

6.003: Señales y sistemas — Otoño 2003

Soluciones del boletín de problemas 6

Distribución: 21 de octubre de 2003

Entrega: 29 de octubre de 2003

Ejercicio para el estudio en casa:

O&W, 6.49

Solución:

- (a) Para determinar las constantes de tiempo de la ecuación diferencial P6.49-1 en O&W, realizamos una transformada de Fourier de la ecuación. Por linealidad, la transformada de Fourier de la ecuación es la transformada de Fourier de cada uno de los términos individuales de la ecuación. Esto nos da:

$$\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{9}{(j\omega)^2 + 11(j\omega) + 10} = H(j\omega). \quad (1)$$

Las constantes de tiempo son los ceros del denominador ($c_1 = -1$ y $c_2 = -10$).

- (b) La ecuación 1 se puede describir de la forma siguiente:

$$H(j\omega) = \frac{9}{(j\omega + 1)(j\omega + 10)}. \quad (2)$$

Para que ésta sea una interconexión paralela de dos sistemas de primer orden, realizamos una expansión de fracción parcial en la ecuación 2 para hallar:

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 1} + \frac{-1}{j\omega + 10}. \quad (3)$$

Por linealidad, la transformada inversa de Fourier, $h(t)$, es una interconexión paralela de dos sistemas de primer orden. $h(t)$ es la suma de la transformada inversa de Fourier de cada término de la ecuación 3. Se puede determinar rápidamente cada término utilizando la tabla 4.2 de O&W. De este modo:

$$h(t) = e^{-t}u(t) - e^{-10t}u(t). \quad (4)$$

- (c) La constante de tiempo dominante de un sistema con múltiples exponenciales de decaimiento es la constante de tiempo que tarda más en desaparecer. Para este problema, la constante dominante de tiempo es $c_1 = -1$. Podemos aproximar esto a la ecuación 1 de la forma siguiente:

$$H(j\omega) = \frac{9}{(j\omega)^2 + 11(j\omega) + 10} \approx \frac{1}{j\omega + 1}. \quad (5)$$

Esta aproximación tiene una diferencia máxima del 10% en $\omega = 0$ la cual disminuye a medida que aumenta ω .

- (d) Queremos aproximar el componente más rápido de la ecuación 4 como un impulso con una altura igual a su valor final. A continuación, comprobaremos cómo afecta esta aproximación a todo $h(t)$ del sistema de segundo orden en conjunto.

El componente más rápido, $h_f(t) = -e^{-10t}u(t)$. $\hat{h}_f(t)$ denota la aproximación. Es necesario que para $\hat{h}_f(t) = s_f(\infty)\delta(t)$, determinemos $s_f(\infty)$. La respuesta a escalón viene definida como $s(t) = \int_{-\infty}^t h(t)dt$.

De modo que:

$$s_f(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} h_f(t)dt = \int_0^{\infty} -e^{-10t}dt = -\frac{1}{10}.$$

$\hat{h}_f(t) = -\frac{1}{10}\delta(t)$ y la aproximación al sistema global es:

$$\hat{h}(t) = \hat{h}_f(t) + h_s(t) = -\frac{1}{10}\delta(t) + e^{-t}u(t). \quad (6)$$

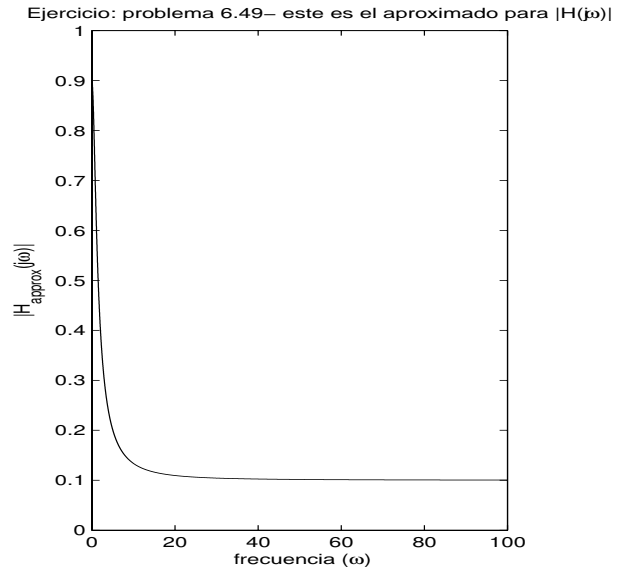
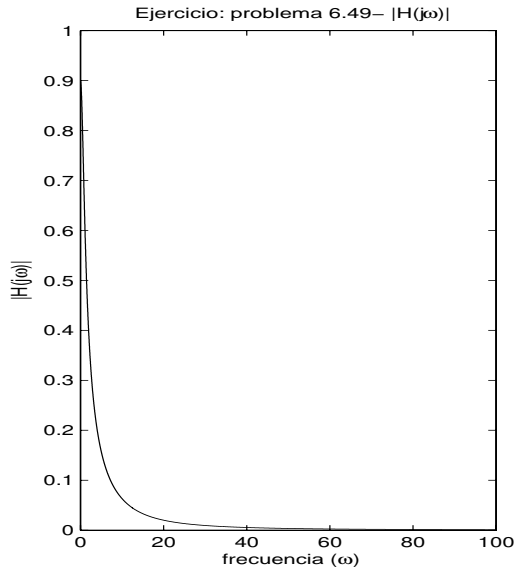
La ecuación 6 nos permite determinar la respuesta de frecuencia. Determinamos:

$$\hat{H}(j\omega) = -0.1 + \frac{1}{j\omega + 1} = \frac{-0.1j\omega + 0.9}{j\omega + 1}. \quad (7)$$

Después realizamos manipulaciones algebraicas y una transformada inversa de Fourier a la ecuación 7 para obtener la ecuación diferencial de la aproximación. Esto nos proporciona:

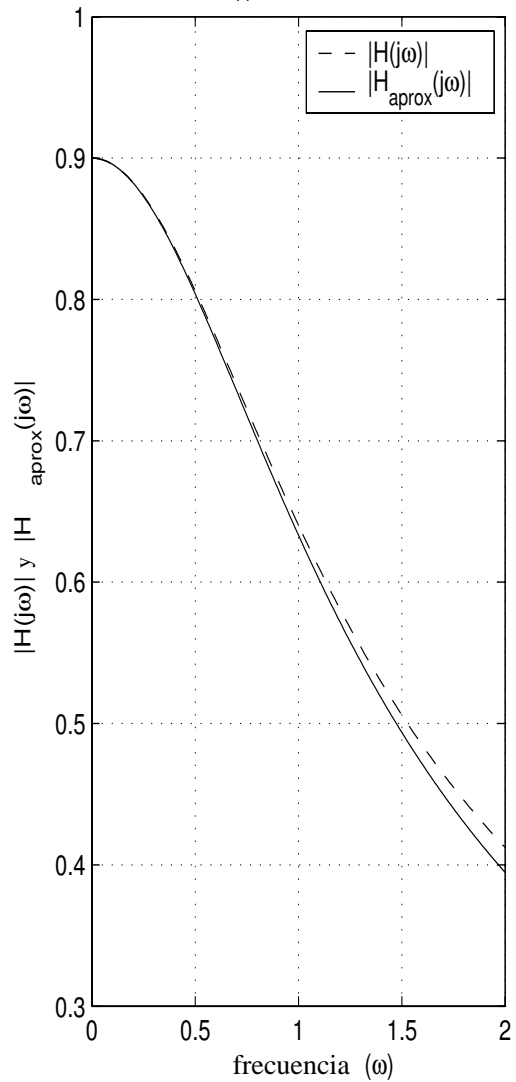
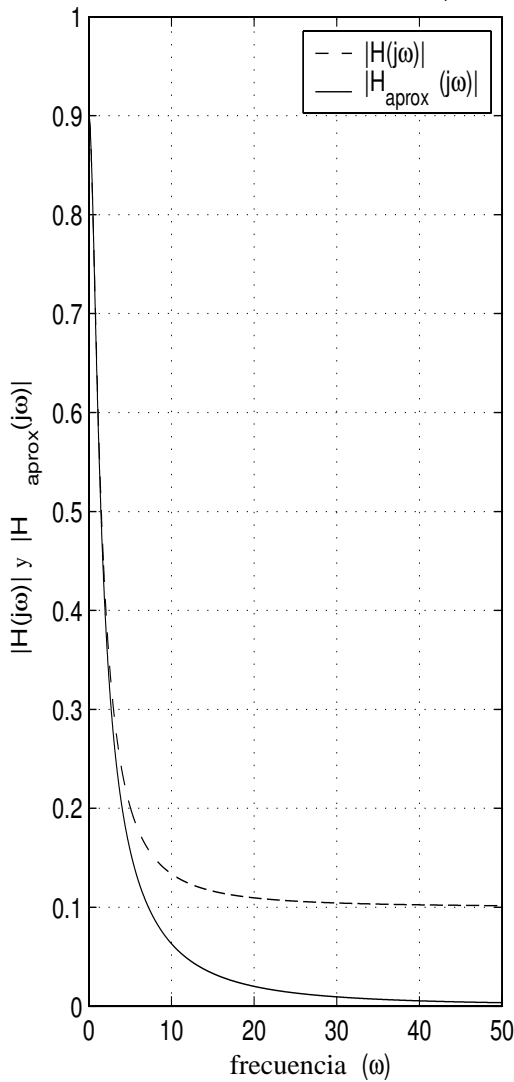
$$\frac{dy}{dt} + y(t) = 0.9x(t) - 0.1\frac{dx}{dt}.$$

La respuesta de frecuencia original, $H(j\omega)$ y la respuesta de frecuencia aproximada $\hat{H}(j\omega)$ se indican a continuación:



Más abajo se muestran las dos frecuencias en el mismo diagrama. El diagrama de $H(j\omega)$ es continuo y el de $\hat{H}(j\omega)$ de líneas discontinuas.

Ejercicio: problema 6.49- $|H(j\omega)|$ y $|H_{\text{aprox}}(j\omega)|$ Magnificación de $|H(j\omega)|$ y $|H_{\text{aprox}}(j\omega)|$ a bajas frecuencias



Por los gráficos anteriores, es evidente que para $\omega < 1$, $\hat{H}(j\omega)$ se aproxima bien a $H(j\omega)$. A medida que aumenta ω más allá de 1, los dos divergen de cada uno hasta que $\omega = 20$ aproximadamente. Esto se debe a que la aproximación a la parte rápida de la señal alcanza su valor final de forma instantánea, por lo que debe incluir todos los componentes de frecuencia rápida. Podemos comparar también la respuesta a escalón de la señal original, $s(t)$ con la respuesta a escalón de la señal aproximada, $\hat{s}(t)$.

$$s(t) = \int_{-\infty}^t h(t)dt \quad (8)$$

$$= \int_0^t e^{-t}dt - \int_0^t e^{-10t}dt \quad (9)$$

$$= (0.9 - e^{-t} + 0.1e^{-10t})u(t). \quad (10)$$

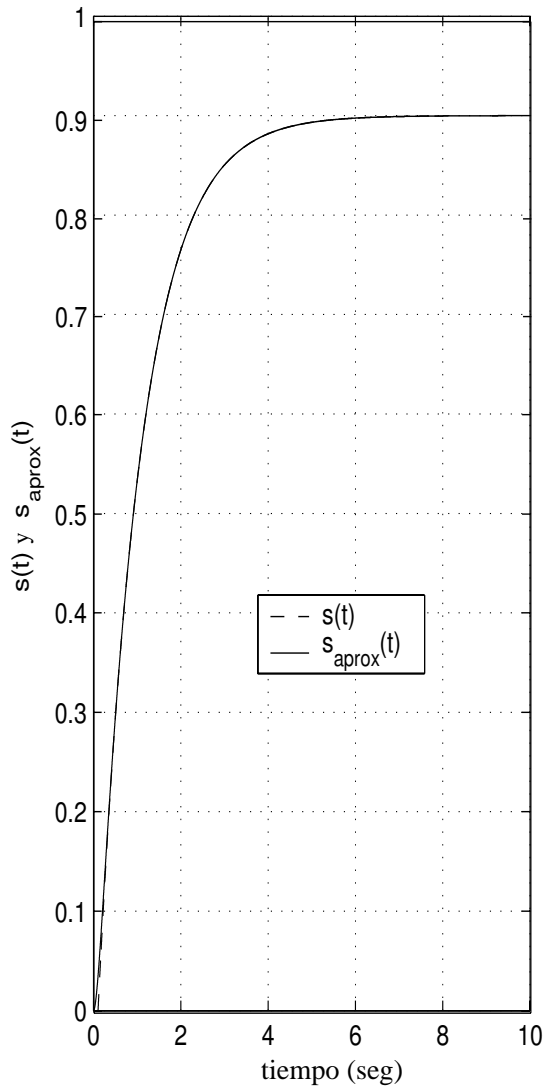
$$\hat{s}(t) = \int_{-\infty}^t \hat{h}(t)dt \quad (11)$$

$$= \int_0^t e^{-t}dt - \int_0^t (-0.1)\delta(t)dt \quad (12)$$

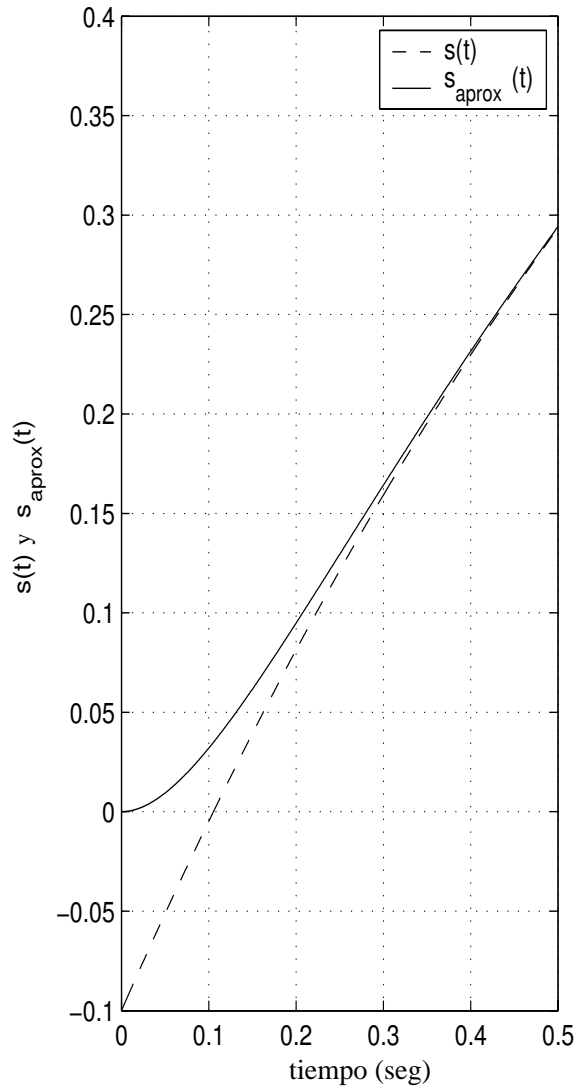
$$= (0.9 - e^{-t})u(t). \quad (13)$$

Más adelante se trazan juntas las dos respuestas a escalón:

Ejercicio: problema 6.49- $s(t)$ y $s_{\text{aprox}}(t)$



Magnificación de $s(t)$ y $s_{\text{aprox}}(t)$



Por los gráficos anteriores, es evidente que para $t > 0.5$ segundos, las dos respuestas a escalón son casi iguales. Además, una regla general dice que un exponencial casi alcanza su valor final después de 5 constantes de tiempo. De modo que para $e^{-10t}u(t)$, debería alcanzar casi su valor final por $t = 0.5$ segundos.

Problemas para entregar:

Problema 1 O&W, 4.35

Solución:

- (a) Necesitamos hallar la magnitud, la fase y la respuesta a impulsos del sistema LTI en tiempo continuo con la siguiente respuesta de frecuencia:

$$H(j\omega) = \frac{a - j\omega}{a + j\omega}.$$

Si determinamos la magnitud:

$$|H(j\omega)| = \frac{\sqrt{a^2 + \omega^2}}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} = 1.$$

Si determinamos la fase:

$$e^{j\angle H(j\omega)} = \frac{e^{-j \arctan \frac{\omega}{a}}}{e^{j \arctan \frac{\omega}{a}}} = e^{-2j \arctan \frac{\omega}{a}}.$$

Si determinamos la respuesta a impulsos:

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(j\omega)\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{a}{a + j\omega}\right\} + \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{-j\omega}{a + j\omega}\right\} = h_1(t) + h_2(t).$$

En la tabla 4.2, $h_1(t) = ae^{-at}u(t)$. Para determinar $h_2(t)$, realizamos lo siguiente:

$$h_2(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{-j\omega}{a + j\omega}\right\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{-\frac{1}{a}(j\omega)H_1(j\omega)\right\} = -\frac{1}{a} \frac{dh_1(t)}{dt}.$$

Utilizamos la regla del producto,

$$\frac{dh_1(t)}{dt} = ae^{-at}\delta(t) - a^2e^{-at}u(t).$$

De modo que, $h_2(t) = -e^{-at}\delta(t) + ae^{-at}u(t)$. Si combinamos $h_1(t)$ y $h_2(t)$ obtenemos:

$$h(t) = 2ae^{-at}u(t) - e^{-at}\delta(t).$$

También podemos realizar una expansión de fracción parcial de $H(j\omega)$:

$$H(j\omega) = \frac{2a}{j\omega + a} - 1.$$

A continuación, se puede hallar $h(t)$ buscando cada uno de los términos anteriores en las tablas para obtener el mismo resultado $h(t) = 2ae^{-at}u(t) - e^{-at}\delta(t)$.

- (b) Necesitamos determinar $y(t)$ cuando $a = 1$ y $x(t) = \cos(t/\sqrt{3}) + \cos(t) + \cos(\sqrt{3}t)$. Podemos utilizar la propiedad de la convolución, $Y(j\omega) = X(j\omega) \times H(j\omega)$. Tenemos $H(j\omega)$, necesitamos determinar $X(j\omega)$.

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \pi\left[\delta\left(\omega - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \delta\left(\omega + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \delta(\omega - 1) + \delta(\omega + 1)\right. \\ &\quad \left.+ \delta(\omega - \sqrt{3}) + \delta(\omega + \sqrt{3})\right] \end{aligned} \tag{14}$$

$$= \pi[X_a(j\omega) + X_b(j\omega) + X_c(j\omega)]. \tag{15}$$

Dado que contamos con un sistema LTI, podemos escribir la salida como la suma de los tres términos,

$$Y(j\omega) = Y_a(j\omega) + Y_b(j\omega) + Y_c(j\omega), \quad (16)$$

donde el primer término se define como:

$$Y_a(j\omega) = H(j\omega)X_a(j\omega) \quad (17)$$

$$= \left(\frac{a - j\omega}{a + j\omega} \right) \pi X_a(j\omega) \quad (18)$$

$$= e^{-2j \tan^{-1} \frac{\omega}{a}} \pi X_a(j\omega) \quad (19)$$

$$= \pi e^{-2j \arctan \frac{\omega}{a}} \delta\left(\omega - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \pi e^{-2j \arctan \frac{\omega}{a}} \delta\left(\omega + \frac{1}{\sqrt{3}}\right). \quad (20)$$

A continuación sustituimos $a = 1$ en $Y_a(j\omega)$. Además, dado que $X_a(j\omega)$ es la suma de dos funciones delta, podemos sustituir $\omega = \frac{1}{\sqrt{3}}$ en el término de la arcotangente en el primer término δ de $Y_a(j\omega)$, y $\omega = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ en el término de la arcotangente para el segundo término δ de $Y_a(j\omega)$. Esto nos proporciona:

$$Y_a(j\omega) = \pi e^{-j\frac{\pi}{3}} \delta\left(\omega - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \pi e^{j\frac{\pi}{3}} \delta\left(\omega + \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Ahora se identifica esto como una función de coseno en el dominio del tiempo con un cambio de fase de $\frac{\pi}{3}$. Por lo tanto:

$$y_a(t) = \cos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}t - \frac{\pi}{3}\right).$$

Los otros términos, $Y_b(j\omega)$ y $Y_c(j\omega)$, se pueden resolver de forma similar para que proporcionen funciones de coseno con varios cambios de fase. Así obtenemos:

$$Y_b(j\omega) = \pi e^{-j\frac{\pi}{2}} \delta(\omega - 1) + \pi e^{j\frac{\pi}{2}} \delta(\omega + 1). \quad (21)$$

$$y_b(t) = \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(t). \quad (22)$$

$$Y_c(j\omega) = \pi e^{-j\frac{2\pi}{3}} \delta(\omega - \sqrt{3}) + \pi e^{j\frac{2\pi}{3}} \delta(\omega + \sqrt{3}). \quad (23)$$

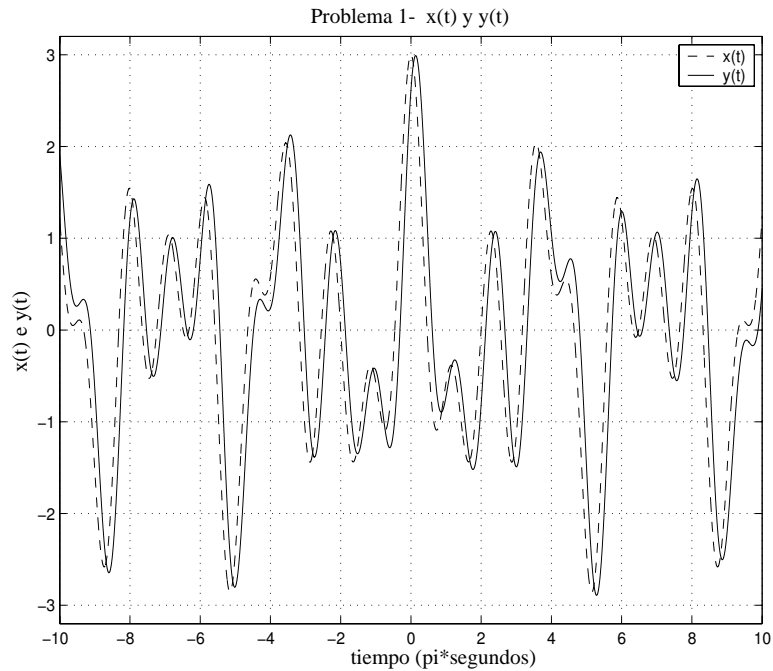
$$y_c(t) = \cos\left(\sqrt{3}t - \frac{2\pi}{3}\right). \quad (24)$$

Si sumamos todos los términos:

$$y(t) = \cos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}t - \frac{\pi}{3}\right) + \sin(t) + \cos\left(\sqrt{3}t - \frac{2\pi}{3}\right).$$

Estas dos funciones no periódicas, $y(t)$ y $x(t)$ se trazan juntas más adelante. ¿Por qué son no periódicas? Porque los tres periodos que se suman para formar la función son tres números racionales distintos

y, por lo tanto, no hallaremos ningún número racional, T , donde cada uno de los términos tenga un número entero de formas de onda en ese T . El periodo del primer término es $T_a = 2\pi\sqrt{3}$, el periodo del segundo término $T_b = 2\pi$, y el del último término es $T_c = 2\pi\frac{1}{\sqrt{3}}$.



Problema 2 O&W, 6.28 (a)-(iii) y (v)

Solución:

(a)-(iii) Para dibujar la respuesta de frecuencia de $H(j\omega) = \frac{16}{(j\omega+2)^4}$, admitimos que esta es una cascada de 4 sistemas de primer orden idénticos. Su magnitud, $|H(j\omega)|$ se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
 |H(j\omega)| &= |H_1(j\omega)^4| = \left| \left(\frac{1}{0.5j\omega + 1} \right) \left(\frac{1}{0.5j\omega + 1} \right) \left(\frac{1}{0.5j\omega + 1} \right) \left(\frac{1}{0.5j\omega + 1} \right) \right| \\
 &= \left(\frac{1}{\sqrt{1 + 0.25\omega^2}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{1 + 0.25\omega^2}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{1 + 0.25\omega^2}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{1 + 0.25\omega^2}} \right)
 \end{aligned}$$

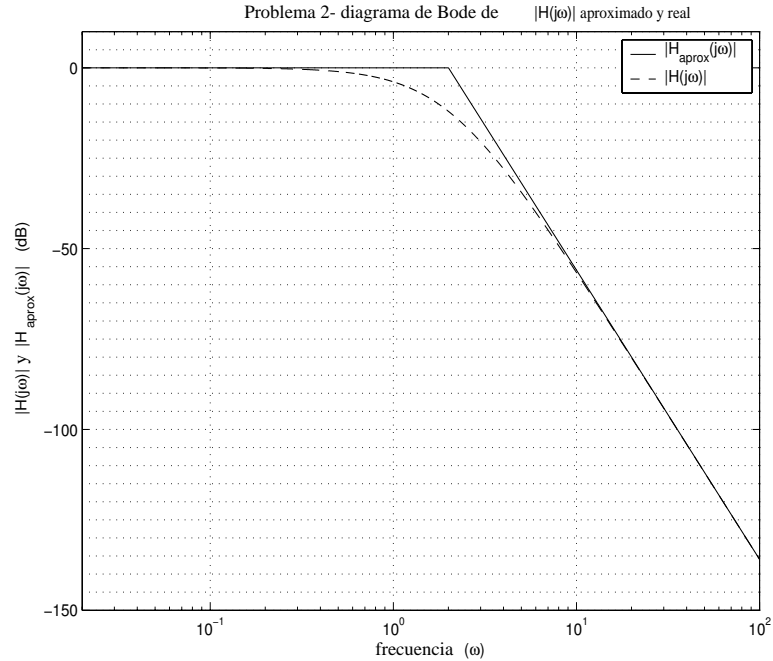
Dado que tenemos un sistema LTI, el diagrama de Bode de la cascada de los 4 sistemas de primer orden idénticos es igual a la suma de los diagramas de Bode para cada sistema de primer orden. El sistema de primer orden, $20 \log |H_1(j\omega)| = -10 \log(1 + 0.25\omega^2)$ tiene el siguiente diagrama:

$$-10 \log(1 + 0.25\omega^2) \approx \begin{cases} 0 & \text{para } \omega \ll 2 \\ -20 \log(0.5\omega) & \text{para } \omega \gg 2 \end{cases} \quad (25)$$

Por tanto, el diagrama de Bode de la cascada de los 4 sistemas de primer orden es el siguiente:

$$|H(j\omega)| \approx \begin{cases} 0 & \text{para } \omega \ll 2 \\ -80 \log(0.5\omega) & \text{para } \omega \gg 2 \end{cases} \quad (26)$$

El siguiente gráfico representa el diagrama. Las dos aproximaciones en línea recta se cortan en $\omega = 2$. La línea continua es la aproximación para $|H(j\omega)|$ y la línea discontinua es $|H(j\omega)|$ real.



Por el gráfico, podemos ver y calcular que en $\omega = 2$, la magnitud actual es $|H(j\omega) = -40 \log(1 + 0.25 * 2^2) = -40 \log(2) = -12$ dB.

Después se determina y dibuja la fase. Si expresamos de nuevo la función como la cascada de 4 funciones de primer orden idénticas, obtenemos lo siguiente:

$$e^{j\angle H(j\omega)} = \left(\frac{e^{j \tan^{-1}(0)}}{e^{j \tan^{-1} \frac{\omega}{2}}} \right) \left(\frac{e^{j \tan^{-1}(0)}}{e^{j \tan^{-1} \frac{\omega}{2}}} \right) \left(\frac{e^{j \tan^{-1}(0)}}{e^{j \tan^{-1} \frac{\omega}{2}}} \right) \left(\frac{e^{j \tan^{-1}(0)}}{e^{j \tan^{-1} \frac{\omega}{2}}} \right) = e^{-4j \tan^{-1} \frac{\omega}{2}}.$$

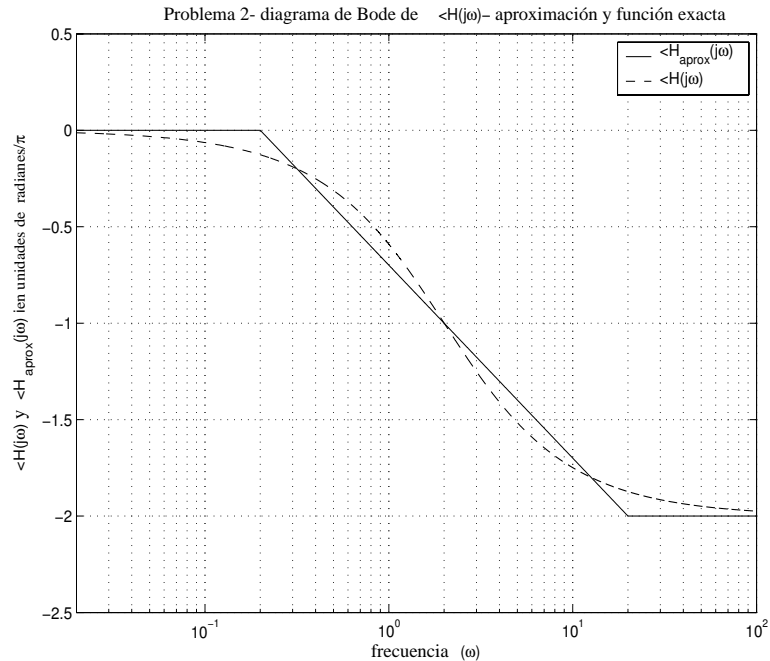
Para trazar esto, podemos trazar cada uno de los diagramas de fase de primer orden y, a continuación, sumarlos para obtener el diagrama final de cuarto orden. Para el diagrama de fase de primer orden y realizando aproximaciones en línea recta tenemos:

$$\angle H(j\omega) \approx \begin{cases} 0 & \text{for } \omega \leq 0.2 \\ -\frac{\pi}{4}(\log(\frac{\omega}{2}) + 1) & \text{for } 0.2 < \omega < 20 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{for } \omega \geq 20 \end{cases} \quad (27)$$

Si sumamos este mismo diagrama cuatro veces, obtenemos las características globales del diagrama de fase,

$$\angle H(j\omega) \approx \begin{cases} 0 & \text{para } \omega \leq 0.2 \\ -\pi(\log(\frac{\omega}{2}) + 1) & \text{para } 0.2 < \omega < 20 \\ -2\pi & \text{para } \omega \geq 20 \end{cases} \quad (28)$$

En el siguiente gráfico se ha trazado la aproximación junto con la función exacta. Esta función exacta, $\angle H(j\omega)$ se presenta como una línea discontinua y la aproximación como una línea sólida o continua.



- (a)-(v) Para trazar los diagramas de Bode, desglosamos de nuevo la función en sus sistemas de primer orden, hallamos el diagrama de bode de cada uno de esos sistemas y, a continuación, añadimos los dos diagramas juntos para obtener el diagrama global. Necesitamos determinar la magnitud y la fase de la función:

$$H(j\omega) = \frac{\frac{j\omega}{10} - 1}{1 + j\omega}$$

La magnitud se halla dividiendo la magnitud del numerador por la del denominador:

$$|H(j\omega)| = \frac{\sqrt{0.01\omega^2 + 1}}{\sqrt{\omega^2 + 1}}$$

Por tanto, el logaritmo de $|H(j\omega)|$ es:

$$20 \log |H(j\omega)| = 10 \log (0.01\omega^2 + 1) - 10 \log (\omega^2 + 1) \quad (29)$$

$$= 20 \log |H_1(j\omega)| + 20 \log |H_2(j\omega)|$$

Para trazar $20 \log |H(j\omega)|$ determinamos el diagrama de Bode de cada término de la ecuación 29 y, a continuación, unimos los dos diagramas para obtener el diagrama de Bode para la magnitud de $|H(j\omega)|$.

$$20 \log |H_1(j\omega)| \approx \begin{cases} 10 \log 1 = 0 & \text{para } \omega \ll 10 \\ 20 \log \omega - 20 \log 10 & \text{para } \omega \gg 10 \end{cases} \quad (30)$$

$$20 \log |H_2(j\omega)| \approx \begin{cases} -10 \log 1 = 0 & \text{para } \omega \ll 1 \\ -20 \log \omega & \text{para } \omega \gg 1 \end{cases} \quad (31)$$

Los diagramas de Bode para los dos términos se presentan más adelante por separado. A continuación de los dos diagramas se presenta uno correspondiente a la suma de los dos anteriores para obtener, así, el diagrama de Bode para la magnitud de $H(j\omega)$.

Prob 2(v)- diagrama de Bode de $|H_1(j\omega)|$ aproximado y exacto

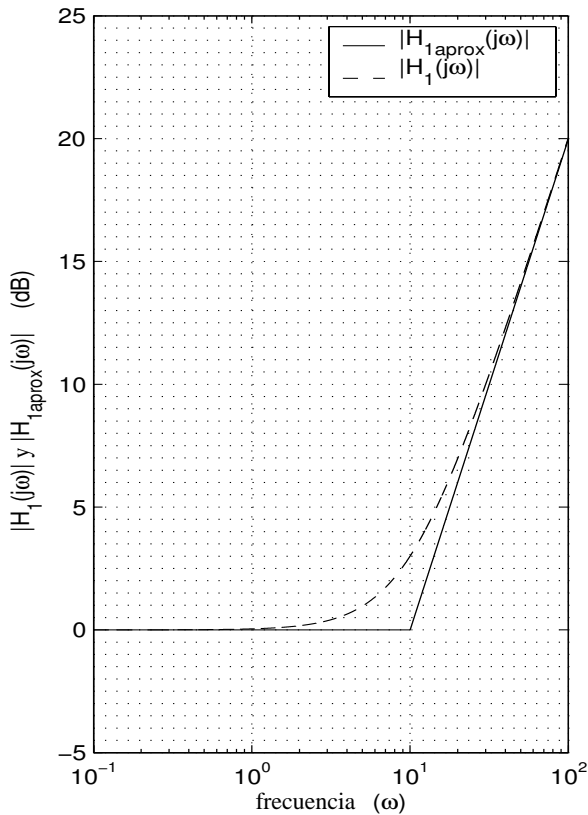
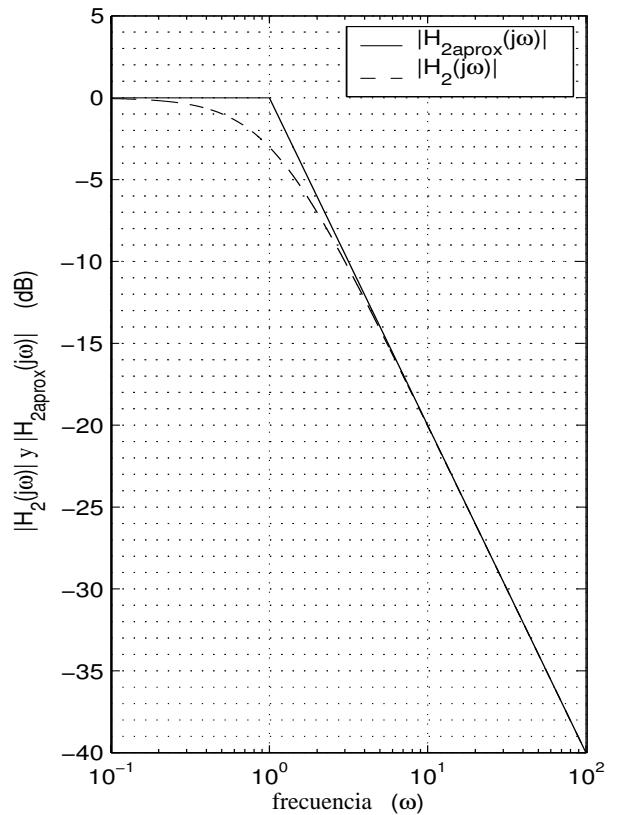
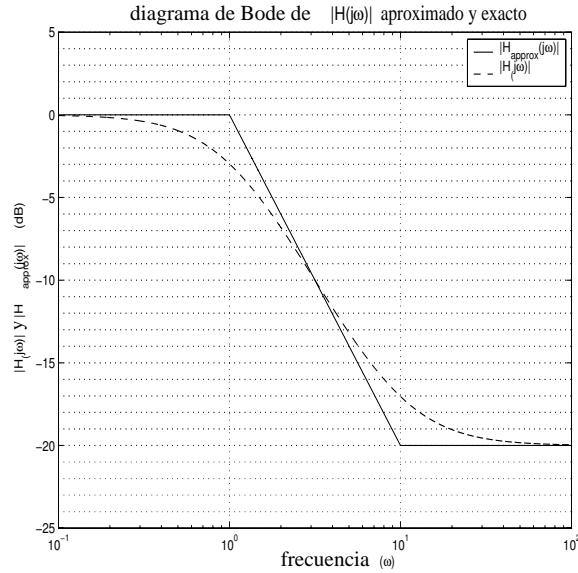


Diagrama de Bode de $|H_2(j\omega)|$ aproximado y exacto

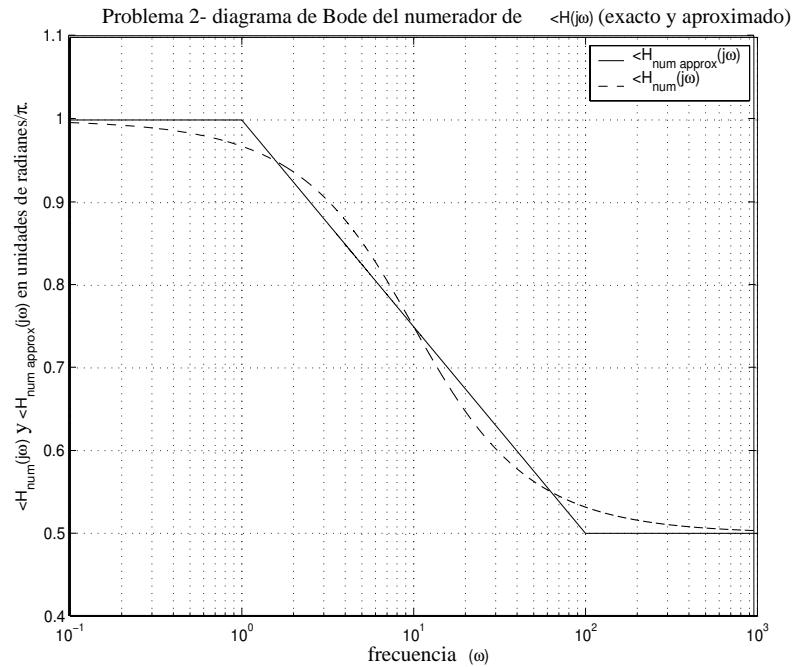




Para trazar la fase de $H(j\omega)$, trazamos la fase aproximada del numerador de $H(j\omega)$ y la del denominador de $H(j\omega)$ y unimos los dos diagramas para obtener el diagrama de fase de $H(j\omega)$. Para el numerador tenemos:

$$\angle H_{num}(j\omega) \approx \begin{cases} \pi & \text{para } \omega \leq 1 \\ -\frac{\pi}{4} \left(\log\left(\frac{\omega}{10}\right) - 1 \right) + \frac{\pi}{2} & \text{para } 1 < \omega < 100 \\ \frac{\pi}{2} & \text{para } \omega \geq 100 \end{cases} \quad (32)$$

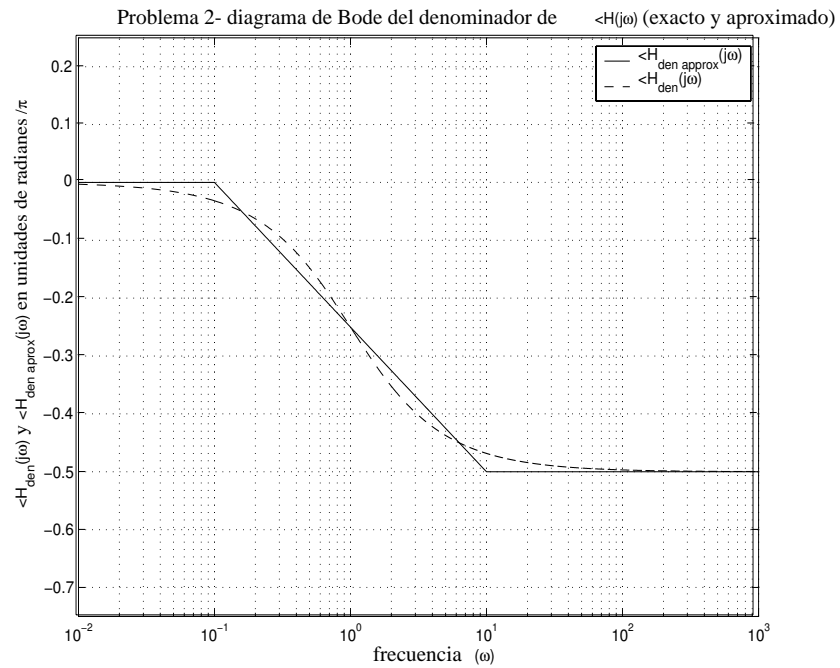
En el siguiente gráfico están trazadas la aproximación y la función exacta.



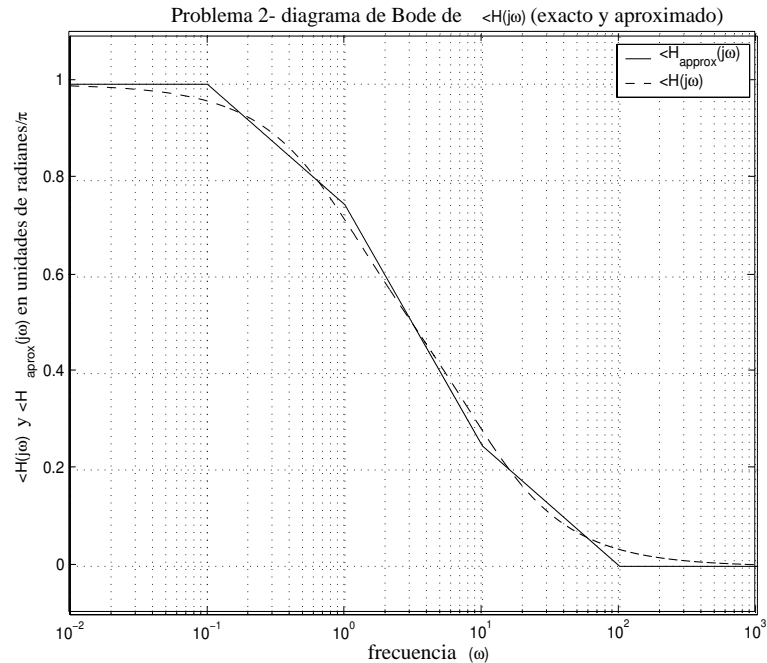
Para el denominador tenemos:

$$\angle H_{den}(j\omega) \approx \begin{cases} 0 & \text{para } \omega \leq 0.1 \\ -\frac{\pi}{4}(\log(\omega) + 1) & \text{para } 0.1 < \omega < 10 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{para } \omega \geq 10 \end{cases} \quad (33)$$

En el siguiente gráfico están trazadas la aproximación y la función exacta.



A continuación, se muestra la suma de las fases del numerador y el denominador, que proporciona la fase de la función global $H(j\omega)$:



Problema 3 O&W, 6.32 (b)

Solución:

El sistema de la figura P6.32 consiste en una cascada de un compensador con un sistema que tiene una respuesta de frecuencia, $H_2(j\omega) = \frac{1}{j\omega+50}$. Deseamos que la magnitud logarítmica de la cascada del compensador con $H_2(j\omega)$ tenga las siguientes especificaciones:

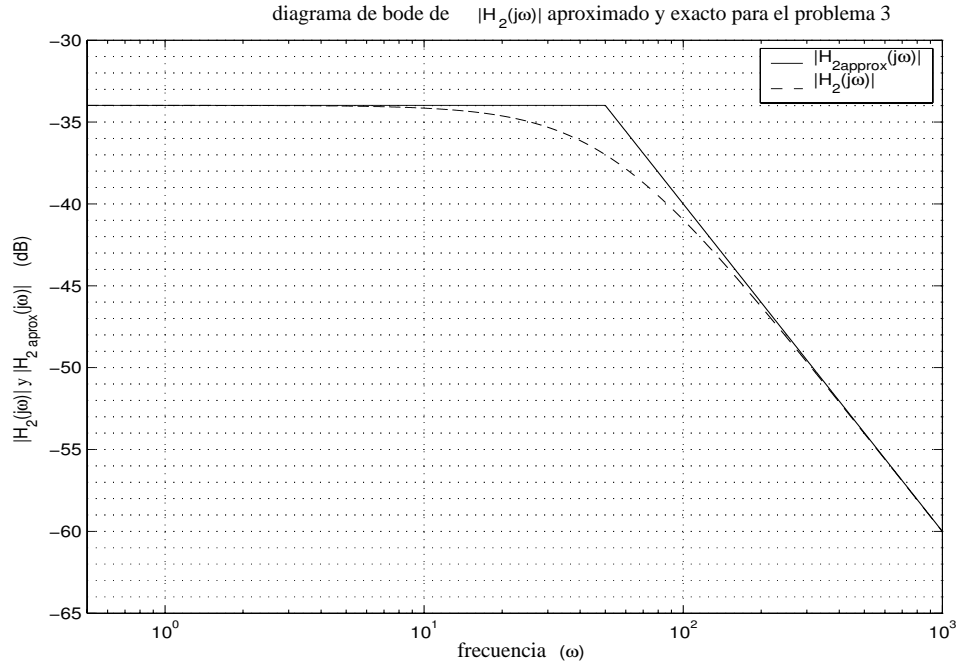
- (a) Debería tener una pendiente de +20 dB/década para $0 < \omega < 10$.
- (b) Debería estar entre +10 y +30 dB para $10 < \omega < 100$.
- (c) Debería tener una pendiente de -20 dB/década para $100 < \omega < 1000$.
- (d) Debería tener una pendiente de -40 dB/década para $\omega > 1000$.

Para obtener estas especificaciones tenemos que sumar el diagrama de Bode de $H_2(j\omega)$ con el del compensador, $C(j\omega)$.

El diagrama de Bode de la magnitud de $H_2(j\omega)$ es el siguiente:

$$20 \log |H_2(j\omega)| \approx \begin{cases} -20 \log 50 & \text{para } \omega \leq 50 \\ -20 \log \omega & \text{para } \omega \geq 50 \end{cases} \quad (34)$$

En el siguiente gráfico están trazadas la aproximación y la función exacta.



Es necesario realizar el diagrama de Bode anterior en cascada con la función de algún compensador, $C(j\omega)$ para obtener las especificaciones sindicadas anteriormente. Determinaremos que $C(j\omega)$ sea una combinación en cascada de una constante y de una o más de las cuatro respuestas de frecuencia, $H_a(j\omega) = j\omega$, $H_b(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$, $H_c(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega\tau_k}$ y $H_d(j\omega) = (1 + j\omega\tau_k)$ con τ_k adecuado seleccionado.

Para cumplir la primera y segunda especificación, $H_a(j\omega) = j\omega$ y $H_c(j\omega) = \frac{C_k}{1+j\omega\tau_k}$. Si seleccionamos $\tau_k = 0.1$, habrá +20 dB/década para $\omega < 10$ debido a $H_a(j\omega)$ y habrá 0 dB/década para $\omega > 10$ debido a la cascada de $H_a(j\omega)$ y $H_c(j\omega)$. $H_a(j\omega)$ cumplirá la primera especificación al ser una pendiente continua de +20 dB/década y $H_c(j\omega)$ "desconectará" +20 dB/década en un ω adecuado y hará que la pendiente = 0 para frecuencias superiores a ese ω .

No es necesario añadir nada para la tercera especificación ya que $H_2(j\omega)$ nos proporcionará -20 dB/década para $\omega > 50$. Sin embargo, necesitamos hacer otro $H_c(j\omega)$ en cascada para obtener -40 dB/década para $\omega > 1000$. Si seleccionamos $\tau_k = 0.001$ para $H_c(j\omega)$ la pendiente cambiará de -20 dB/década a -40 dB/década para tener lugar en $\omega = 1000$.

Hasta ahora tenemos la siguiente respuesta de frecuencia para el compensador:

$$C(j\omega) = \frac{C_k j\omega}{(1 + j0.1\omega)(1 + j0.001\omega)}$$

La última parte consiste en determinar la constante, C_k del compensador. Dado que $20 \log |H_2(j\omega)| = -20 \log 50 = -34$ dB para $\omega < 50$ y, puesto que la segunda especificación requiere que la magnitud logarítmica global esté entre +10 dB y +30 dB para $10 < \omega < 100$, seleccionamos la magnitud logarítmica de $C(j\omega)$ en $\omega = 10$ para añadirla a -34 dB y obtener +29.9 dB. Seleccionamos que esté cerca del límite

superior de la especificación (cerca de +30 dB en oposición a algún punto medio entre +10 dB y +30 dB) dado que en $\omega = 50$, $H_2(j\omega)$ comienza a disminuir en una pendiente de -20 dB/década. De modo que, de forma algebraica determinamos que:

$$-34 + 20 \log C_k + 20 \log 10 = 29.9$$

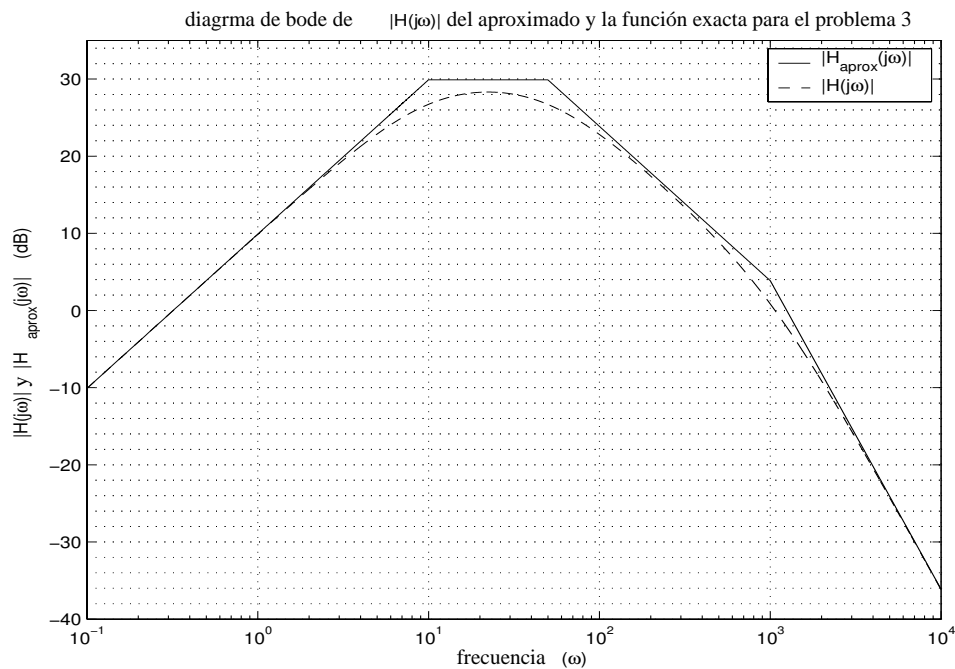
produce $C_k = 156.3$. La respuesta final de frecuencia del compensador es:

$$C(j\omega) = \frac{156.3j\omega}{(1 + j0.1\omega)(1 + j0.001\omega)}$$

La respuesta final de frecuencia para $H(j\omega)$ es:

$$H(j\omega) = \frac{156.3j\omega}{(1 + j0.1\omega)(50 + j\omega)(1 + j0.001\omega)}$$

En el siguiente gráfico se traza la respuesta final de frecuencia para $H(j\omega)$ como una aproximación y con la función exacta.



Problema 4 O&W, 6.39 (j)

Solución:

Tenemos que dibujar la magnitud y la fase logarítmicas de la siguiente función:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1 - 0.25e^{-j\omega})(1 + 0.75e^{-j\omega})}$$

Podemos escribir esto como una cascada de dos respuestas de frecuencia, $H_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1-0.25e^{-j\omega})}$ y $H_2(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1+0.75e^{-j\omega})}$. Entonces:

$$20 \log |H(e^{j\omega})| = 20 \log |H_1(e^{j\omega})| + 20 \log |H_2(e^{j\omega})|$$

y

$$\angle H(e^{j\omega}) = \angle H_1(e^{j\omega}) + \angle H_2(e^{j\omega})$$

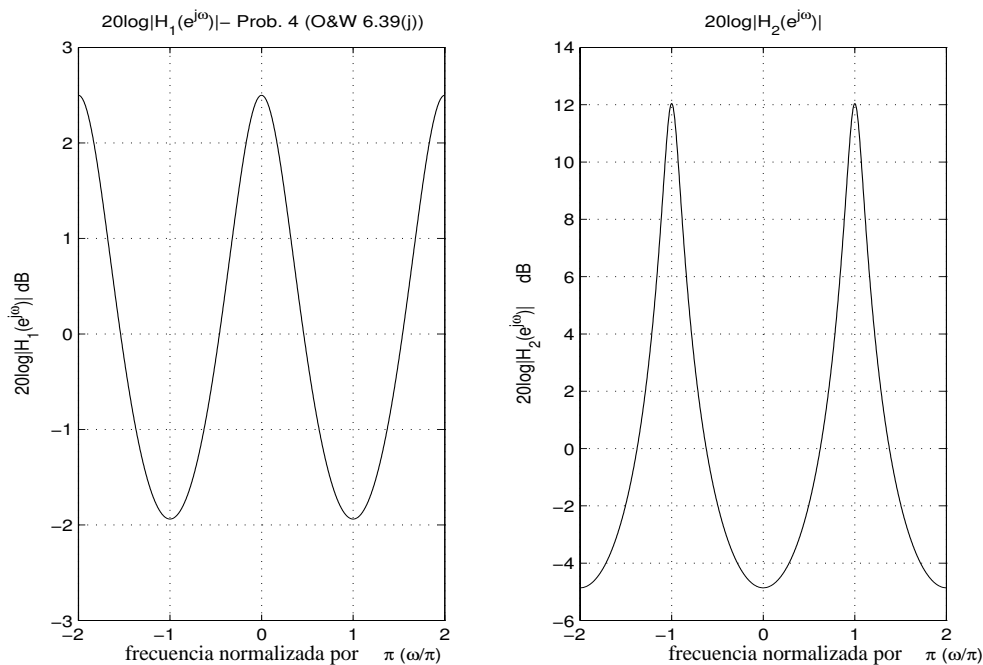
Necesitamos determinar $20 \log |H_1(e^{j\omega})|$ y $20 \log |H_2(e^{j\omega})|$. Si utilizamos la manipulación de números complejos obtenemos:

$$20 \log |H_1(e^{j\omega})| = -10 \log ((1 - 0.25 \cos \omega)^2 + 0.25^2 \sin^2 \omega)$$

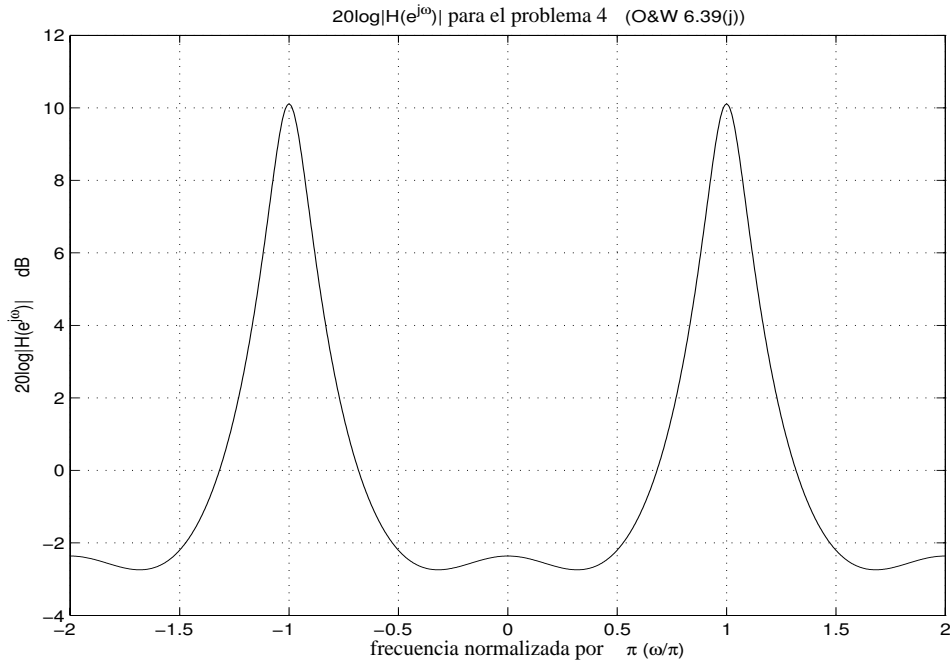
y

$$20 \log |H_2(e^{j\omega})| = -10 \log ((1 + 0.75 \cos \omega)^2 + 0.75^2 \sin^2 \omega)$$

Los dos diagramas de Bode se calcularon utilizando Matlab y se muestran a continuación por separado. Observe que los distintos ejes de ordenadas son escala de cada respuesta de frecuencia. La magnitud de $H_1(e^{j\omega})$ es mucho menor que la de $H_2(e^{j\omega})$. Observe también que, dado que el coeficiente del denominador es positivo (+0.25) para $H_1(e^{j\omega})$, mientras que para $H_2(e^{j\omega})$ es negativo (-0.75), sus valores de pico están desplazados unos de otros por π . $H_1(e^{j\omega})$ tiene más componentes de baja frecuencia que $H_2(e^{j\omega})$, que cuenta con más componentes de alta frecuencia.



Las dos funciones se muestran juntas para obtener la magnitud logarítmica total de $H(e^{j\omega})$:



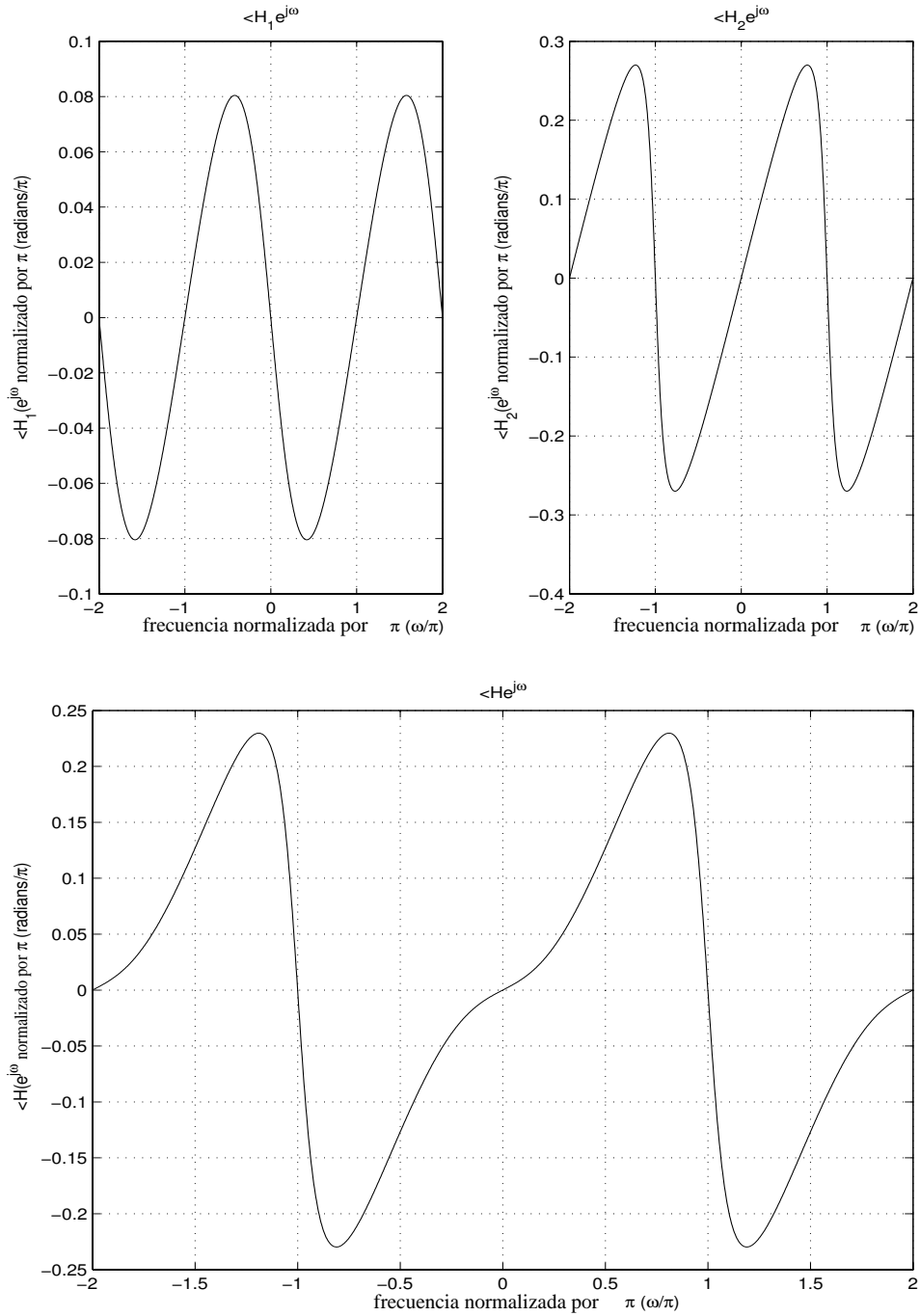
Para determinar $\angle H(e^{j\omega})$, hallamos y trazamos $\angle H_1(e^{j\omega})$ y $\angle H_2(e^{j\omega})$ y, a continuación, sumamos las dos funciones para obtener $\angle H(e^{j\omega})$.

$$\angle H_1(e^{j\omega}) = \angle \left(\frac{1}{1 - 0.25e^{-j\omega}} \right) = -\tan^{-1} \left(\frac{0.25 \sin \omega}{1 - 0.25 \cos \omega} \right)$$

y

$$\angle H_2(e^{j\omega}) = \angle \left(\frac{1}{1 + 0.75e^{-j\omega}} \right) = -\tan^{-1} \left(\frac{0.75 \sin \omega}{1 + 0.75 \cos \omega} \right).$$

Cada una de estas fases se traza por separado y después se unen para obtener la fase total de $H(e^{j\omega})$.



Problema 5 O&W, 6.43 (a)

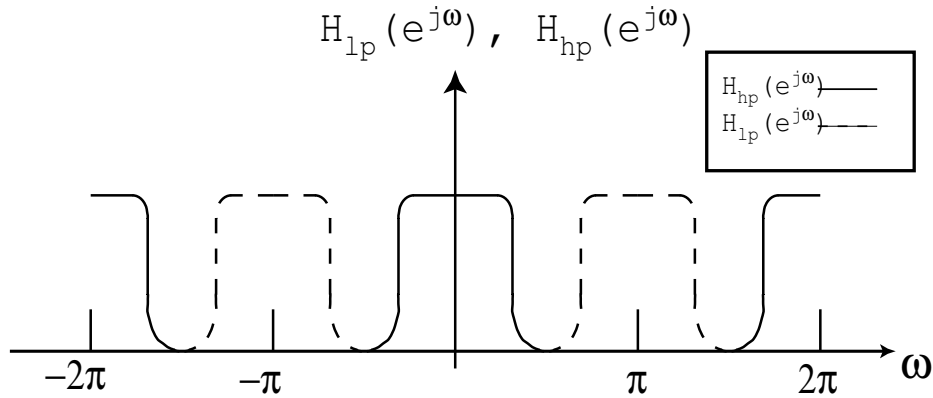
Solución:

Necesitamos transformar el filtro de paso bajo, $H_{lp}(e^{j\omega})$ de la figura P6.43 de O&W en uno de paso alto $H_{hp}(e^{j\omega})$. En este problema, realizamos esta operación modulando $h_{lp}[n]$. En concreto,

$h_{hp}[n] = (-1)^n h_{lp}[n]$. Esto equivale a desplazar la respuesta de frecuencia por π , ya que, de la tabla 5.1 de O&W tenemos $e^{j\omega_0 n} x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j(\omega-\omega_0)})$ y sabemos que $e^{j\pi n} = (-1)^n$. De modo que:

$$H_{hp}(e^{j\omega}) = H_{lp}(e^{j(\omega-\pi)}).$$

La respuesta de frecuencia, $H_{hp}(e^{j\omega})$ se muestra a continuación superpuesta en el original $H_{lp}(e^{j\omega})$:



Dado que una señal discreta es periódica con periodo $= 2\pi$, sus componentes de baja frecuencia se dan periódicamente en $0, \pm 2\pi, \pm 4\pi$, etc. De este modo, sus componentes de alta frecuencia se dan a medio camino entre los de baja frecuencia en $\pm\pi, \pm 3\pi$, etc. La respuesta de frecuencia desplazada corresponde al filtro de paso bajo, ya que la señal original tiene centrada su magnitud de pico alrededor de $0, \pm 2\pi$, etc. y la nueva señal queda desplazada de la original por π .

Problema 6 O&W, 6.58 (a), (b)

Solución:

- (a) 1. Necesitamos hallar $h_1[n]$ en función de $h[n]$. Para ello, debemos investigar $H_1(e^{j\omega})$. A partir de la figura P6.58 de O&W, podemos escribir lo siguiente:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{G(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}, \quad (35)$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{R(e^{j\omega})}{G(e^{-j\omega})} \quad (36)$$

$$R(e^{-j\omega}) = S(e^{j\omega}). \quad (37)$$

Podemos manipular las ecuaciones para escribir:

$$R(e^{-j\omega}) = G(e^{j\omega})H(e^{-j\omega}) \quad (38)$$

$$= X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})H(e^{-j\omega}). \quad (39)$$

De modo que:

$$H_1(e^{j\omega}) = \frac{S(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} \quad (40)$$

$$= H(e^{j\omega})H(e^{-j\omega}). \quad (41)$$

A partir de esta función, reconocemos mediante la propiedad de convolución, que $h_1[n] = h[n] * h[-n]$.

Podemos demostrar que el sistema tiene una característica de fase cero señalando que puesto que $h[n]$ es real, $H(e^{-j\omega}) = H^*(e^{j\omega})$. De este modo:

$$H_1(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})H(e^{-j\omega}) = H(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|^2.$$

2. Dado que $|H_1(e^{j\omega})| = |H(e^{j\omega})|^2$, la magnitud $|H_1(e^{j\omega})| = |H(e^{j\omega})|^2$ y la fase $\angle H_1(e^{j\omega}) = 0$.
- (b) 1. Consideramos las transformadas de Fourier para determinar $h_2[n]$. Dado que $y[n] = g[n] + r[-n]$, $Y(e^{j\omega}) = G(e^{j\omega}) + R(e^{-j\omega})$. A partir de la figura P6.58 de O&W determinamos:

$$Y(e^{j\omega}) = G(e^{j\omega}) + R(e^{-j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) + H(e^{-j\omega})X(e^{j\omega})$$

De este modo:

$$H_2(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) + H(e^{-j\omega}) \longleftrightarrow h_2[n] = h[n] + h[-n].$$

Para determinar si $|H_2(e^{j\omega})|$ tiene característica de fase cero, manipulamos $|H_2(e^{j\omega})|$ para obtenerlo en forma polar. Utilizamos la propiedad de la tabla 5.1 ya que como $h[n]$ es real, entonces $\Re\{H(e^{j\omega})\} = \Re\{H(e^{-j\omega})\}$ y $\Im\{H(e^{j\omega})\} = -\Im\{H(e^{-j\omega})\}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} |H_2(e^{j\omega})| &= |\Re\{H(e^{j\omega})\} + \Im\{H(e^{j\omega})\} + \Re\{H(e^{-j\omega})\} + \Im\{H(e^{-j\omega})\}| \\ &= 2\Re\{H(e^{j\omega})\} \end{aligned} \quad (43)$$

$$= 2|H(e^{j\omega})| \cos(\angle H(e^{j\omega})). \quad (44)$$

Con esto observamos que $|H_2(e^{j\omega})|$ tiene característica de fase cero.

2. Puesto que ya pusimos $|H_2(e^{j\omega})|$ en forma polar, sabemos que:

$$|H_2(e^{j\omega})| = 2|H(e^{j\omega})| \cos(\angle H(e^{j\omega})). \quad (45)$$

y que $\angle H_2(e^{j\omega}) = 0$.

Problema 7 O&W, 7.22

Solución:

En este problema tenemos que resolver un rango de valores para el periodo de muestra, T , para recuperar $y(t)$ completamente a partir de $y_p(t)$. Para ello, es necesario determinar el ancho de banda de $Y(j\omega)$ original y utilizar el teorema de muestreo. Mediante la propiedad de convolución, $Y(j\omega) = X_1(j\omega)X_2(j\omega)$. El ancho de banda de $Y(j\omega)$ será el ancho de banda del menor de los dos anchos de banda, $X_1(j\omega)$ o $X_2(j\omega)$. Por lo tanto, $Y(j\omega) = 0$ para $|\omega| > 1000\pi$. A continuación, si utilizamos el teorema de muestreo tenemos:

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T} > 2\omega_m = 2(1000\pi).$$

Esto proporciona el rango de T como $0 < T < 0.001$ segundos.

Problema 8 O&W, 7.23

Solución:

- (a) Tenemos que dibujar $X_p(j\omega)$ e $Y(j\omega)$. En el dominio de frecuencia, $X_p(j\omega) = \frac{1}{2\pi}X(j\omega) * P(j\omega)$. Debemos determinar $P(j\omega)$. Como $P(j\omega)$ es periódico, tenemos que utilizar la fórmula de la transformada periódica de Fourier:

$$P(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_o).$$

Aquí, $\omega_o = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{\Delta}$. Tenemos que determinar a_k utilizando la fórmula $a_k = \frac{1}{T} \int_T p(t) e^{-jk\omega_o t} dt$. A continuación, se muestran unos ejemplos:

$$a_0 = \frac{1}{2\Delta} \int_0^{2\Delta} (\delta(t) - \delta(t - \Delta)) dt = 0$$

$$a_1 = \frac{1}{2\Delta} \int_0^{2\Delta} (\delta(t) - \delta(t - \Delta)) e^{-j\frac{\pi}{\Delta}t} dt = \frac{1}{2\Delta} (1 - 1 \cdot e^{-j\pi}) = \frac{1}{\Delta}$$

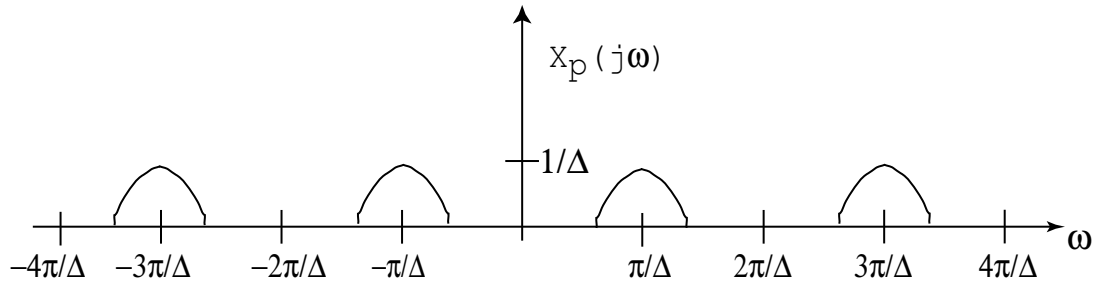
$$a_2 = \frac{1}{2\Delta} \int_0^{2\Delta} (\delta(t) - \delta(t - \Delta)) e^{-j2\frac{\pi}{\Delta}t} dt = \frac{1}{2\Delta} (1 - 1 \cdot e^{-j2\pi}) = 0$$

$$a_3 = \frac{1}{2\Delta} \int_0^{2\Delta} (\delta(t) - \delta(t - \Delta)) e^{-j3\frac{\pi}{\Delta}t} dt = \frac{1}{2\Delta} (1 - 1 \cdot e^{-j3\pi}) = \frac{1}{\Delta}$$

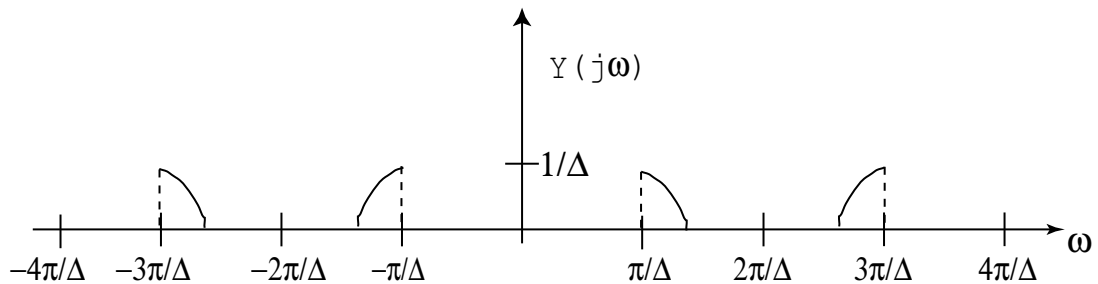
De modo que, $a_k = 0$ para k par y $a_k = \frac{1}{\Delta}$ para k impar:

$$P(j\omega) = \sum_{k \text{ odd}} \frac{2\pi}{\Delta} \delta(\omega - k\frac{\pi}{\Delta}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{\Delta} \delta\left(\omega - (2k+1)\frac{\pi}{\Delta}\right)$$

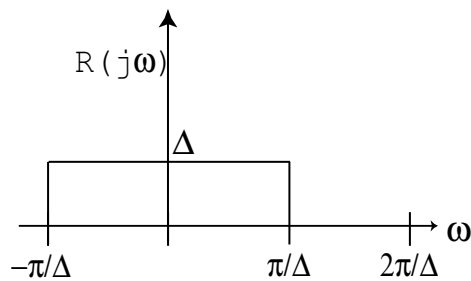
A partir de esta transformada de Fourier para $P(j\omega)$, podemos dibujar $X_p(j\omega)$ como copias de $X(j\omega)$ a escala de $\frac{1}{\Delta}$ y reproducirlos en intervalos de $\omega = (2k+1)\frac{\pi}{\Delta}$ para todo k . En la siguiente figura podemos ver un ejemplo:



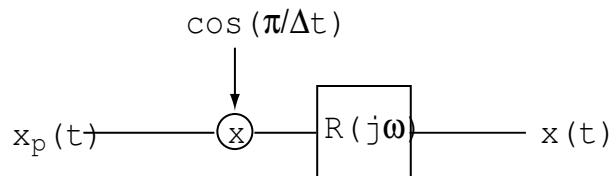
$H(j\omega)$ es una suma de dos filtros ideales de paso de banda de ganancia unitaria. De modo que, $Y(j\omega)$ es la parte de $X_p(j\omega)$ que pasa a través de $H(j\omega)$, como se indica a continuación:



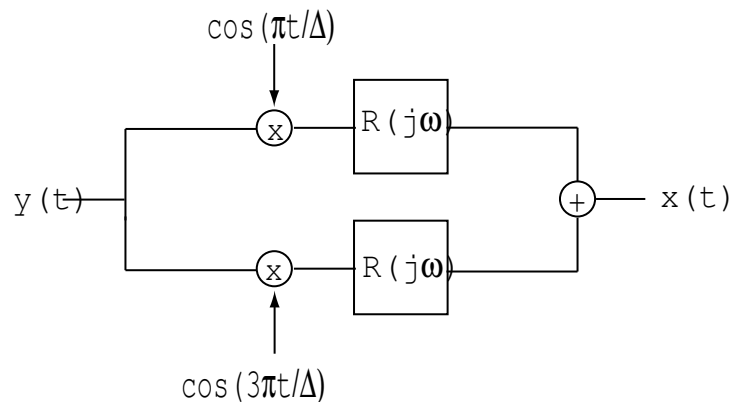
- (b) Para recuperar $x(t)$ de $x_p(t)$ tenemos que hacer dos cosas. Primero hay que multiplicar $x_p(t)$ por una función de coseno, $\cos \frac{\pi}{\Delta}t$, lo cual desplazará a $X_p(j\omega)$ de forma que una de las copias de $X(j\omega)$ esté centrada alrededor de $\omega = 0$. Segundo, enviamos la señal desplazada a través del filtro de paso bajo, $R(j\omega)$, para eliminar las copias adicionales de $X(j\omega)$. Para ello, contamos con un filtro $R(j\omega)$ con ganancia $= \Delta$, ancho de banda $\frac{2\pi}{\Delta}$ y centrado alrededor de $\omega = 0$, como se indica aquí:



A continuación, se indica el sistema en su totalidad:



- (c) Para recuperar $x(t)$ de $y(t)$ tenemos que ejecutar $Y(j\omega)$ a través de dos sistemas de filtros paralelos. El camino paralelo superior multiplicará $y(t)$ por $\cos \frac{\pi}{\Delta} t$, que desplazará la semi-reproducción de $X(j\omega)$ centrada en $\omega = \frac{\pi}{\Delta}$ hasta $\omega = 0$. La señal desplazada pasa, a continuación, a través del filtro de paso bajo, $R(j\omega)$, descrito anteriormente en el apartado (b) para eliminar las copias adicionales. El camino paralelo inferior multiplicará $y(t)$ por $\cos \frac{3\pi}{\Delta} t$, que desplazará la semi-reproducción de $X(j\omega)$ centrada en $\omega = \frac{3\pi}{\Delta}$ hasta $\omega = 0$. La señal desplazada pasa, a continuación, a través del filtro de paso bajo, $R(j\omega)$, descrito anteriormente en el apartado (b) para eliminar las copias adicionales. De este modo, las dos mitades se combinan para formar un $X(j\omega)$ completo y se recupera $x(t)$. A continuación, se muestra el sistema general:



- (d) Para recuperar $x(t)$ de $x_p(t)$ e $y(t)$, $X_p(j\omega)$ no puede estar solapado en las copias de $X(j\omega)$. Debido a este $p(t)$ concreto, las copias de $X(j\omega)$ están en $\omega = (2k + 1) \frac{\pi}{\Delta}$ para todo k . De modo que, si consideramos simplemente un intervalo para asegurarnos que las copias de $X(j\omega)$ no se superponen, tenemos una copia de $X(j\omega)$ centrada en $\omega = \frac{\pi}{\Delta}$ y una de $X(j\omega)$ centrada en $\omega = \frac{3\pi}{\Delta}$ (Véase la figura de $X_p(j\omega)$ anterior). Para que estas copias no se solapen,

$$\frac{\pi}{\Delta} + \omega_m < \frac{3\pi}{\Delta} - \omega_m,$$

que nos proporciona:

$$\Delta < \frac{\pi}{\omega_m} \text{ o } \Delta_{max} = \frac{\pi}{\omega_m}.$$