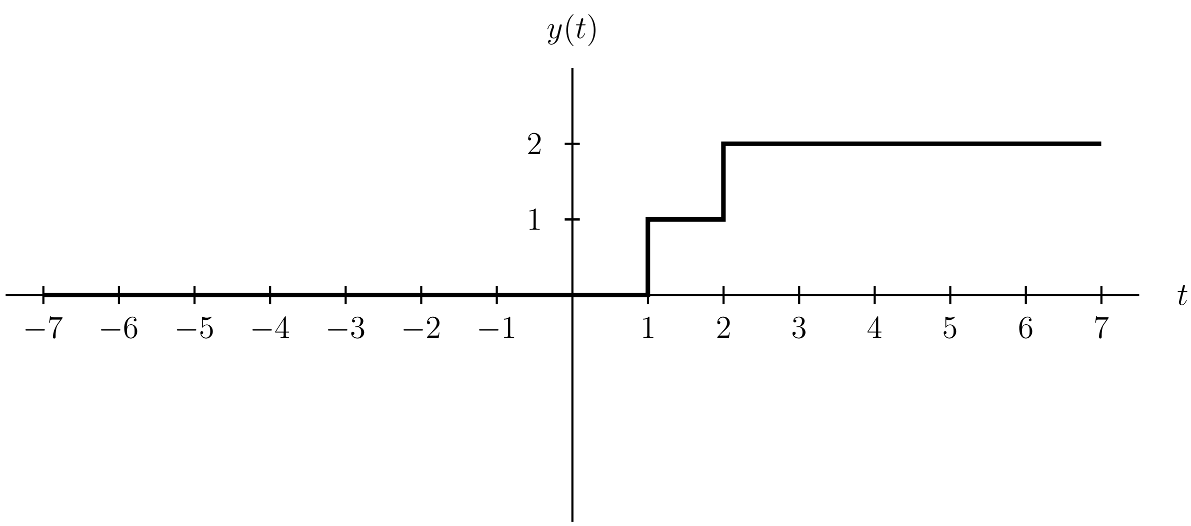


Los dos apartados siguientes pueden resolverse por separado.

Apartado a. La entrada $x(t)$ es un tren de impulsos que se inicia en $t = 2$, tal como se indica a continuación:

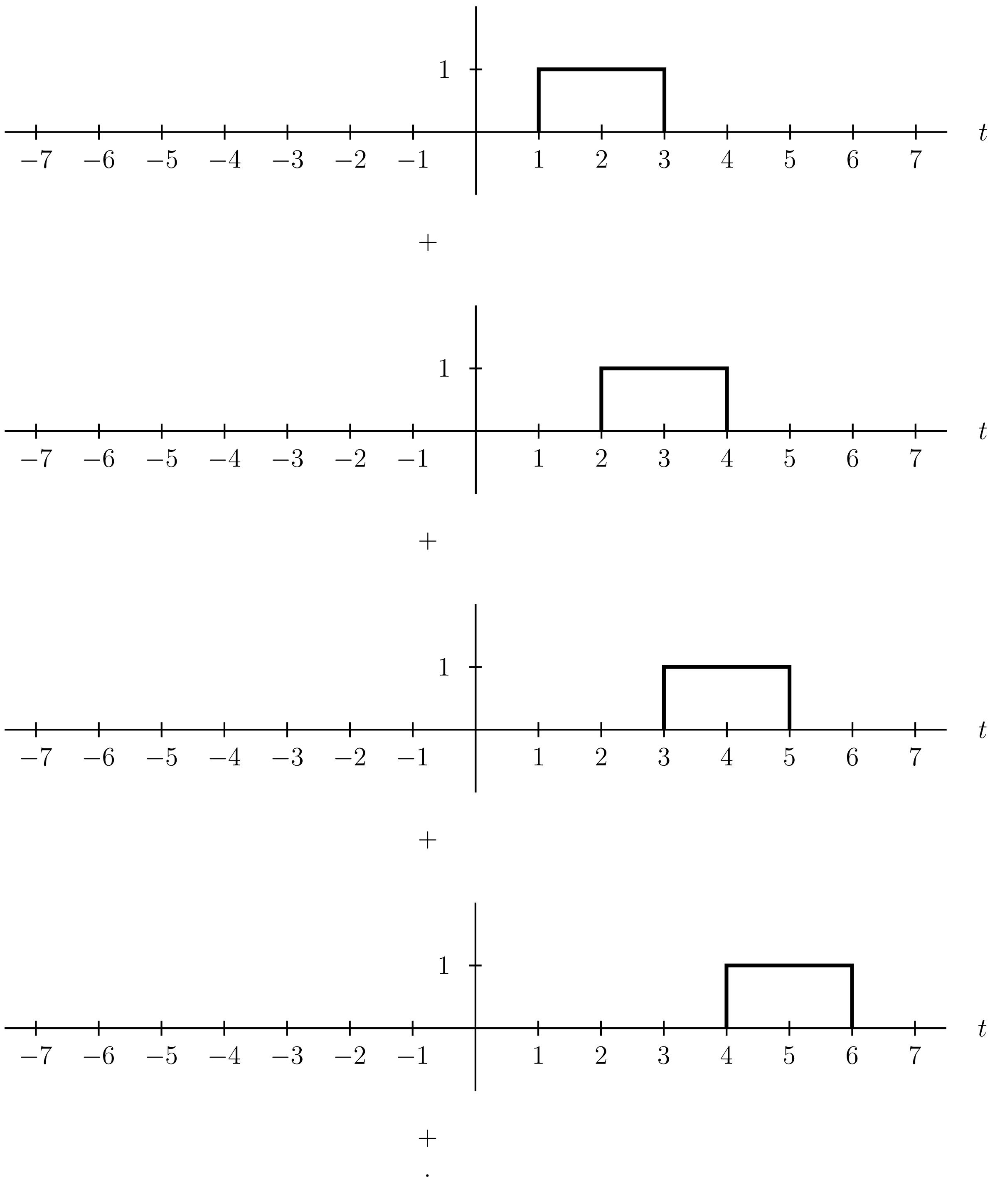


Realice un diagrama etiquetado de la salida correspondiente, $y(t)$.



Página de trabajo para el problema 3

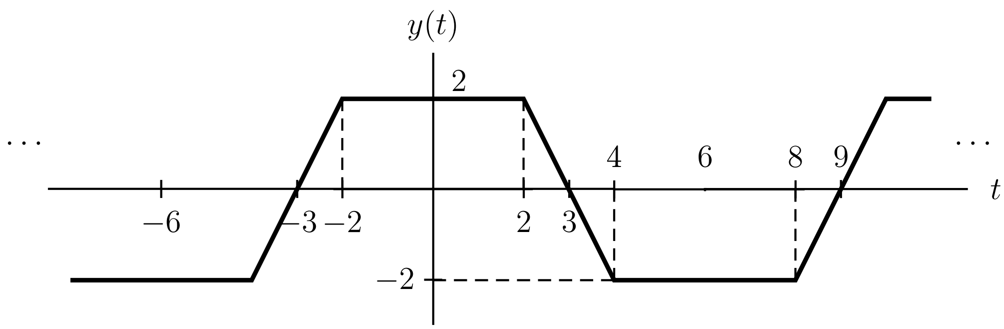
Utilizando la suma de convolución de CT (suma de la respuesta a impulso desplazado y escalado), podemos hallar $y(t)$.



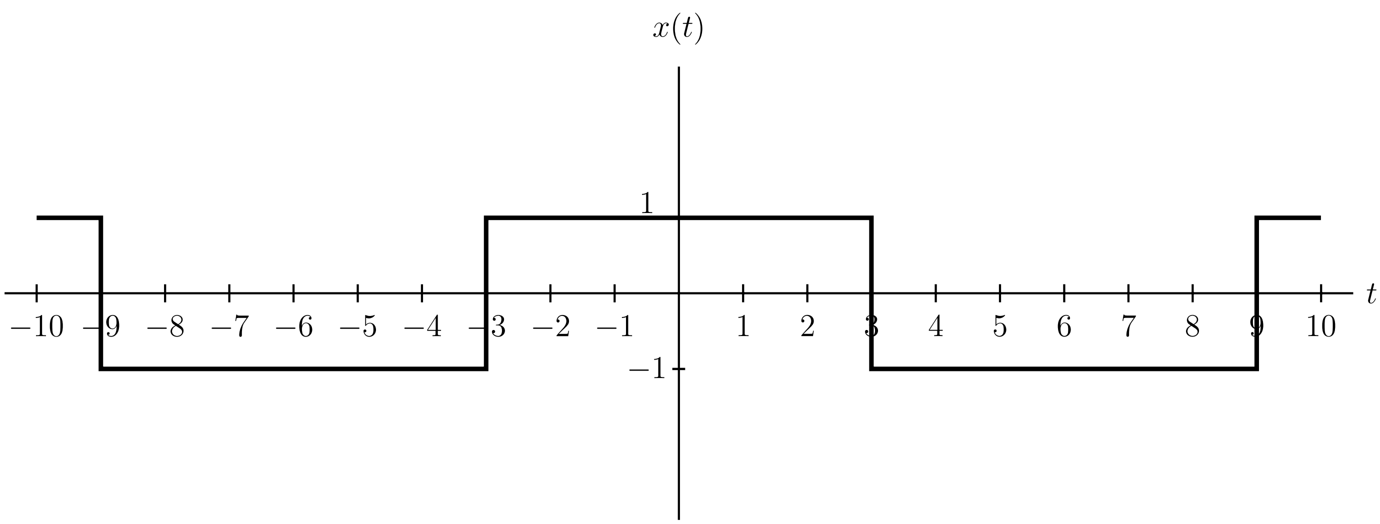
Si se añaden los impulsos escalados y desplazados, se obtiene $y(t)$, como se indica en la página 10.

 El problema 3 continua en la página siguiente.

Apartado b. En este apartado, la salida $y(t)$ es periódica, tal como se indica a continuación:

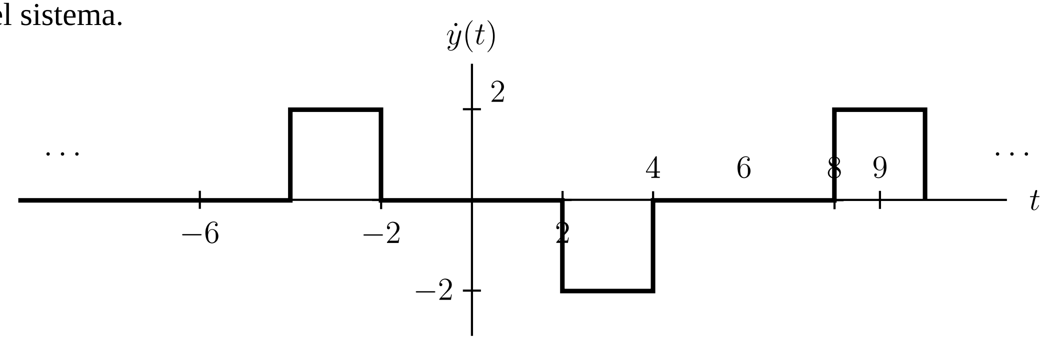


Realice un diagrama etiquetado de la entrada $x(t)$ que produce esta $y(t)$.

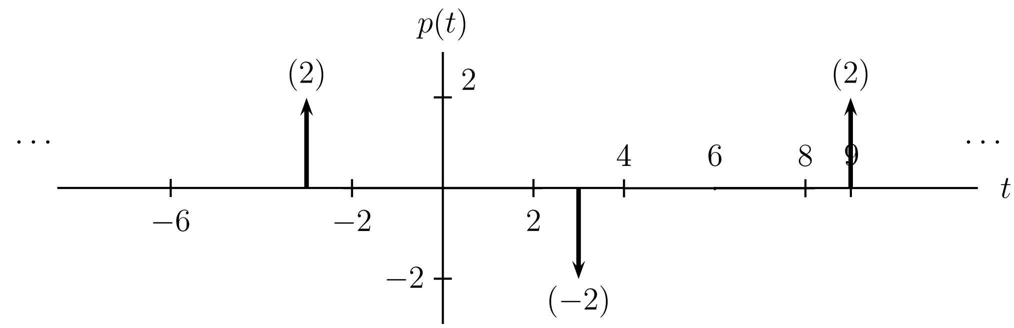


Página de trabajo para el problema 3

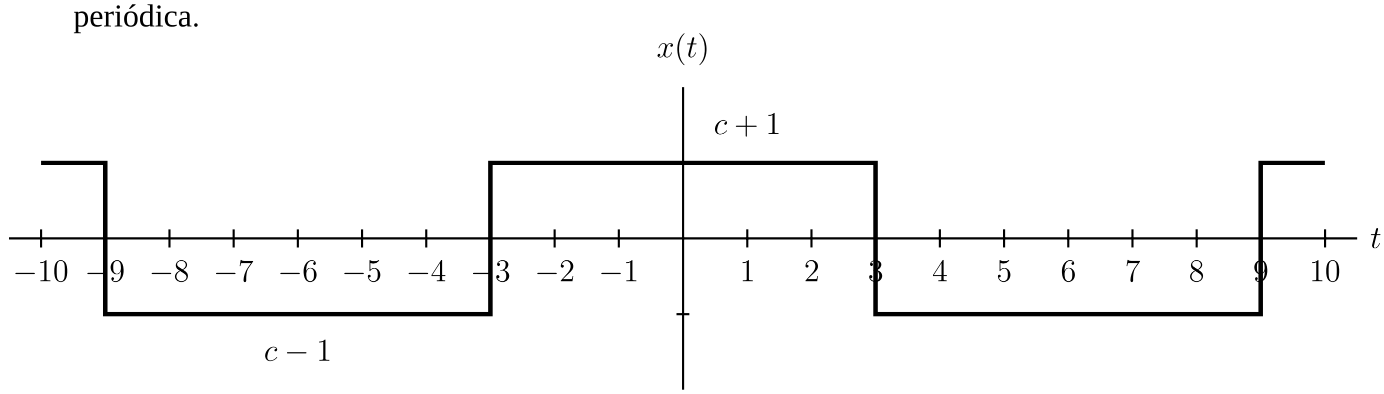
Existen distintas formas de resolver este problema, y aquí le indicamos una de ellas: Tomemos la derivada de la salida, $\frac{dy(t)}{dt}$, y relacionémosla con las respuesta a impulso del sistema.



Podemos observar que $\dot{y}(t)$ es la suma de un número de versiones escaladas y desplazadas de *h*(*t*). Podemos decir también que: $\dot{y}(t) = p(t) * h(t)$. A continuación se indica $p(t)$:



Sabemos que $y(t) = x(t) * h(t) \Rightarrow x(t) = u_{-1}(t) * p(t)$
$\Rightarrow x(t) = \int_{-\infty}^{t} p(v)dv = \hat{x}(t) + c$, donde la constante c restablece el nivel DC de la señal periódica.

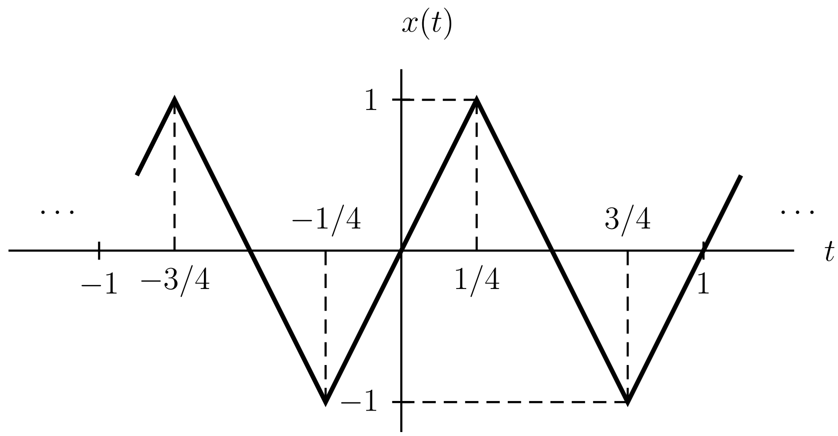


Para hallar el valor de la constante c, comparamos el valor de $y(0)$ con $x(t) * h(t)|_{t=0}$, es decir, el área situada por debajo de la curva de *x*(*t*)*h*(–*t*).

$$y(0) = 2 = x(t) * h(t)|_{t=0} = (1 + c)(2) = 2 \rightarrow c = 0.$$

PROBLEMA 4 (21%)

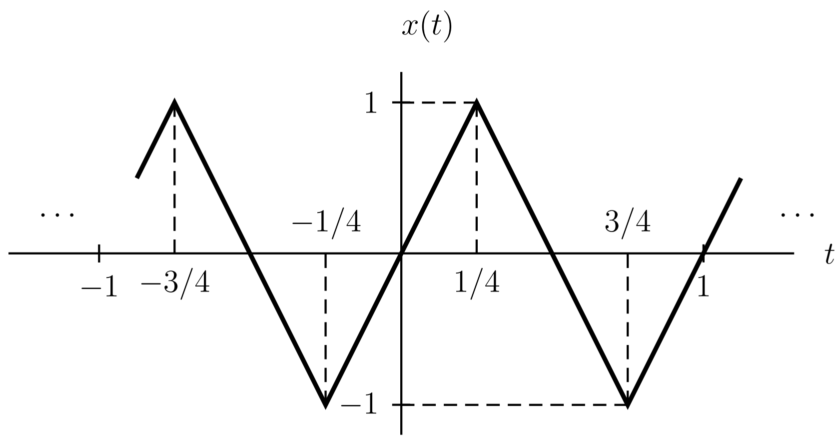
Considere la siguiente onda triangular periódica:



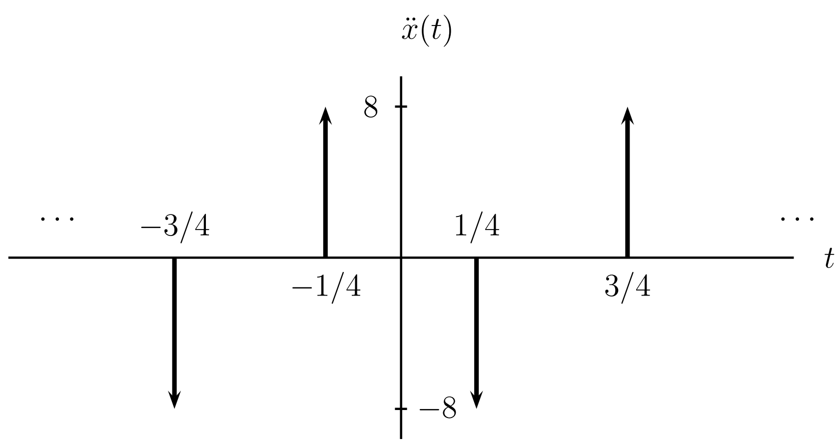
Apartado a. Determine los coeficientes de las series de Fourier, a_k para $x(t)$.

$$a_k = \begin{cases} 0, & k = 0 \\ \frac{-4j}{k^2\pi^2}\sin(k\frac{\pi}{2}), & k \neq 0 \end{cases}$$

Página de trabajo del problema 4



Periodo$= T = 1 \rightarrow \ \omega_0 = 2\pi/T = 2\pi$.
$a_0 = \frac{1}{T}\int_T x(t)dt = \frac{1}{T}$ (Área debajo de la curva para un periodo)=$\boxed{0 = a_0}$
Será complicado hallar $a_{k \neq 0}$ utilizando la ecuación de análisis. En su lugar, utilizaremos la propiedad de la integración de las series de Fourier.



Sea $\ddot{x}(t) \leftrightarrow b_k$

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{1}{T}\int_T \ddot{x}(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \int_{-1/2}^{1/2}\left[8\delta(t+1/4) - 8\delta(t-1/4)\right]e^{-jk\omega_0 t}dt \\
&= 8e^{-jk\omega_0(-1/4)} - 8e^{-jk\omega_0(1/4)} = 16j\sin(k\omega_0/4) \\
&= 16j\sin(k\frac{\pi}{2}). \\
a_k &= \frac{1}{(jk\omega_0)^2}b_k \quad \text{(propiedad de la integración)} \\
&= \frac{-16j}{k^2(2\pi)^2}\sin(k\frac{\pi}{2}) = \boxed{\frac{-4j}{k^2\pi^2}\sin(k\frac{\pi}{2}).}
\end{aligned}$$

Para una doble comprobación, observe que $a^*_{k-k} = a$, ya que $x(t)$ es real.

 El problema 4 continua en la página siguiente.

Apartado b. Considere un sistema LTI causal, S, cuya relación entrada-salida se caracteriza por la siguiente ecuación diferencial de coeficiente lineal constante y estable:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4\pi\frac{dy}{dt} + 4\pi^2 y(t) = 4\pi^2 x(t),$$

donde $x(t)$ e $y(t)$ son la entrada y la salida del sistema, respectivamente. Suponga que se aplica $x(t)$ de la página anterior al sistema S como una entrada. Sean b_k los coeficientes de Fourier de la salida correspondiente $y(t)$. Halle b_3 y b_{-3}.

$$b_3 = \frac{4j}{9\pi^2(-8+j6)} \qquad b_{-3} = \frac{4j}{9\pi^2(8+j6)}.$$

Página de trabajo para el problema 4

En primer lugar, hallamos $H(j\omega)$ examinando los coeficientes de la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4\pi\frac{dy}{dt} + 4\pi^2 y(t) = 4\pi^2 x(t),$$

$$H(j\omega) = \frac{4\pi^2}{(j\omega)^2 + 4\pi j\omega + 4\pi^2} = \frac{1}{1 + j\omega/\pi - \omega^2/4\pi^2}.$$

$\because b_k = a_k H(jk\omega_0)$, donde $\omega_0 = 2\pi$, por tanto:

$$\begin{aligned}
b_3 &= a_k H(jk\omega_0)\,|_{k=3} = a_3 H(j6\pi) \\
&= \left(\frac{-4j}{(3)^2\pi^2}\sin\left(3\frac{\pi}{2}\right)\right)\frac{1}{1 + j6\pi/\pi - (6\pi)^2/4\pi^2} = \frac{4j}{9\pi^2}\frac{1}{(1 + j6 - 9)} \\
b_3 &= \boxed{\frac{4j}{9\pi^2(-8+6j)}.} \\
b_{-3} &= b_3^* = \frac{-4j}{9\pi^2}\frac{1}{-8-6j} = \boxed{\frac{4j}{9\pi^2(8+6j)}.}
\end{aligned}$$

PROBLEMA 5 (21%)

Le facilitan la siguiente información sobre una secuencia en tiempo discreto $x[n]$:

(a) $x[n]$ es real e impar.

(b) $x[n]$ es periódico, con periodo $N = 6$.

(c) $\frac{1}{N} \sum_{n=<N>} |x[n]|^2 = 10$.

(d) $\sum_{n=<N>} (-1)^{n/3} x[n] = 6j$.

(e) $x[1] > 0$.

Halle una expresión de $x[n]$ en forma de senos y cosenos.

Existen dos posibles respuestas
(dependiendo de si se utilizó la condición (d) para hallar a_1 o a_{-1}):

$$x[n] = 4\sin(\tfrac{2\pi}{3}n) + 2\sin(\tfrac{\pi}{3}n)$$

or

$$x[n] = 4\sin(\tfrac{2\pi}{3}n) - 2\sin(\tfrac{\pi}{3}n)$$

Página de trabajo para el problema 5

Para hallar una expresión $x[n]$ en forma de senos y cosenos, primero necesitamos hallar a_k, los coeficientes de las series de Fourier de $x[n]$.

Aquí le mostraremos la información que puede obtener de los cinco puntos del problema 5:

(a) $x[n]$ es real e impar. $\Rightarrow a_k$ es imaginario e impar puro, y $\boxed{a_{-k} = a_k^*}$

$\because a_k$ es impar $\rightarrow \boxed{a_0 = 0}$

(b) $x[n]$ es periódico, con periodo $N = 6 \rightarrow \omega_0 = 2\pi/6 = \pi/3$.

$\because N = 6 \rightarrow a_k = a_{k+N} \rightarrow a_{-3} = a_3 \qquad (5.1)$

$\because a_k$ es impar $\rightarrow a_{-k} = -a_k \rightarrow a_{-3} = -a_3 \qquad (5.2)$

A partir de los puntos (5.1) y (5.2) , podemos concluir que $\boxed{a_{-3} = a_3 = 0}$.

Otro de los resultados que se puede concluir en este apartado es que a_k tiene sólo 6 valores característicos, por lo que los únicos valores que nos faltan por hallar son $a_{\pm 2}$ y $a_{\pm 1}$

(c) $\displaystyle \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} |x[n]|^2 = 10.$

Por el teorema de Perseval: $\displaystyle \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} |x[n]|^2 = \sum_{k=<N>} |a_k|^2$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow |a_{-2}|^2 + |a_{-1}|^2 + |a_0|^2 + |a_1|^2 + |a_2|^2 + |a_3|^2 &= 10 \\
|a_{-2}|^2 + |a_{-1}|^2 + |a_1|^2 + |a_2|^2 &= 10 \\
\because a_{-k} = a_k^* \Rightarrow 2|a_2|^2 + 2|a_1|^2 &= 10 \qquad (*)
\end{aligned}$$

(d) $\displaystyle \sum_{n=<N>} (-1)^{n/3} x[n] = 6j.$

Recordemos que $e^{\pm j\pi} = -1$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \sum_{n=<N>} (-1)^{n/3} x[n] &= \sum_{n=<N>} (e^{\pm j\pi})^{n/3} x[n] \\
&= \sum_{n=<N>} e^{\pm j\pi n/3} x[n] \\
&= N \left(\frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n]\, e^{-jk\omega_0 n} \right)_{k=\mp 1} \\
&= N a_{\mp 1} = 6 a_{\mp 1} = 6j
\end{aligned}$$

$\Rightarrow a_{\mp 1} = j$ y $a_{\pm 1} = -j \rightarrow \boxed{a_1 = \pm j \quad \text{y} \quad a_{-1} = \mp j}$

A partir de (*): $2|a_2|^2 + 2|a_1|^2 = 2|a_2|^2 + 2(1)^2 = 10 \Rightarrow \boxed{|a_2| = 2}$

(e) $x[1] > 0$.

$\because a_k$ es impar $\rightarrow a_{-k} =- a_k$.

$\because |a_2| = 2 \rightarrow a_2 = 2j \rightarrow a_{-2} = -2j$ o $a_2 = -2j \rightarrow a_{-2} = 2j$

Para determinar cuál de las anteriores afirmaciones es la correcta, designemos a p como la señal de a_2.

$\rightarrow a_2 = 2jp$, donde $p = 1$ si $a_2 = 2j$ y $p = -1$ si $a_2 = -2j$.

$$\begin{aligned}
x[n] &= \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\omega_0 n} \\
&= a_{-2}e^{j(-2)\omega_0 n} + a_{-1}e^{j(-1)\omega_0 n} + a_1 e^{j(1)\omega_0 n} + a_2 e^{j(2)\omega_0 n} \\
&= -a_2 e^{-j2\omega_0 n} - a_1 e^{-j\omega_0 n} + a_1 e^{j\omega_0 n} + a_2 e^{j2\omega_0 n} \\
&= a_2 e^{j2\omega_0 n} - a_2 e^{-j2\omega_0 n} + a_1 e^{j\omega_0 n} - a_1 e^{-j\omega_0 n} \\
&= a_2\left(e^{j2\omega_0 n} - e^{-j2\omega_0 n)}\right) + a_1\left(e^{j\omega_0 n} - e^{-j\omega_0 n}\right) \\
&= a_2(2j)\sin(2\omega_0 n) + a_1(2j)\sin(\omega_0 n) \\
&= (2jp)(2j)\sin(2\omega_0 n) + (\pm j)(2j)\sin(\omega_0 n) \\
&= -4p\sin(2\omega_0 n) \mp 2\sin(\omega_0 n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x[1] &= -4p\sin(2\omega_0) \mp 2\sin(\omega_0) = -4p\sin(2\pi/3) \mp 2\sin(\pi/3) \\
&= (-4p \mp 2)\frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

$\because x[1] > 0 \rightarrow -4p{\mp}2 > 0 \rightarrow p = -1$, a pesar de la señal utilizada en el segundo semestre.

$\Rightarrow \boxed{x[n] = 4\sin\left(\frac{2\pi}{3}n\right) \mp 2\sin\left(\frac{\pi}{3}n\right)}$

Página de trabajo

Página de trabajo