Señales y sistemas

Otoño 2003

Clase 23

4 de diciembre de 2003

1. Evaluación geométrica de las transformadas z y de las respuestas de frecuencia en tiempo discreto.
2. Sistemas de primer y segundo orden.
3. Álgebra de la función del sistema y diagramas de bloque.
4. Transformadas unilaterales z.

Evaluación geométrica de una transformada racional z

Ejemplo 1:

$$X_1(z) = z - a \text{ - A first-order zero}$$

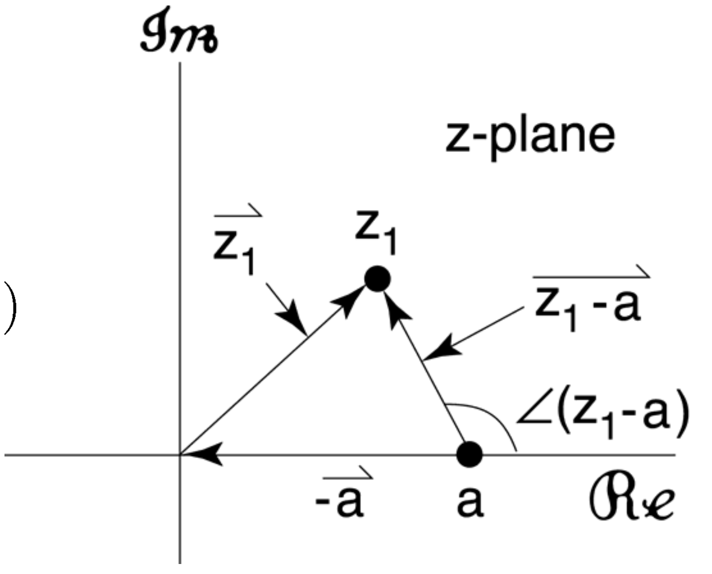
(Cero de primer orden)

Ejemplo 2:

$$X_2(z) = \frac{1}{z-a} \text{ - A first-order pole}$$

(Polo de primer orden)

$$|X_2(z)| = \frac{1}{|X_1(z)|}, \quad \angle X_2(z) = -\angle X_1(z)$$



Ejemplo 3:

$$X(z) = M \frac{\Pi_{i=1}^{R}(z-\beta_i)}{\Pi_{j=1}^{P}(z-\alpha_j)}$$

$$|X(z)| = |M| \frac{\Pi_{i=1}^{R}|z-\beta_i|}{\Pi_{j=1}^{P}|z-\alpha_j|}$$

$$\angle X(z) = \angle M + \sum_{i=1}^{R} \angle(z-\beta_i) - \sum_{j=1}^{P} \angle(z-\alpha_j)$$

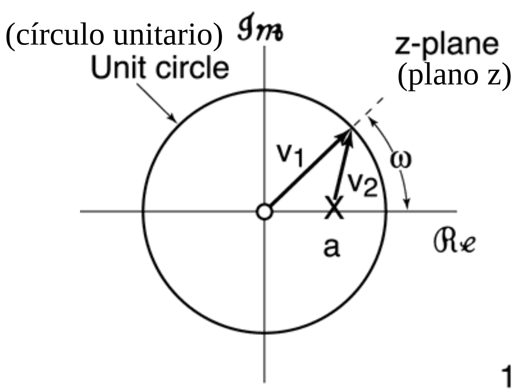
Todo igual que en el plano s

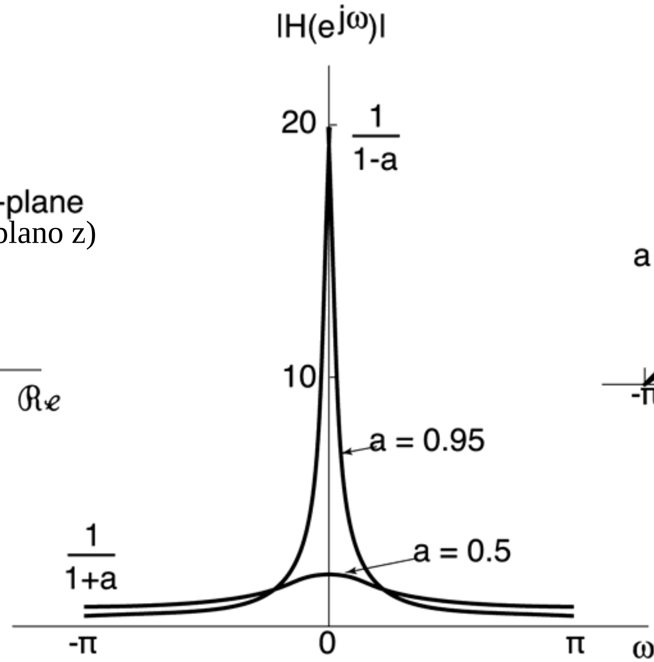
Evaluación geométrica de respuestas de frecuencia en tiempo discreto

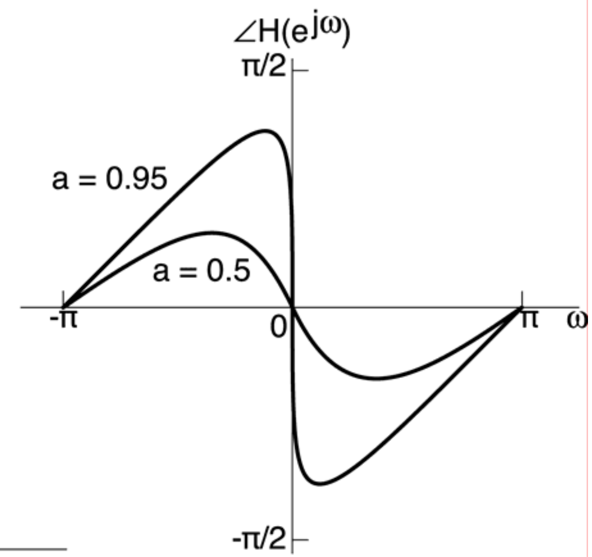
Sistema de primer orden — un polo *real*

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z-a} \quad , \quad |z| > |a|$$

$$h[n] = a^n u[n] \quad , \quad |a| < 1$$







$$H(e^{j\omega}) = \frac{v_1}{v_2}, \ |H(e^{j\omega})| = \frac{|v_1|}{|v_2|} = \frac{1}{|v_2|}, \quad \angle H(e^{j\omega}) = \angle v_1 - \angle v_2 = \omega - \angle v_2$$

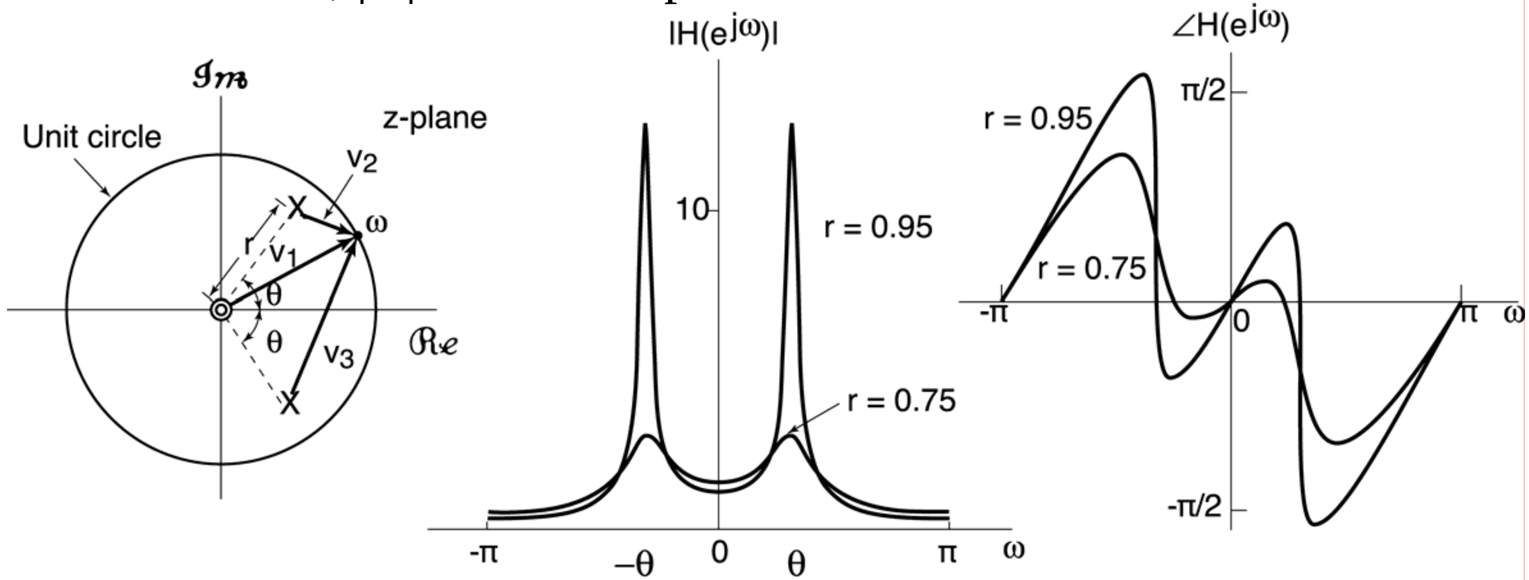
Sistema de segundo orden

Dos polos que son un par conjugado complejo ($z_1 = re^{j\theta} = z_2^*$)

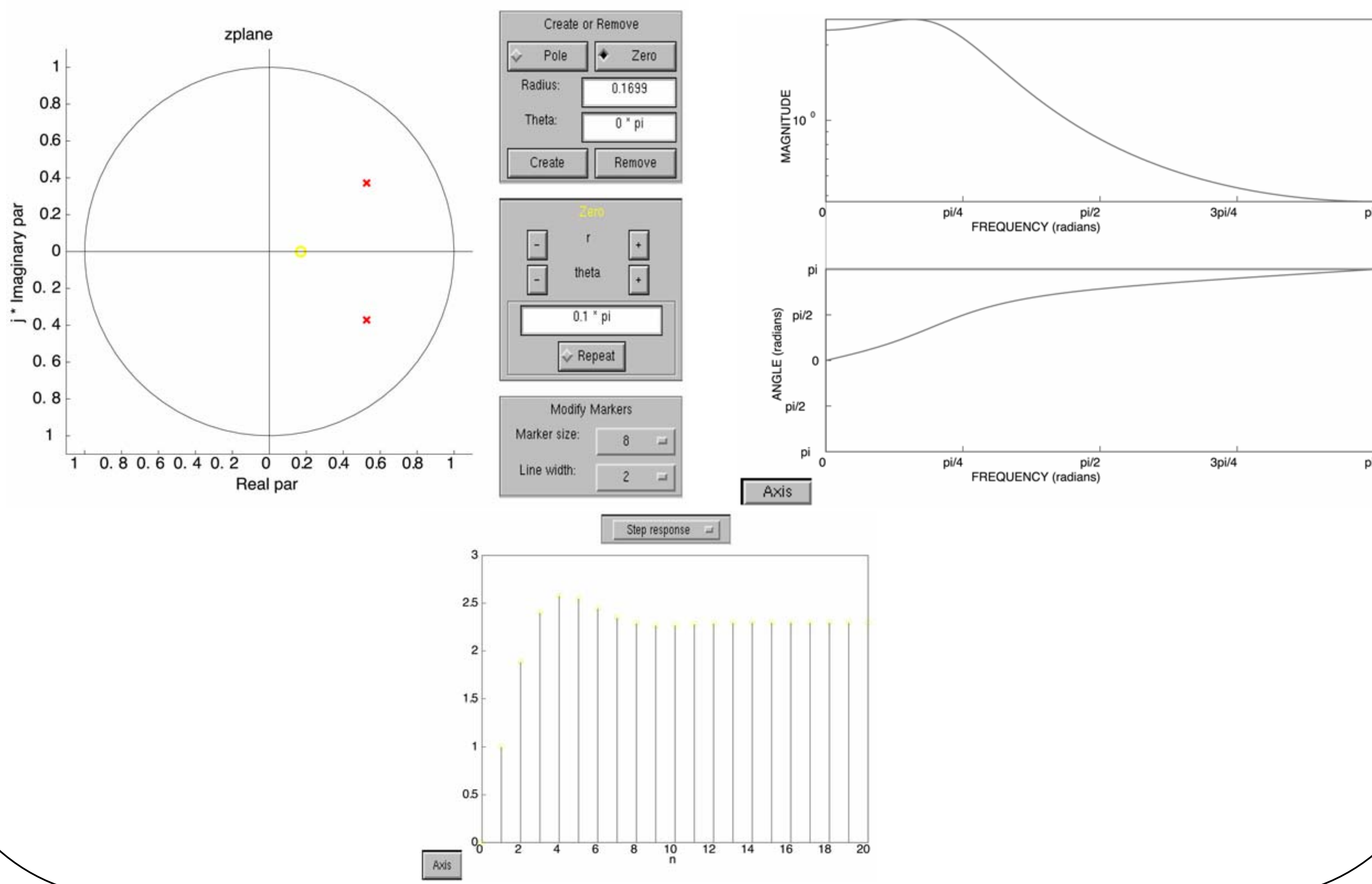
$$H(z) = \frac{z^2}{(z-z_1)(z-z_2)} = \frac{1}{1-(2r\cos\theta)z^{-1}+r^2z^{-2}}, \quad 0<r<1, \quad 0\le\theta\le\pi$$

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{1}{|(e^{j\omega}-re^{j\theta})(e^{j\omega}-re^{-j\theta})|}, \quad h[n] = r^n \frac{\sin[(n+1)\theta]}{\sin\theta}u[n]$$

Evidentemente, $|H|$ alcanza su punto más alto cerca de $\omega = \pm\theta$



Demo: diagramas polo cero en tiempo discreto, respuesta de frecuencia, diagramas de vectores y respuestas a impulso y a escalón



Sistemas LTI en tiempo discreto descritos en las ecuaciones de diferencias de coeficientes lineales constantes

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

Utilice la propiedad de desplazamiento de tiempo

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} X(z)$$

$$\Downarrow$$

$$Y(z) = H(z)X(z)$$

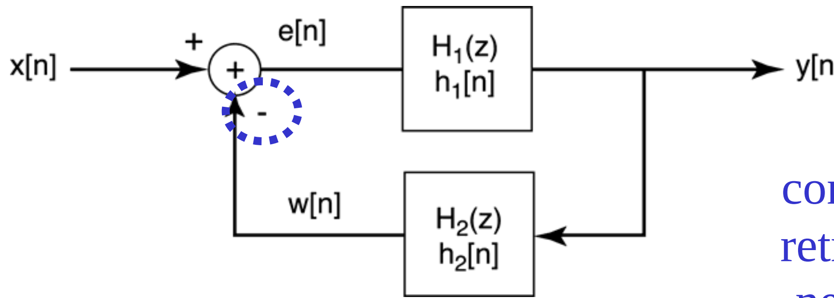
$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} \quad \text{— Racional}$$

ROC: depende de las condiciones de contorno, del lado derecho, del izquierdo o bilaterales

Para los sistemas causales $\Rightarrow$ la ROC se ubica fuera del polo más exterior

Álgebra de la función del sistema y diagramas de bloque

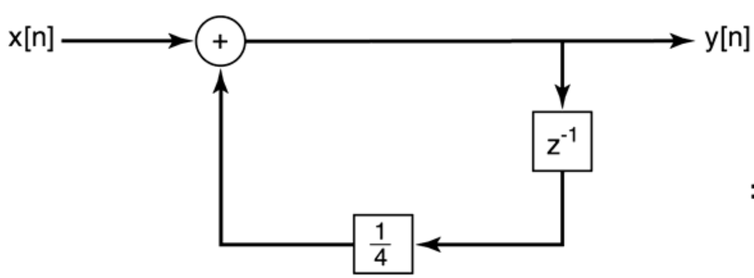
Sistema de retroalimentación (sistemas causales)



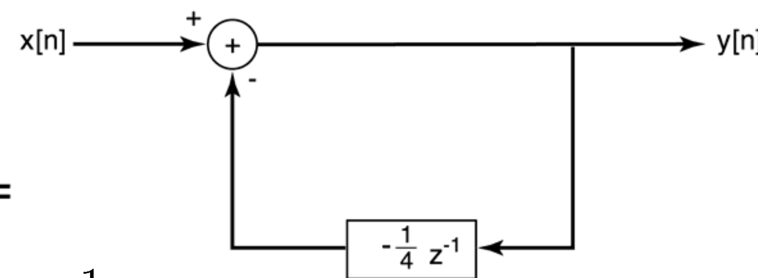
configuración de retroalimentación negativa

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{H_1(z)}{1 + H_1(z)H_2(z)}$$

Ejemplo 1:



=



$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}$$

$$\Downarrow$$

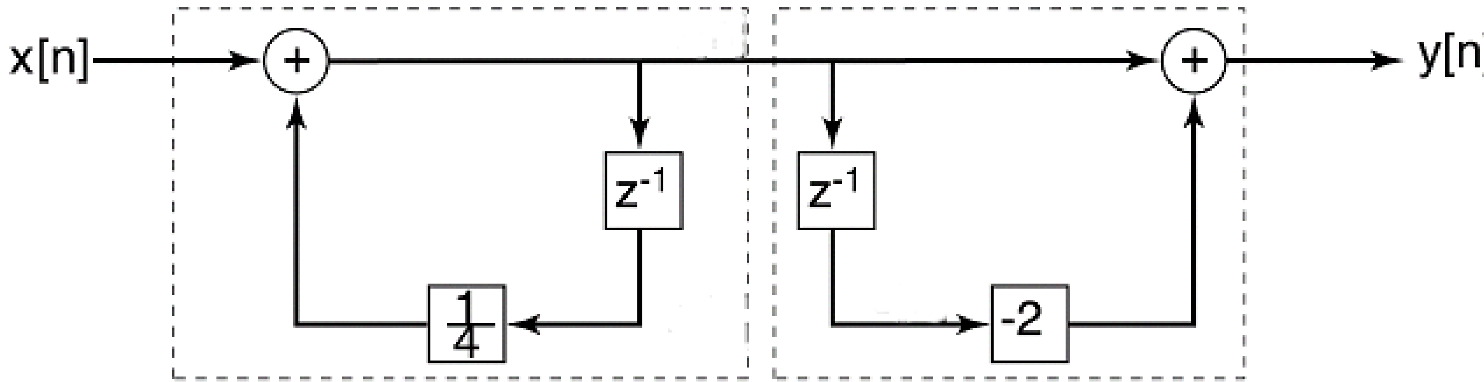
$$y[n] = \frac{1}{4}y[n-1] + x[n]$$

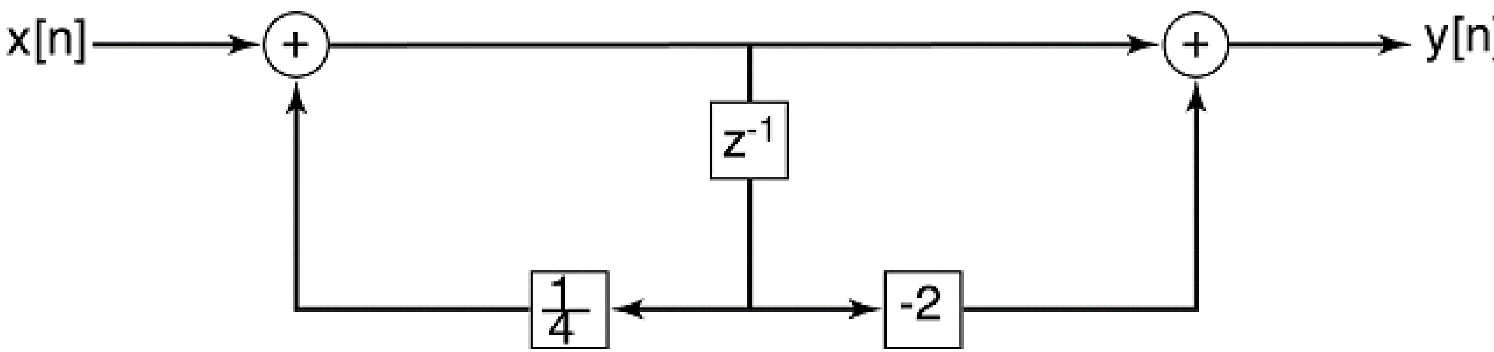
$\boxed{z^{-1}} \Leftrightarrow \boxed{D}$

Retardo

Ejemplo 2:

$$H(z) = \frac{1-2z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} = \left(\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}\right)(1-2z^{-1}) \text{ — }$$ Cascada de dos sistemas





Transformada unilateral z

$$\mathcal{X}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

Observe:

(1) Si $x[n] = 0$ para $n < 0$, $\mathcal{X}(z) = X(z)$

(2) TZ unilateral de $x[n]$ = TZ bilateral de $x[n]u[n]$ $\Rightarrow$ ROC *siempre* fuera de un círculo e *incluye* $z = \infty$

(3) Para sistemas LTI causales, $\mathcal{H}(z) = H(z)$

Propiedades de la transformada unilateral z (TUZ)

Muchas de las propiedades son análogas a las de la TBZ, por ejemplo:

- Propiedad de convolución (para $x_1[n<0] = x_2[n<0] = 0$)

$$x_1[n] * x_2[n] \overset{\mathcal{UZ}}{\longleftrightarrow} \mathcal{X}_1(z)\mathcal{X}_2(z)$$

- Pero existen diferencias importantes. Por ejemplo, *desplazamiento de tiempo*

$$y[n] = x[n-1] \longleftrightarrow \mathcal{Y}(z) = x[-1] + z^{-1}\mathcal{X}(z)$$

condición inicial

Derivación:

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} y[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n-1]z^{-n} = x[-1] + \sum_{n=1}^{\infty} x[n-1]z^{-n} \\ &= x[-1] + z^{-1} \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} x[m]z^{-m}}_{\mathcal{X}(z)}\end{aligned}$$

Uso de las TUZ en la resolución de las ecuaciones de diferencias con condiciones iniciales

$$y[n] + 2y[n-1] = x[n]$$

$$y[-1] = \beta, \quad x[n] = \alpha u[n] \longleftrightarrow \frac{\alpha}{1 - z^{-1}}$$

TUZ de la ecuación de diferencias

$$\mathcal{Y}(z) + 2\overbrace{\left[\beta + z^{-1}\mathcal{Y}(z)\right]}^{\mathcal{UZ}\{y[n-1]\}} = \frac{\alpha}{1 - z^{-1}}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{Y}(z) = -\underbrace{\frac{2\beta}{1 + 2z^{-1}}}_{ZIR} + \underbrace{\frac{\alpha}{(1 + 2z^{-1})(1 - z^{-1})}}_{ZSR}$$

ZIR — salida debida simplemente a las condiciones iniciales.
ZSR — salida debida simplemente a la entrada.

Ejemplo (continuación)

$\beta = 0 \;\; \Rightarrow$ el sistema está inicialmente en reposo:

ZSR

$$\mathcal{Y}(z) = \mathcal{H}(z)\mathcal{X}(z) = \underbrace{\frac{1}{1+2z^{-1}}}_{\mathcal{H}(z)}\underbrace{\frac{\alpha}{1-z^{-1}}}_{\mathcal{X}(z)}$$

$$\mathcal{H}(z) = H(z) = \frac{1}{1+2z^{-1}}$$

$\alpha = 0 \;\; \Rightarrow$ obtenga la respuesta a las condiciones iniciales

ZIR

$$\mathcal{Y}(z) = -\frac{2\beta}{1+2z^{-1}}$$

$$y[n] = -2\beta(-2)^n u[n]$$