Señales y sistemas

Otoño 2003

Clase 19

18 de noviembre 2003

1. Propiedades de la función del sistema en tiempo continuo.
2. Álgebra de la función del sistema y diagramas de bloque.
3. Transformada unilateral de Laplace y aplicaciones.

Propiedades de la función del sistema en tiempo continuo

$$x(t) \longrightarrow \boxed{H(s)} \longrightarrow y(t)$$

H(s) = “función del sistema”

$$Y(s) = H(s)X(s)$$

1) El sistema es estable $\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt < \infty$ $\Leftrightarrow$ la ROC de $H(s)$ incluye el eje $j\omega$

2) Causalidad $\Rightarrow$ señal $h(t)$ del lado derecho $\Rightarrow$ la ROC de $H(s)$ es un plano derecho

Pregunta:

Si la ROC de $H(s)$ es un plano derecho, ¿es causal el sistema?

Ej.

$$H(s) = \frac{e^{sT}}{s+1}, \quad \Re e\{s\} > -1 \Rightarrow h(t) \text{ right-sided}$$

(del lado derecho)

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{sT}}{s+1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}_{t \to t+T} = e^{-t}u(t)\big|_{t \to t+T}$$

$$= e^{-(t+T)}u(t+T) \neq 0 \quad \text{at} \quad t < 0$$

(en)

No causal

Propiedades de las funciones racionales de sistemas en tiempo continuo

a) Sin embargo, si $H(s)$ es ***racional,***

El sistema es causal $\Leftrightarrow$ la ROC de $H(s)$ está a la derecha del polo situado más a la derecha

b) Si $H(s)$ es racional y es la función de sistema de un sistema causal, entonces:

El sistema es estable $\Leftrightarrow$ el eje $j\omega$ se encuentra en la ROC $\Leftrightarrow$ todos los polos están en el LHP

Comprobación de que todos los polos se encuentran en el plano izquierdo

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

Poles are the roots of $D(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$
(Los polos son las raíces de ...)

Método 1: calcule todas las raíces y observe lo que sucede.

Método 2: Routh-Hurwitz – sin tener que resolver las raíces.

	Polynomial (Polinomio)	Condition so that all roots are in the LHP (Condición para que todas las raíces estén en el LHP)
First-order (Primer orden)	$s + a_0$	$a_0 > 0$
Second-order (Segundo orden)	$s^2 + a_1 s + a_0$	$a_1 > 0, a_0 > 0$
Third-order (Tercer orden)	$s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$	$a_2 > 0, a_1 > 0, a_0 > 0$ <u>and</u> (y) $a_0 < a_1 a_2$
	$\vdots$	$\vdots$

Teoremas de los valores inicial y final

Si $x(t) = 0$ para $t < 0$ y no existen impulsos o discontinuidades de orden superior en el origen,

$$\boxed{x(0^+) \quad = \quad \lim_{s\to\infty} sX(s)}$$

Valor inicial

Si $x(t) = 0$ para $t < 0$ y $x(t)$ tiene un límite finito $t \to \infty$,

$$\boxed{x(\infty) \quad = \quad \lim_{s\to 0} sX(s)}$$

Valor final

Aplicaciones de los teoremas del valor inicial y final

Para
$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

n - order of polynomial $N(s)$, d - order of polynomial $D(s)$

(orden *n* del polinomio *N*(*s*), (orden *d* del polinomio *D*(*s*))

- Valor inicial:

$$x(0^+) = \lim_{s\to\infty} sX(s) = \begin{cases} 0 & d > n+1 \\ \text{finite} \neq 0 & d = n+1 \\ \text{(finito)} & \\ \infty & d < n+1 \end{cases}$$

E.g. (Ej.) $X(s) = \dfrac{1}{s+1}$ $\quad x(0^+) = ?$

- Valor final

$$\text{If } x(\infty) = \lim_{s\to 0} sX(s) = 0 \Rightarrow \lim_{s\to 0} X(s) < \infty$$

$\Rightarrow$ No poles at $s = 0$

(no hay polos en...)

Sistemas LTI descritos por las ecuaciones diferenciales de coeficiente constante lineal

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

Repeated use of differentiation property:
(Uso repetido de la propiedad de diferenciación:) $\frac{d}{dt} \leftrightarrow s, \quad \frac{d^k}{dt^k} \leftrightarrow s^k$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k s^k Y(s) = \sum_{k=0}^{M} b_k s^k X(s)$$

$$\Downarrow$$

$$Y(s) = H(s)X(s)$$

where (donde) $H(s) = \underbrace{\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k s^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k}}_{\text{Rational}}$ (no hay polos en...)

$\longleftarrow$ raíces del numerador $\Rightarrow$ *ceros*

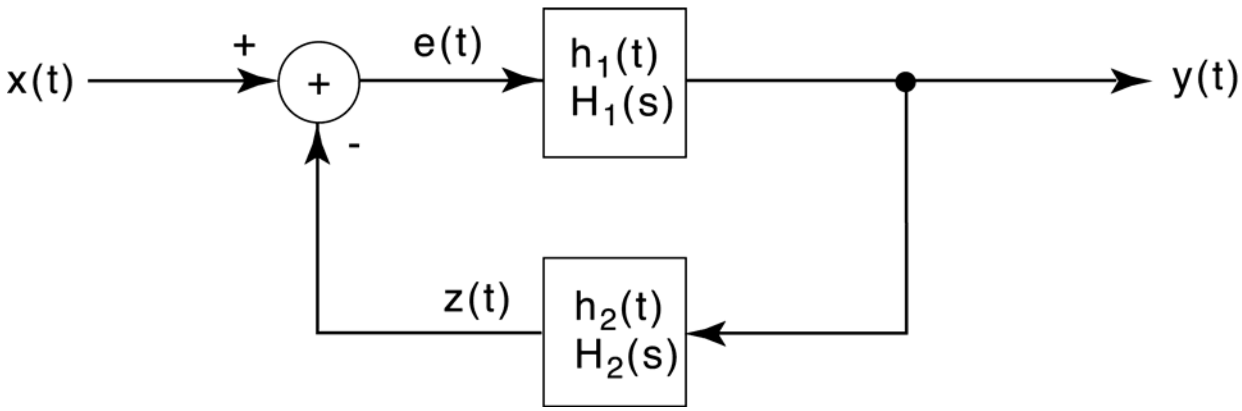
$\longleftarrow$ raíces del denominador $\Rightarrow$ *polos*

ROC =? Depende de: 1) Ubicaciones de *todos* los polos.

2) Condiciones de contorno, *es decir*, señales del lado derecho, izquierdo y de dos lados.

Álgebra de la función del sistema

Ejemplo: sistema básico de retroalimantación que consiste en bloques ***causales***



$$E(s) = X(s) - Z(s) = X(s) - H_2(s)Y(s)$$

$$Y(s) = H_1(s)E(s) = H_1(s)[X(s) - H_2(s)Y(s)]$$

$$\Downarrow$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)}$$

Se ampliará al tratar la retroalimentación

ROC: determinada por las raíces de $1+H_1(s)H_2(s)$, en lugar de las de $H_1(s)$

Diagrama de bloques para los sistemas causales LTI con funciones de los sistemas racionales

Ejemplo:

$$Y(s) = H(s)X(s)$$

$$H(s) = \frac{2s^2+4s-6}{s^2+3s+2} = \left(\frac{1}{s^2+3s+2}\right)(2s^2+4s-6)$$

— Se puede ver como una cascada de dos sistemas.

Define:
(Defina:)

$$W(s) = \frac{1}{s^2+3s+2}X(s)$$

$$\frac{d^2w(t)}{dt^2} + 3\frac{dw(t)}{dt} + 2w(t) = x(t), \quad \text{initially at rest}$$

(inicialmente en reposo)

$$\text{or} \quad \frac{d^2w(t)}{dt^2} = x(t) - 3\frac{dw(t)}{dt} - 2w(t)$$

Similarly
(Igualmente)

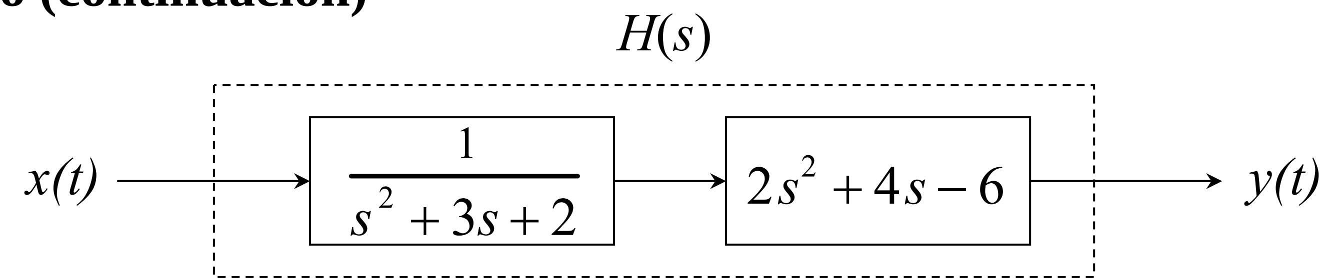
$$Y(s) = (2s^2+4s-6)W(s)$$

$$\Downarrow$$

$$y(t) = 2\frac{d^2w(t)}{dt^2} + 4\frac{dw(t)}{dt} - 6w(t)$$

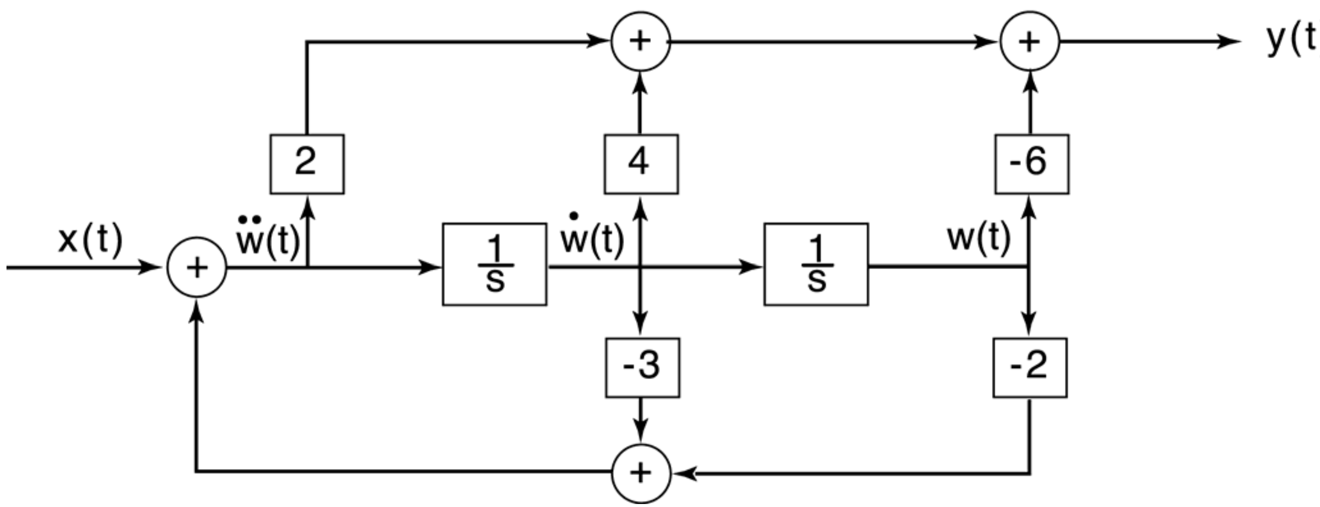
Ejemplo (continuación)

En lugar de



Podemos construir $H(s)$ utilizando:

$$\begin{aligned} \frac{d^2w(t)}{dt^2} &= x(t) - 3\frac{dw(t)}{dt} - 2w(t) \\ y(t) &= 2\frac{d^2w(t)}{dt^2} + 4\frac{dw(t)}{dt} - 6w(t) \end{aligned}$$

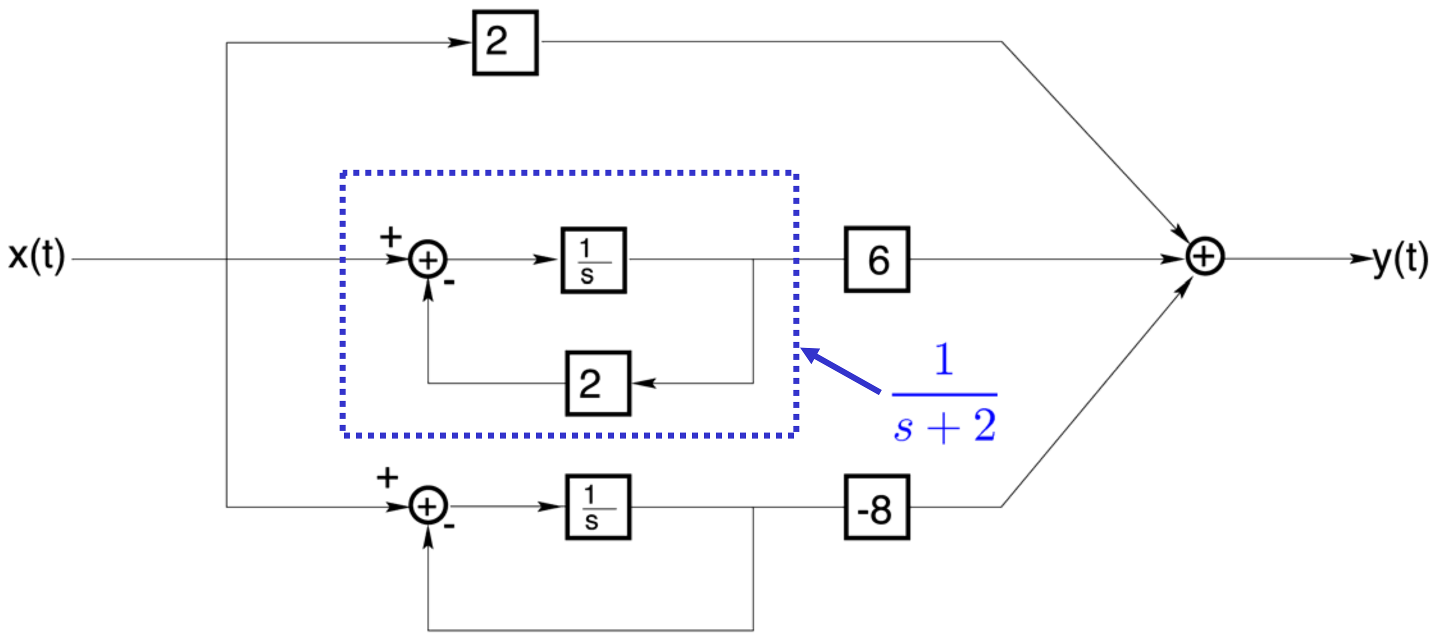


Notación: $1/s$ — un integrador

Observe también que

$$H(s) = \left[\frac{2(s-1)}{s+2}\right]\left[\frac{s+3}{s+1}\right] = \left[\frac{s+3}{s+2}\right]\left[\frac{2(s-1)}{s+1}\right] \quad - \text{ Cascade (Cascada)}$$

$$\overset{PFE}{=} \quad 2 + \frac{6}{s+2} - \frac{8}{s+1} \quad - \text{ parallel connection (conexión paralela)}$$



Lección: existen muchas formas *diferentes* de construir un sistema que realice una cierta función.

La transformada unilateral de Laplace

(herramienta preferida para analizar sistemas causales en tiempo continuo descritos por las ecuaciones diferenciales de coeficiente lineal constante con **condiciones iniciales**)

$$\mathcal{X}(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st}dt = \mathcal{UL}\{x(t)\}$$

Nota:

1) Si $x(t) = 0$ para $t < 0$, $X(s) = \mathcal{X}(s)$

2) TL unilateral de $x(t)$ = TL bilateral de $x(t)u(t$-)

3) Por ejemplo, si $h(t)$ es la respuesta a impulso de un sistema causal LTI,

$$H(s) = \mathcal{H}(s)$$

4) Propiedad de la convolución: si $x_1(t) = x_2(t) = 0$ para $t < 0$,

$$\boxed{\mathcal{UL}\{x_1(t) * x_2(t)\} = \mathcal{X}_1(x)\mathcal{X}_2(s)}$$

Lo mismo que la transformada bilateral de Laplace

Propiedad de diferenciación para la transformada unilateral de Laplace

$$x(t) \longleftrightarrow \mathcal{X}(s)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{dx(t)}{dt} \longleftrightarrow s\mathcal{X}(s) - x(0^-)}$$

Condición inicial

(integración por partes)

integration by parts

$\int f \cdot dg = fg - \int g \cdot df$

Derivación:

$$\mathcal{UL}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = \int_{0^-}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt = s \underbrace{\int_{0^-}^{\infty} x(t) e^{-st} dt}_{\mathcal{X}(s)} + x(t)e^{-st}|_{0-}^{\infty}$$

$$= s\mathcal{X}(s) - x(0^-)$$

Nota:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} \longleftrightarrow s(\overbrace{s\mathcal{X}(s) - x(0^-))}^{\mathcal{UL}\frac{dx(t)}{dt}} - x'(0^-)$$

$$\longleftrightarrow s^2\mathcal{X}(s) - sx(0^-) - x'(0^-)$$

Usos de las transformadas unilaterales de Laplace (TLU) para resolver las ecuaciones de diferenciación con condiciones iniciales

Ejemplo:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

$$y(0^-) = \beta\,,\; y'(0^-) = \gamma\,,\; x(t) = \alpha u(t)$$

Tome la TLU:

$$\underbrace{s^2\mathcal{Y}(s) - \beta s - \gamma}_{\mathcal{UL}\left\{\frac{d^2y}{dt^2}\right\}} + 3\underbrace{\left(\mathcal{Y}(s) - \beta\right)}_{\mathcal{UL}\left\{\frac{dy}{dt}\right\}} + 2\mathcal{Y}(s) = \frac{\alpha}{s}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{Y}(s) = \underbrace{\frac{\beta(s+3)}{(s+1)(s+2)} + \frac{\gamma}{(s+1)(s+2)}}_{ZIR} + \underbrace{\frac{\alpha}{s(s+1)(s+2)}}_{ZSR}$$

ZIR — respuesta para entrada cero $x(t)=0$

ZSR — respuesta para estado cero, $\beta=\gamma=0$, inicialmente en reposo

Ejemplo (continuación)

- Respuesta para el sistema LTI inicialmente en reposo ($\beta = \gamma = 0$)

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{H}(s) = \frac{\mathcal{Y}(s)}{\mathcal{X}(s)} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = H(s)$$

- Respuesta sólo a las condiciones iniciales ($\alpha = 0$).
  Por ejemplo:

$$x(t) = 0\,(\text{no input}), \quad y(0^-) = 1, \quad y'(0^-) = 0 \quad (\beta = 1, \gamma = 0)$$

(no hay entrada)

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{Y}(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} = \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

$$\Downarrow$$

$$y(t) = 2e^{-t} - e^{-2t}, \quad t \geq 0$$