

**6.003: Señales y sistemas—Otoño 2003**

**Examen final  
Martes 16 de diciembre de 2003**

---

**Instrucciones:** El examen consta de 7 problemas (paginas 2-33, y de un espacio en blanco para trabajar (paginas 34-37). Asegúrese de que no le falta ninguna pagina. Al final de este cuadernillo, se facilitan las tablas de las propiedades de las series de Fourier y las propiedades y las tablas de las transformadas de Fourier de DT y CT, así como las propiedades de la transformada  $z$  y de Laplace. **Escriba sus respuestas directamente en los espacios indicados en las páginas de este cuadernillo. No olvide escribir su nombre en todas y cada una de las páginas. Puede utilizar cuadernos de examen para el trabajo en borrador, pero no serán calificados.** Todos los diagramas y dibujos deberán incluir las correspondientes leyendas. Salvo que se indique lo contrario, **debe razonar las respuestas.** Este es un examen a libro cerrado, aunque los estudiantes pueden utilizar tres hojas  $8\ 1/2 \times 11$  para consultasa. No se autoriza el uso de calculadoras.

**NOMBRE:** \_\_\_\_\_

Indique su sección	Sección	Hora	Profesor de la clase de repaso
<input type="checkbox"/>	1	10-11	Prof. Zue
<input type="checkbox"/>	2	11-12	Prof. Zue
<input type="checkbox"/>	3	1- 2	Prof. Gray
<input type="checkbox"/>	4	11-12	Dr. Rohrs
<input type="checkbox"/>	5	12- 1	Prof. Voldman
<input type="checkbox"/>	6	12- 1	Prof. Gray
<input type="checkbox"/>	7	10-11	Dr. Rohrs
<input type="checkbox"/>	8	11-12	Prof. Voldman

---

Le rogamos no escriba nada en esta hoja a partir de la línea, ya que el espacio está reservado para uso de los examinadores:

Problema	Nº de puntos	Puntuación	Examinad.
1	30		
2	15		
3	35		
4	30		
5	30		
6	25		
7	35		
Total	200		

**PROBLEMA 1 (30 puntos)**

Sea  $h(t)$  una respuesta a impulso del lado derecho de un sistema y cuya transformada de Laplace viene dada por:

$$H(s) = \frac{10(-s + 1)}{(s + 10)(s + 1)}$$

**Apartado a.** halle la ecuación diferencial que describe al sistema.

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 11 \frac{dy(t)}{dt} + 10y(t) = -10 \frac{dx(t)}{dt} + 10x(t)$$

---

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{10(-s + 1)}{(s + 10)(s + 1)} = \frac{-10s + 10}{s^2 + 11s + 10}$$

$$Y(s)(s^2 + 11s + 10) = X(s)(-10s + 10)$$

$$\mathcal{L}^{-1} \{ s^2 Y(s) + 11sY(s) + 10Y(s) = -10sX(s) + 10X(s) \}$$

**Apartado b.** ¿Es causal el sistema?

SÍ o NO

**Breve explicación:**

Dado que  $H(s)$  es racional, es causal si  $h(s)$  se ubica en el lado derecho, o igualmente, si la ROC se extiende hacia la derecha desde el polo situado más a la derecha.  $h(s)$  se ubica en el lado derecho, por lo que, efectivamente, el sistema es causal.

**Página de trabajo del problema 1**

*El problema 1 continua en la página siguiente.*

**Apartado c.** La respuesta de este sistema a un escalón positivo comienza en una dirección negativa antes de girar. Demuestre esta afirmación hallando  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{ds(t)}{dt}$ . Justifique el método utilizado.

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{ds(t)}{dt} = \frac{-10}{\text{_____}}$$

(1)  $\frac{ds(t)}{dt} = h(t)$       (2) El teorema del valor inicial afirma que  $\lim_{t \rightarrow 0^+} h(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sH(s)$  si  $h(t) = 0$  para  $t < 0$ , sin impulsos ni singularidades de orden superior en  $t = 0$ . Puesto que  $h(t)$  es causal y que  $\mathcal{Q}(\mathcal{N}) \subset \mathcal{D}(\mathcal{D})$ , utilizamos el teorema del valor inicial.

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{ds(t)}{dt} = \lim_{t \rightarrow 0^+} h(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sH(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{10(-s+1)s}{(s+10)(s+1)} = -10$$

**Apartado d.** Sea  $H_I(s)$  la función de transferencia de un sistema inverso de  $H(s)$  estable pero no causal, es decir,  $H_I(s)H(s) = 1$ . Halle  $H_I(s)$  y su región de convergencia.

$$H_I(s) = \frac{-(s+1)(s+10)}{10(s-1)} \quad \text{ROC: } \Re\{s\} < 1$$

$$H_I(s) = \frac{1}{H(s)}$$

Para que sea estable, es necesario que la ROC incluya el eje  $j\omega$ . Por lo tanto, la ROC se extiende hacia la izquierda desde el polo en  $s = 1$ . Esto verifica también que  $h(t)$  es no causal.

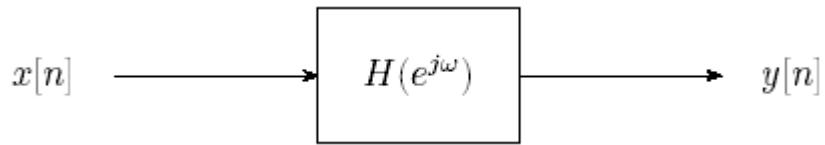
*Otoño 2003: examen final*

**NOMBRE:** \_\_\_\_\_

**Página de trabajo del problema 1**

**PROBLEMA 2( 15 PUNTOS)**

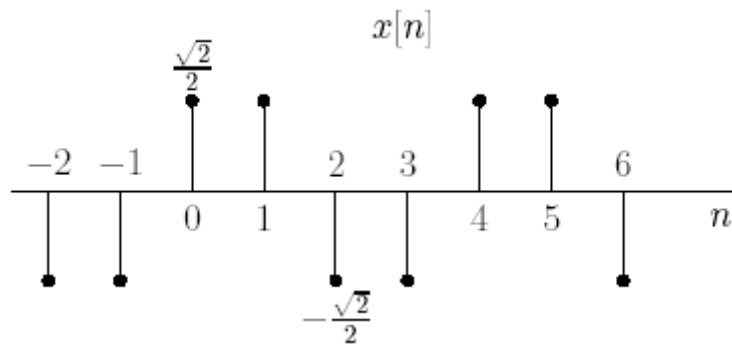
Considere el siguiente sistema LTI de DT:



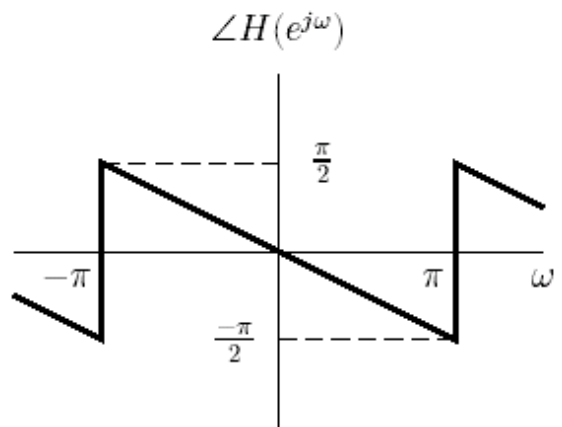
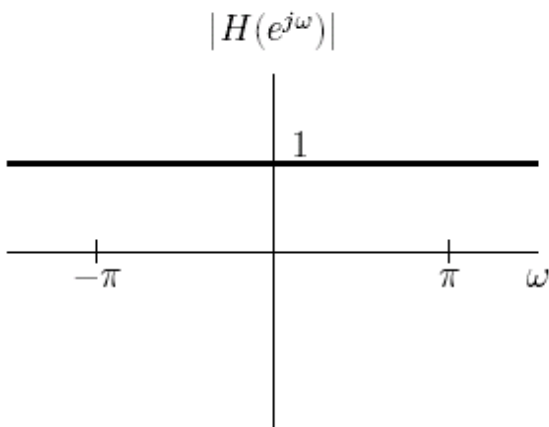
La secuencia de entrada es:

$$x[n] = \cos\left(\frac{5\pi}{2}n - \frac{\pi}{4}\right)$$

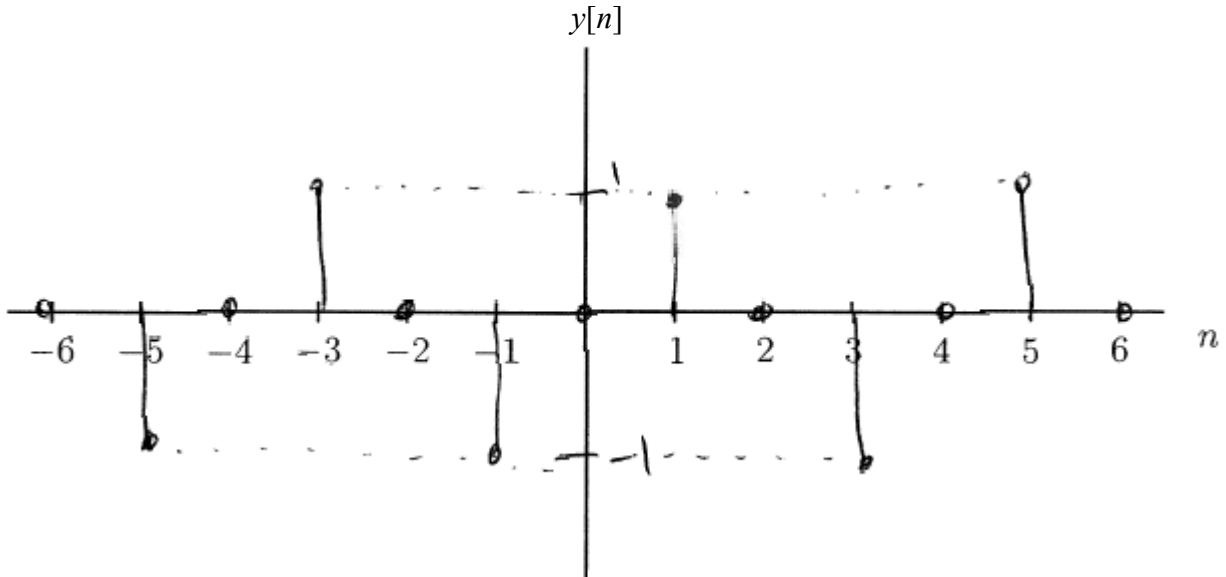
tal como se indica en el siguiente grafico:



Determine y realice el diagrama de  $y[n]$  si la magnitud y la fase de  $H(e^{j\omega})$  son:



$$y[n] = \sin \frac{\pi}{2} n$$



$$x[n] = \cos\left(\frac{5\pi}{2}n - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}e^{j\frac{5\pi}{2}n}e^{-j\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{5\pi}{2}n}e^{-j\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}e^{j\frac{\pi}{2}n} + \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}e^{-j\frac{\pi}{2}n}$$

Tomar la transformada de Fourier de cada término utilizando las tablas.

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left( \pi e^{-j\frac{\pi}{4}} \delta\left(\omega - \frac{\pi}{2} + 2\pi l\right) + \pi e^{j\frac{\pi}{4}} \delta\left(\omega + \frac{\pi}{2} + 2\pi l\right) \right)$$

$$Y(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| |H(e^{j\omega})| \angle X(e^{j\omega}) \angle H(e^{j\omega})$$

$Y(e^{j\omega})$  existe solamente ubicaciones de impulsos de  $X(e^{j\omega})$

$$Y\left(e^{j\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi l\right)}\right) = \pi \delta\left(\omega - \frac{\pi}{2} + 2\pi l\right) e^{-j\frac{\pi}{4}} e^{-j\frac{\pi}{4}} \quad l = 0, \pm 1, \dots$$

$$Y\left(e^{j\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi l\right)}\right) = \pi \delta\left(\omega + \frac{\pi}{2} + 2\pi l\right) e^{j\frac{\pi}{4}} e^{j\frac{\pi}{4}} \quad l = 0, \pm 1, \dots$$

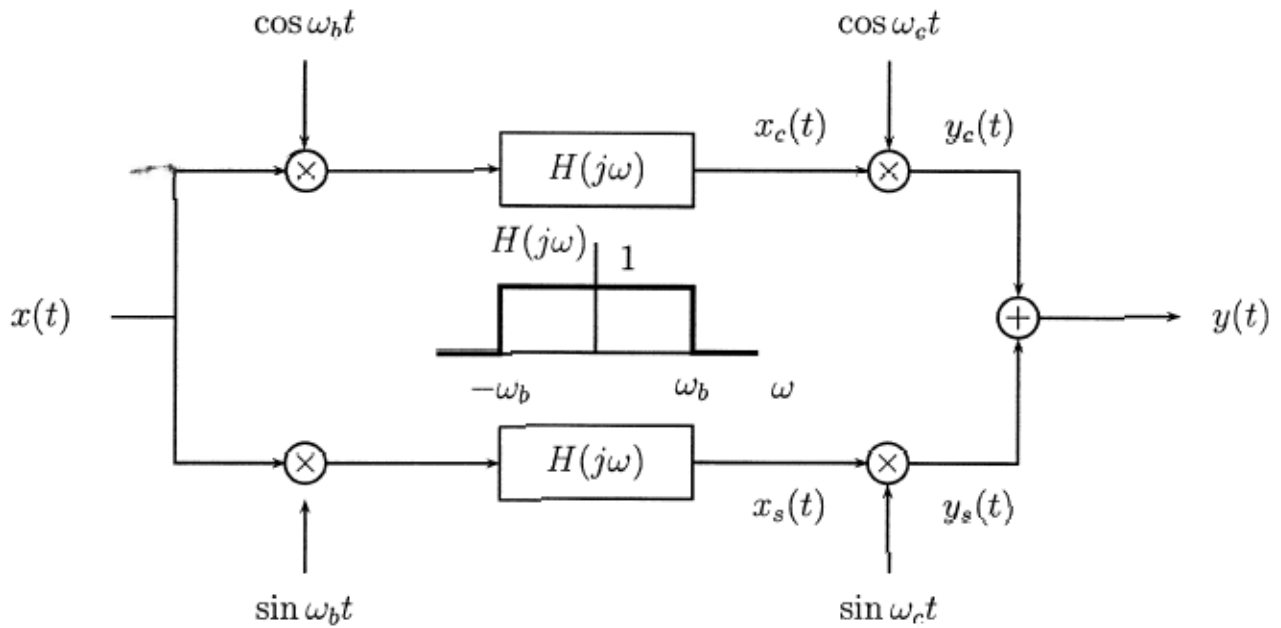
$Y(e^{j\omega}) = 0$  para cualquiera distinto de  $\omega$ .

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{j} \delta\left(\omega - \frac{\pi}{2} + 2\pi l\right) - \frac{\pi}{j} \delta\left(\omega + \frac{\pi}{2} + 2\pi l\right) \Rightarrow y[n] = \sin \frac{\pi}{2} n$$

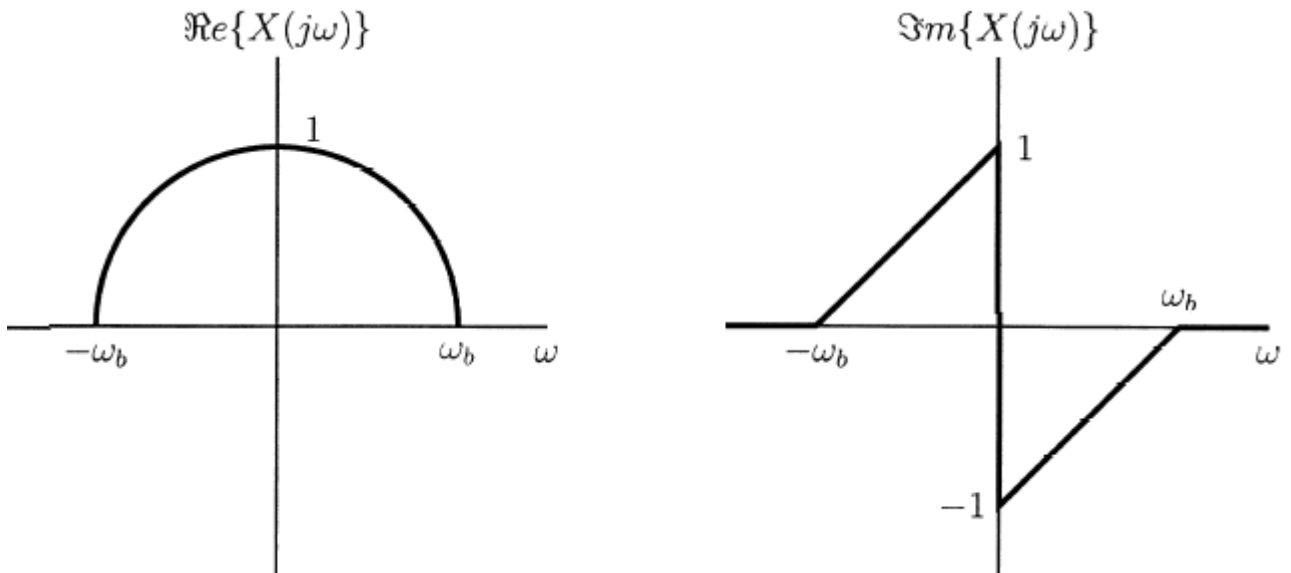
## **Página de trabajo del problema 2**

**PROBLEMA 3 (35 PUNTOS)**

Considere el siguiente sistema:

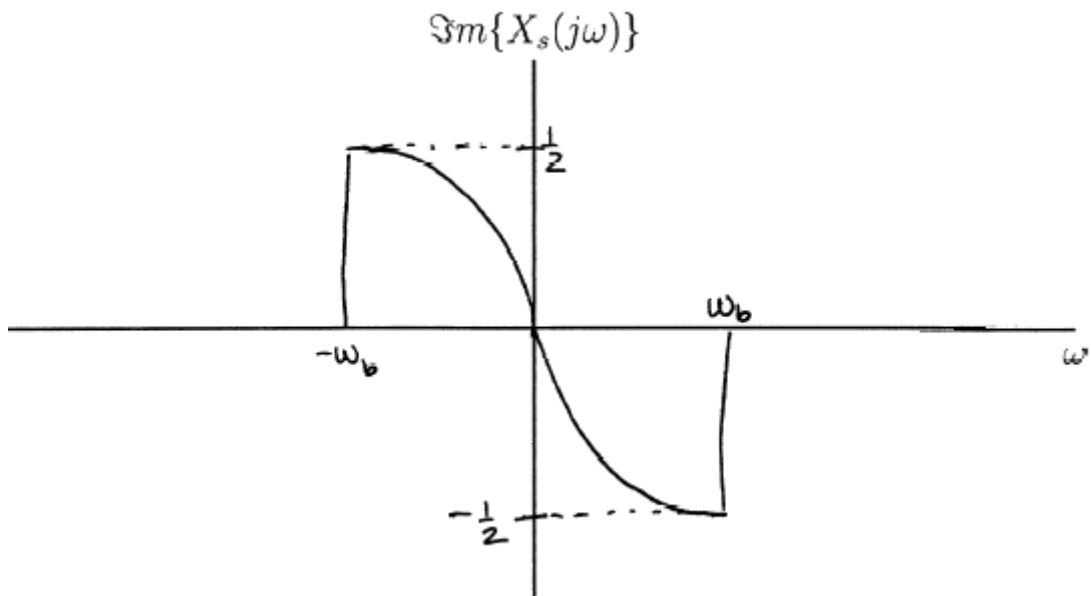
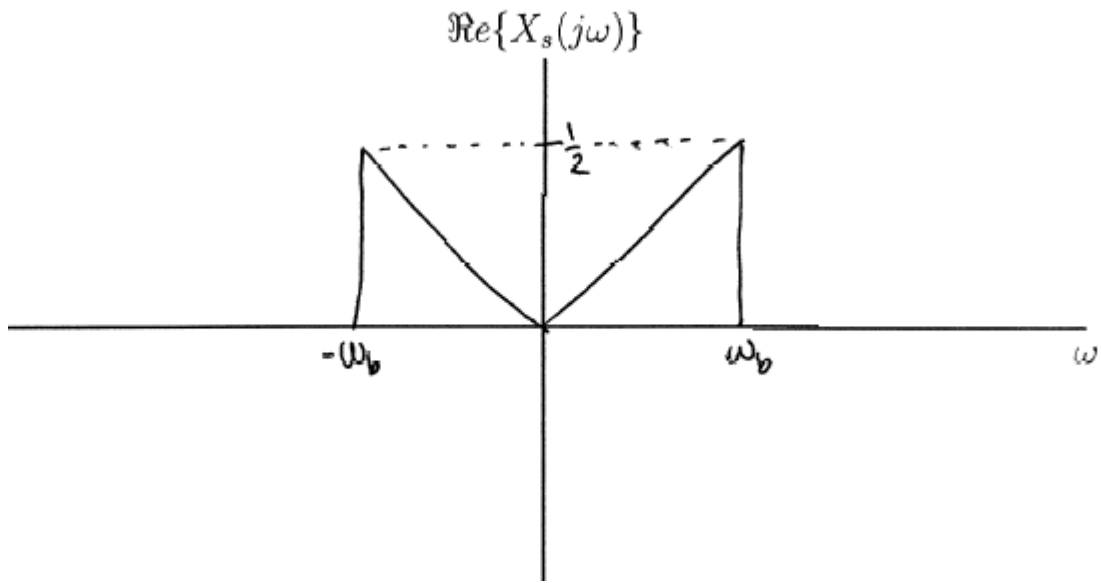


La transformada de Fourier de  $x(t)$ ,  $X(j\omega)$  tiene las siguientes partes reales e imaginarias:



Para su comodidad, le facilitamos las anteriores figuras idénticas, así como las tablas de la transformada.

**Apartado a.** Realice diagramas etiquetados de las partes reales e imaginarias de  $X_s(j\omega)$ .




**Página de trabajo del problema 3**

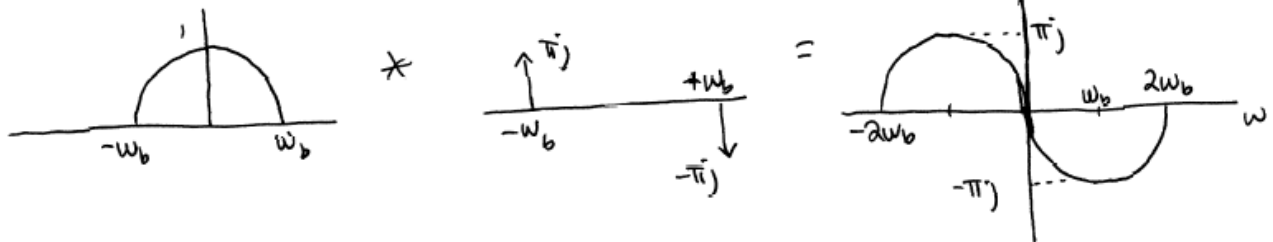
Apartado a: \_

$$X_s(j\omega) = \frac{1}{2\pi} [X(j\omega) * \mathcal{F}\{\sin\omega_b t\}] \times H(j\omega)$$

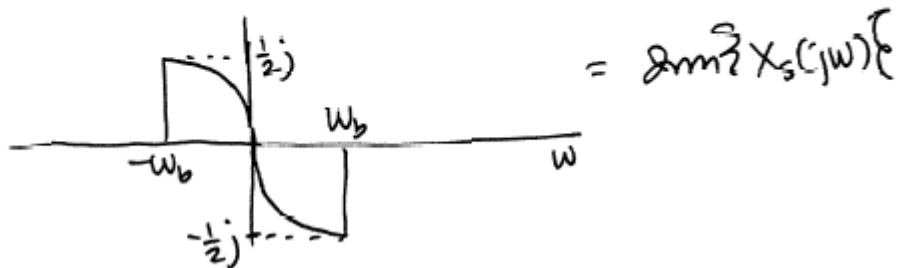
$$= \frac{1}{2\pi} [\text{Re}\{X(j\omega)\} * \mathcal{F}\{\sin\omega_b t\} + j \text{Im}\{X(j\omega)\} * \mathcal{F}\{\sin\omega_b t\}] \times H(j\omega)$$

$$\mathcal{F}\{\sin\omega_b t\} = \pi j \delta(\omega + \omega_b) - \pi j \delta(\omega - \omega_b) \rightarrow$$


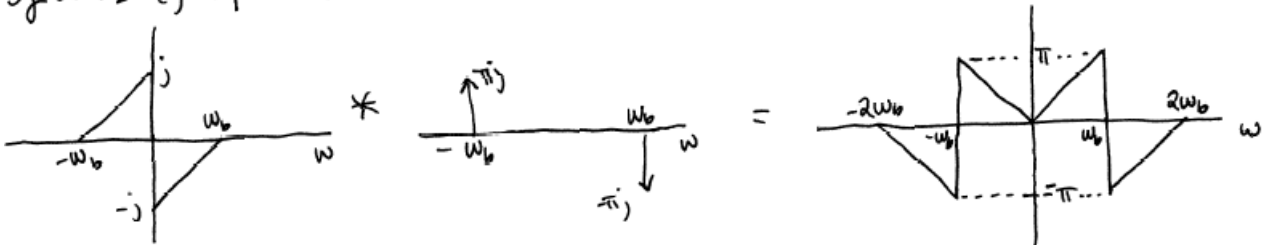
$$\text{Re}\{X(j\omega)\} * \mathcal{F}\{\sin\omega_b t\} \rightarrow$$



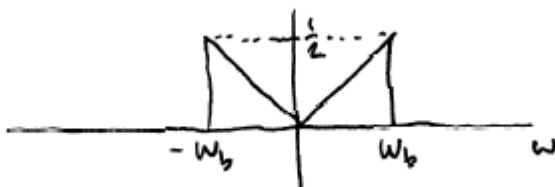
$$\frac{1}{2\pi} [\text{Re}\{X(j\omega)\} * \mathcal{F}\{\sin\omega_b t\}] \times H(j\omega) = \rightarrow$$



$$j \text{Im}\{X(j\omega)\} * \mathcal{F}\{\sin\omega_b t\} \rightarrow$$

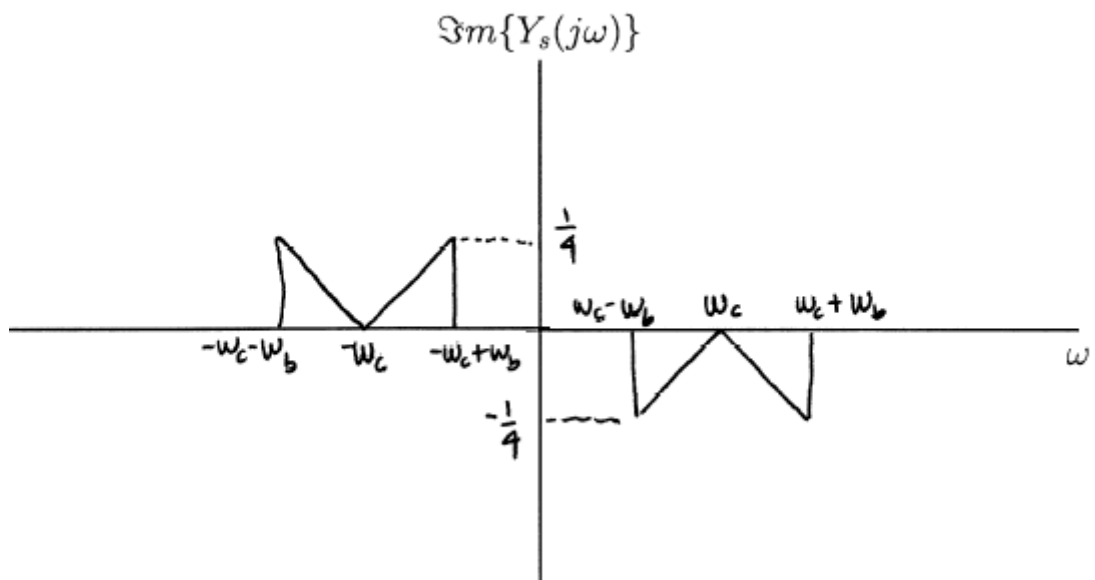
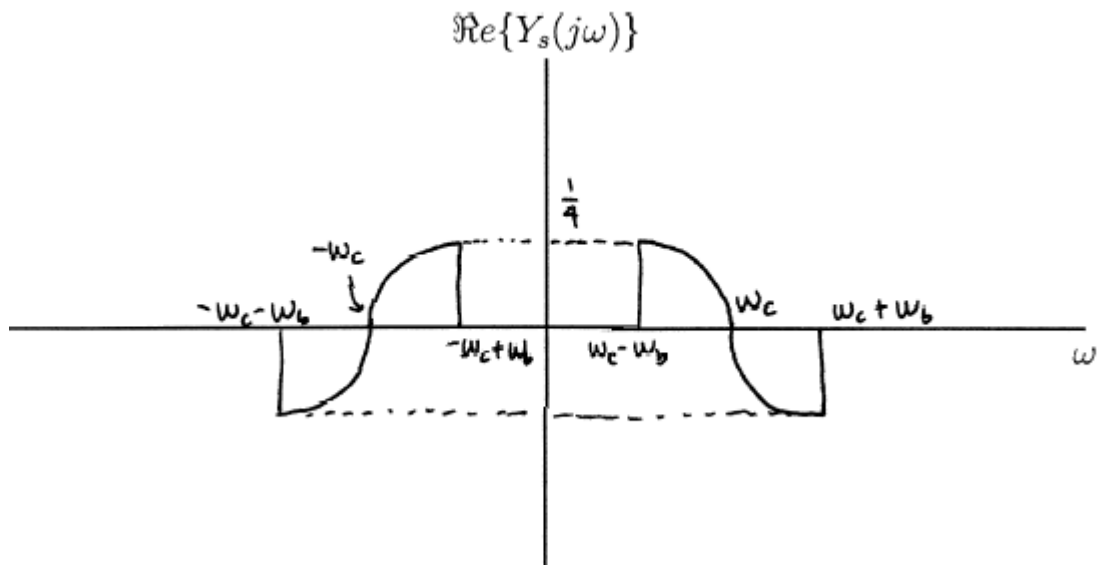


$$\frac{1}{2\pi} [j \text{Im}\{X(j\omega)\} * \mathcal{F}\{\sin\omega_b t\}] \times H(j\omega) \rightarrow$$



El problema 3 continua en la página siguiente.

**Apartado b.** Realice diagramas etiquetados de las partes reales e imaginarias de  $Y_s(j\omega)$ .



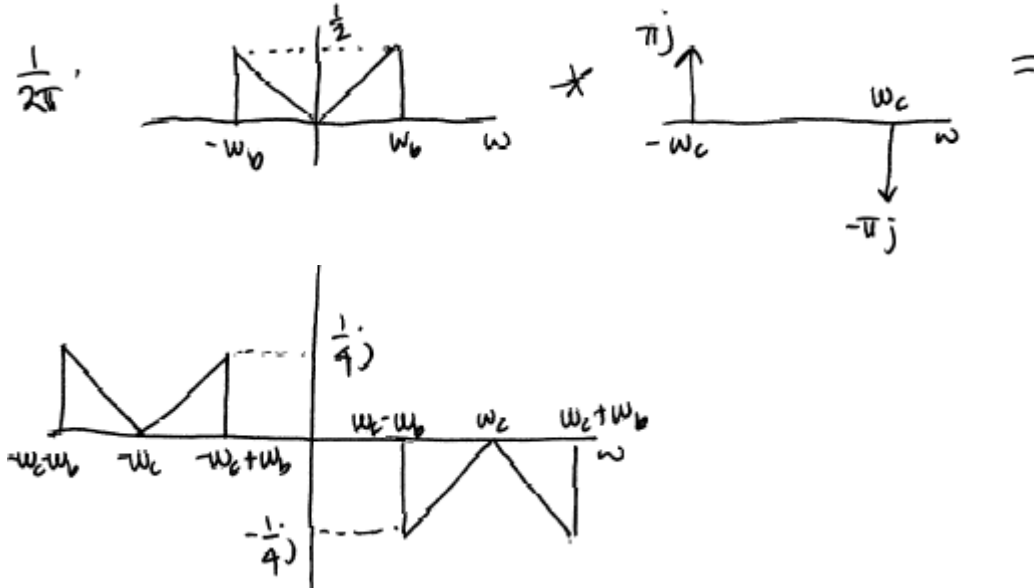
**Página de trabajo del problema 3**

Apartado b:

$$Y_s(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X_s(j\omega) * \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2} \sin \omega_c t\right\}$$

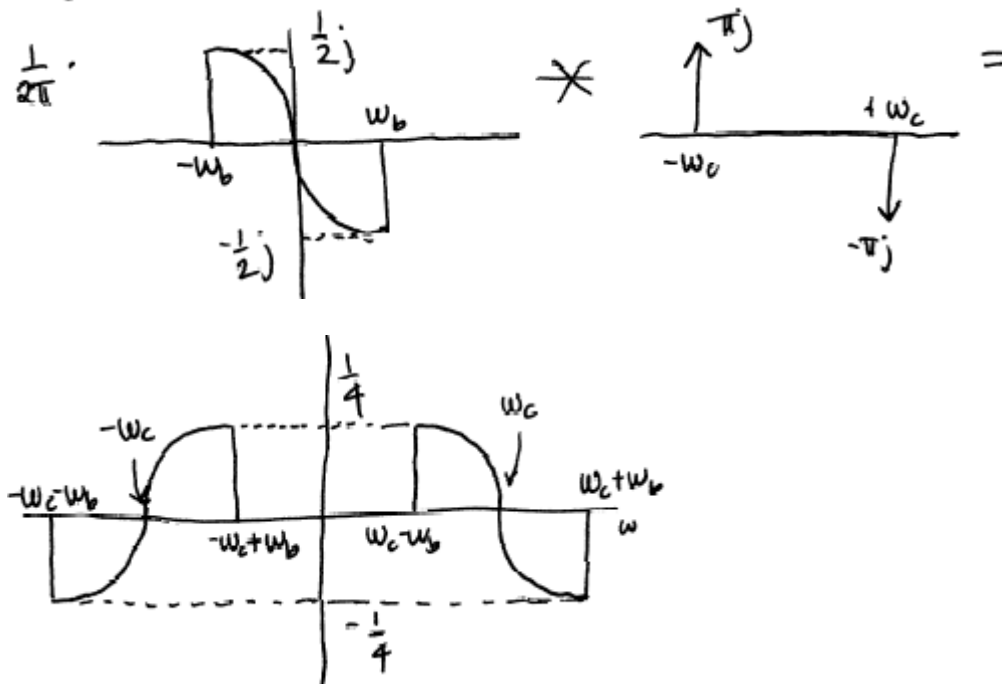
$$= \frac{1}{2\pi} \left( \operatorname{Re}\{X_s(j\omega)\} + j \operatorname{Im}\{X_s(j\omega)\} \right) * \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2} \sin \omega_c t\right\}$$

$$\frac{1}{2\pi} \operatorname{Re}\{X_s(j\omega)\} * \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2} \sin \omega_c t\right\} \quad \Downarrow$$



Por lo tanto, ésta se convierte en la parte imaginaria de  $Y_s(j\omega)$ .

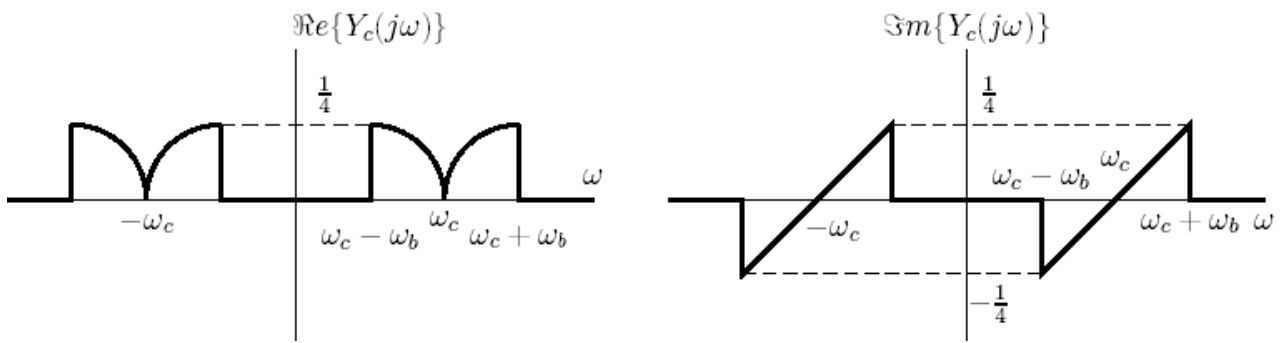
$$\frac{1}{2\pi} j \operatorname{Im}\{X_s(j\omega)\} * \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2} \sin \omega_c t\right\} \quad \Downarrow$$



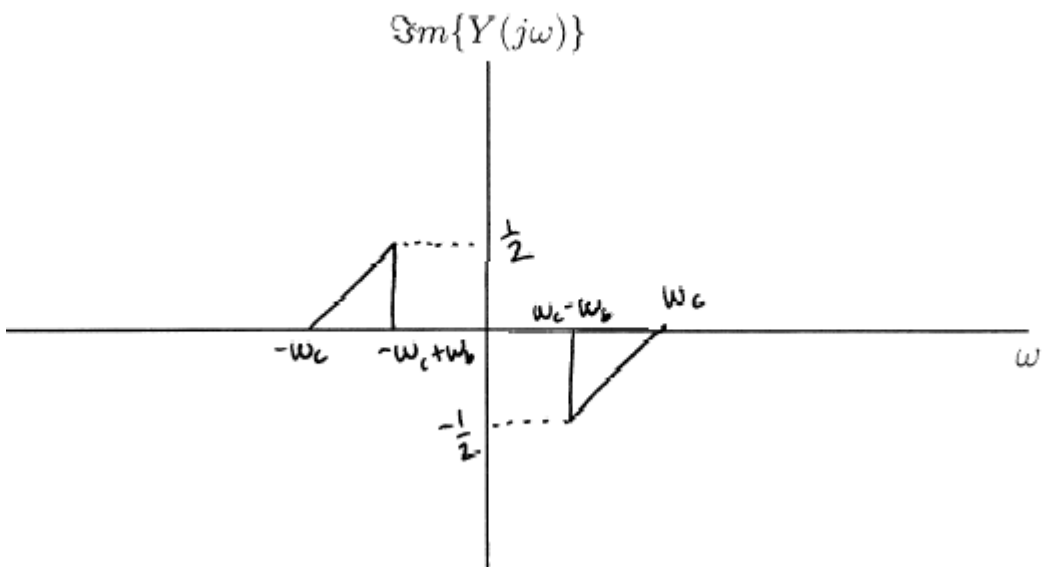
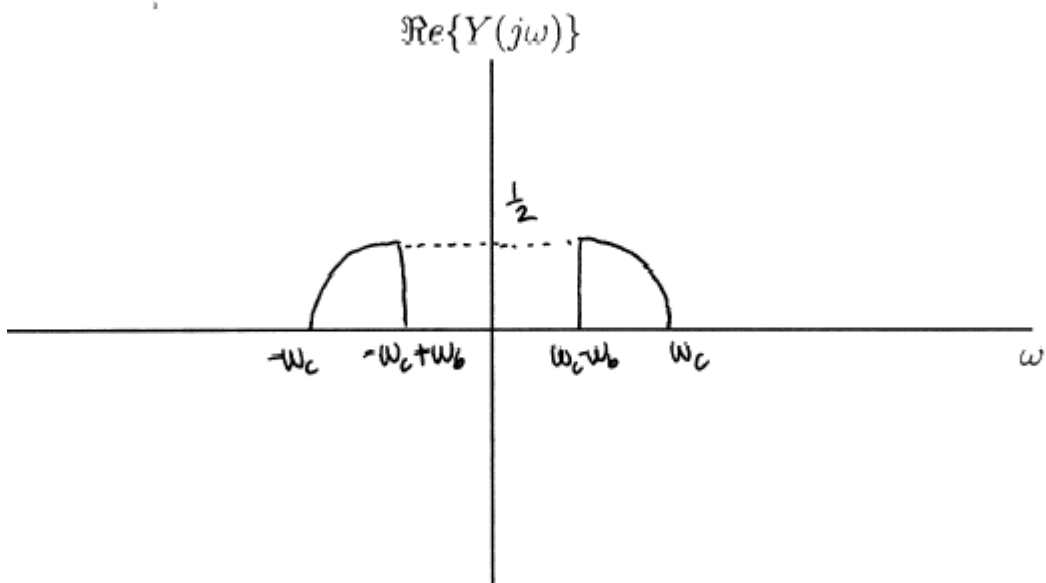
Por lo tanto, ésta se convierte en la parte imaginaria de  $Y_s(j\omega)$ .

*El problema 3 continua en la página siguiente.*

**Apartado c.**  $Y_C(j\omega)$  tiene las siguientes partes reales e imaginarias:

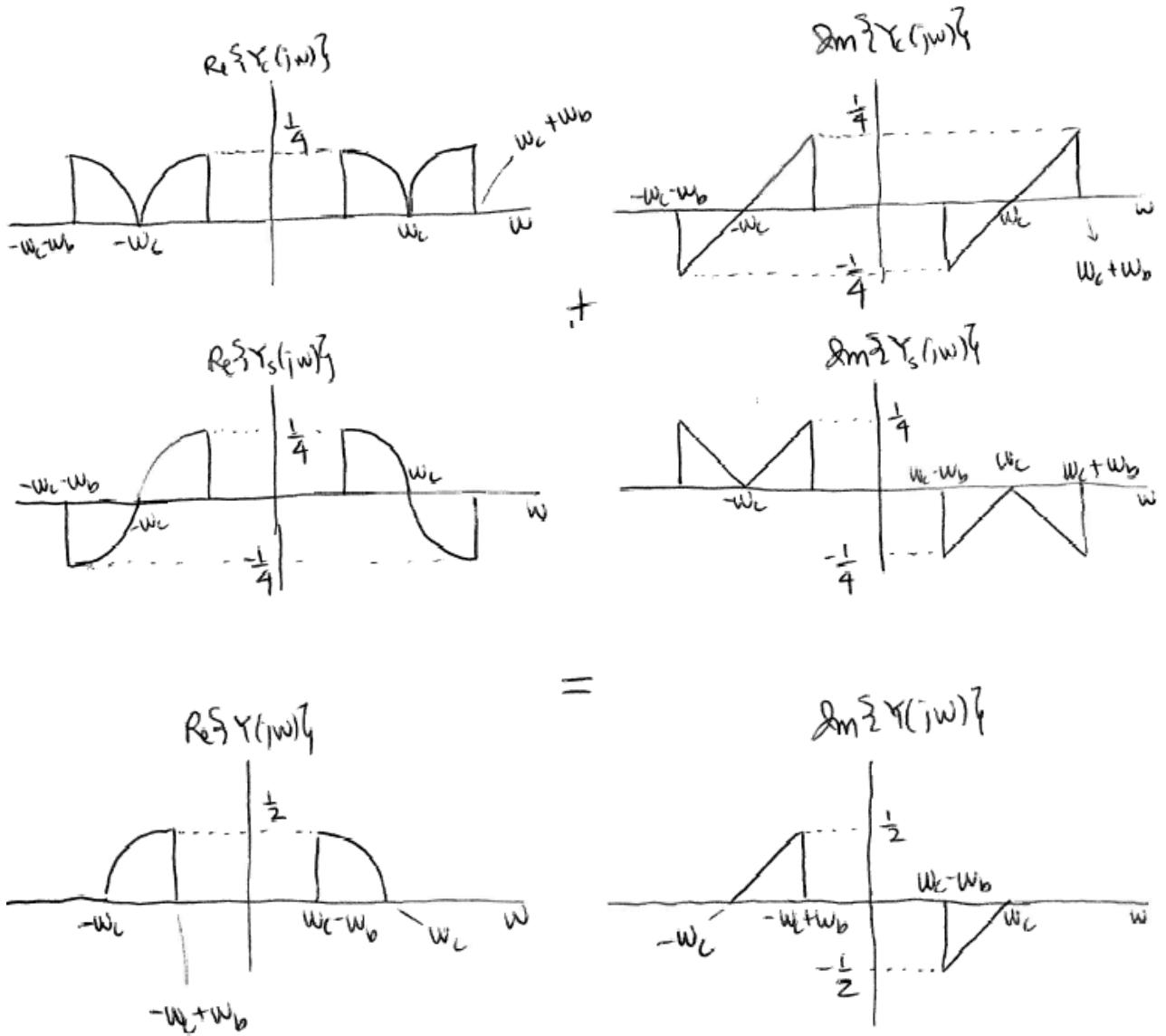


Realice diagramas etiquetados de las partes reales e imaginarias de  $Y(j\omega)$ .



**Página de trabajo del problema 3**

Apartado c: es necesario añadir  $Y_C(j\omega) + Y_S(j\omega)$ .

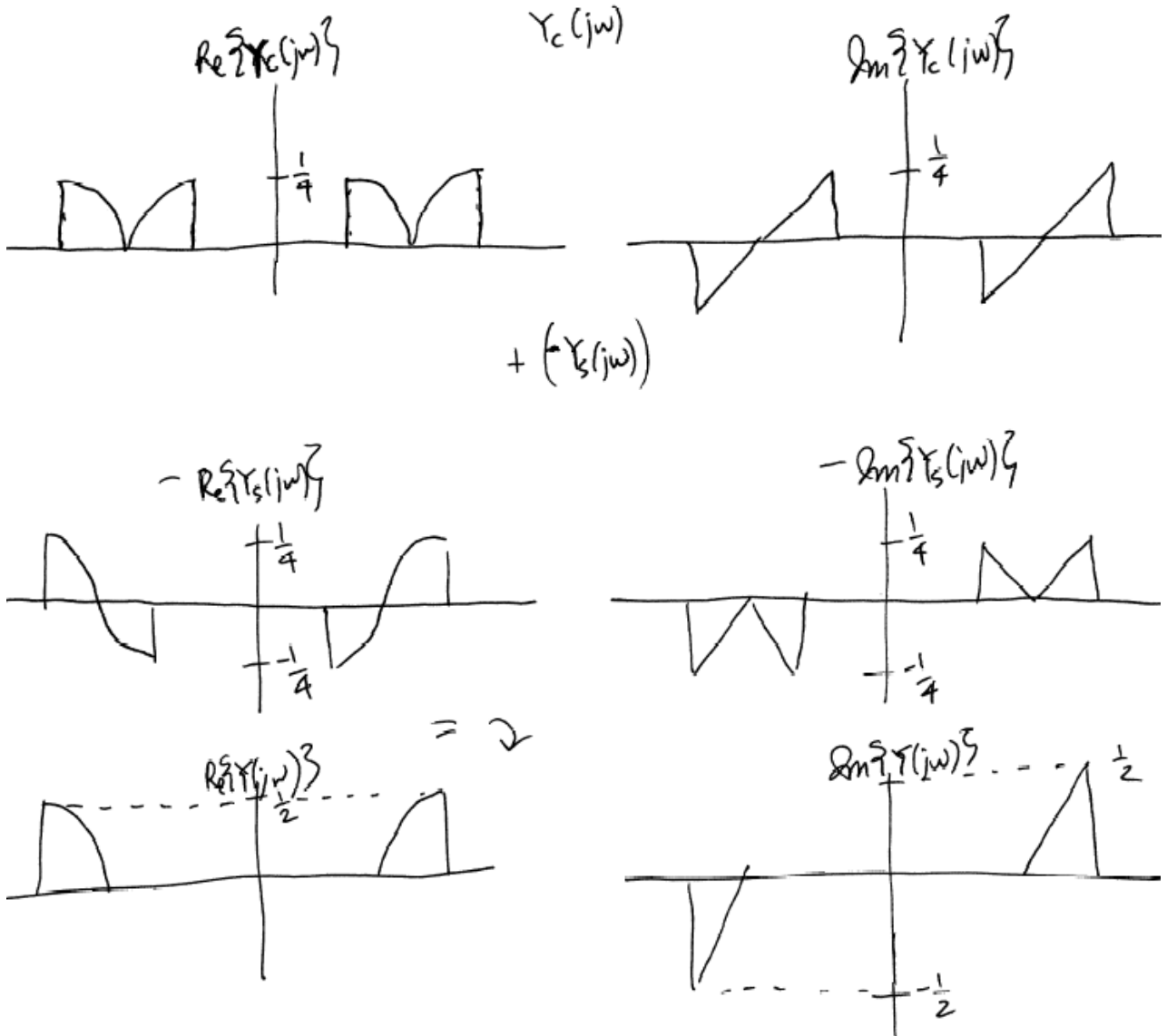


El problema 3 continua en la página siguiente.

**Apartado d.** ¿Que pequeño cambio sería necesario en este sistema para crear una modulación de banda lateral inferior?

En lugar de tener  $y(t) = y_c(t) + y_s(t)$ , hemos construido el sistema tal que  $y(t) = y_c(t) - y_s(t)$ .

Obsérvese lo siguiente:



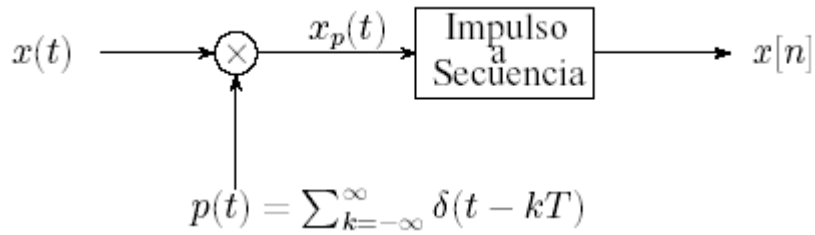
*Otoño 2003: examen final*

**NOMBRE:** \_\_\_\_\_

**Página de trabajo del problema 3**

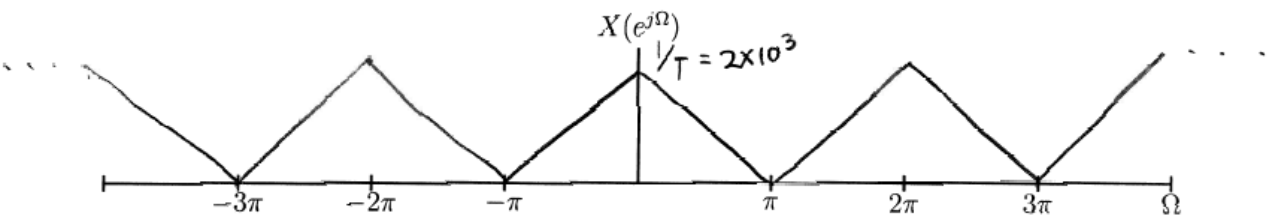
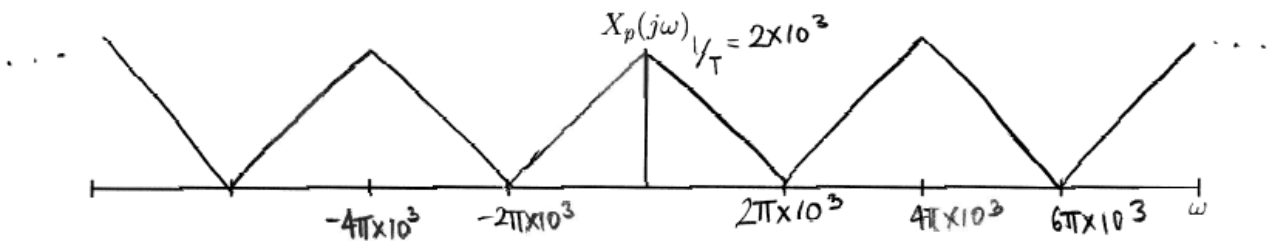
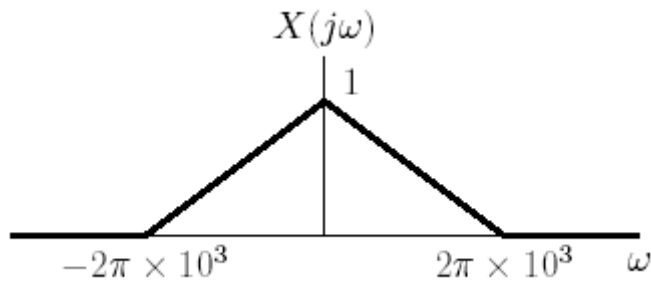
**PROBLEMA 4 (30 puntos)**

Considere el siguiente sistema:

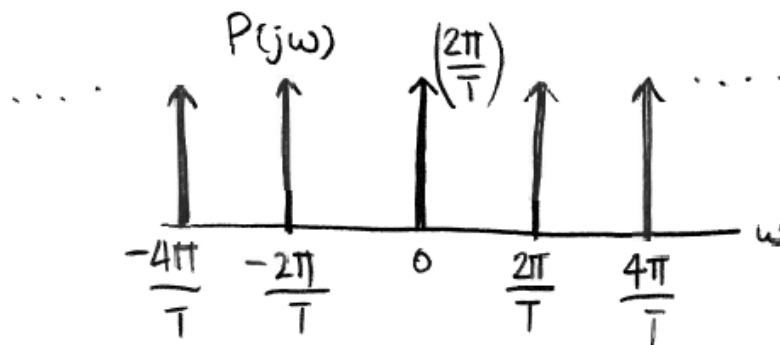


Las transformadas de Fourier de  $x(t)$ ,  $x_p(t)$  y  $x[n]$  viene indicadas, respectivamente, por  $X(j\omega)$ ,  $X_p(j\omega)$  y  $X(e^{j\Omega})$ .

**Apartado a.** Si  $X(j\omega)$  es tal como se indica a continuación, y  $T = 0.5 \times 10^{-3}$  seg., realice diagramas etiquetados de  $X_p(j\omega)$  y  $X(e^{j\Omega})$ .



## Página de trabajo del problema 4



$$X_p(j\omega) = \frac{1}{2\pi} P(j\omega) * X(j\omega) \quad \text{y} \quad \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot \frac{1}{0.5 \times 10^{-3}} = 4\pi \times 10^3$$

$X(e^{j\omega})$  es simplemente  $X_p(j\omega)$  con una escala en el eje de frecuencia de  $T = 0.5 \times 10^{-3}$ .

*El problema 4 continua en la página siguiente.*

**Apartado b.** Utilice el mismo  $X(j\omega)$  y  $T$  del **apartado a**, determine:

(i)  $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt$

(ii)  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]$ .

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt = \underline{\quad 1 \quad} \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] = \underline{\quad 2 \times 10^3 \quad}$$

**Apartado c.** A continuación, suponga que  $x(t)$  es de banda limitada, es decir,  $X(j\omega) = 0$  para  $|\omega| \geq W$ , de lo contrario es arbitrario.

Se ha afirmado que para valores apropiados de  $T$ , es decir,  $T < A$  para algún valor de  $A$ , al área total bajo la señal de entrada de tiempo continuo  $x(t)$  es  $T$  veces la suma de  $x[n]$ . ¿Cree que esta afirmación es cierta?, es decir, ¿existe alguna limitación entre  $T$  y  $W$  que **garantice** lo siguiente?:

$$T \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt ?$$

Si su respuesta es afirmativa, especifique en términos de  $W$  el valor inferior de  $A$  para el cual es cierta la afirmación anterior. Si, por el contrario, su respuesta es negativa, razone claramente por que.

**SÍ**

**NO**

$$\frac{2\pi}{W}$$

A = \_\_\_\_\_

Explicación:

No hay superposición en  $\Omega = 0$  pt cuando

$$2\pi - WT > 0$$

$$\therefore T < \frac{2\pi}{W}$$

**Página de trabajo del problema 4**

$$\begin{aligned}
 \text{(b)} \quad \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \Big|_{\omega=0} \\
 &= X(j\omega) \Big|_{\omega=0} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

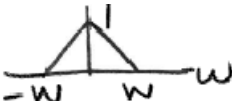
$$\begin{aligned}
 \text{Igualmente:} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n} \Big|_{\Omega=0} \\
 &= X(e^{j\Omega}) \Big|_{\Omega=0} \\
 &= 2 \times 10^3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(c) Sabemos que:} \quad X(e^{j\Omega}) \Big|_{\Omega=0} &= \frac{1}{T} X(j\omega) \Big|_{\omega=0} \\
 TX(e^{j\Omega}) \Big|_{\Omega=0} &= X(j\omega) \Big|_{\omega=0}
 \end{aligned}$$

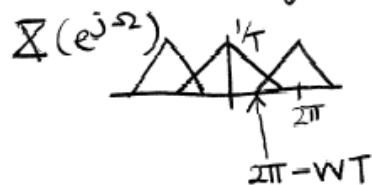
A partir del apartado (c), sabemos que:

$$\begin{aligned}
 X(e^{j\Omega}) \Big|_{\Omega=0} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \\
 X(j\omega) \Big|_{\omega=0} &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, necesitamos:  $TX(e^{j\Omega}) \Big|_{\Omega=0} = X(j\omega) \Big|_{\omega=0}$

Suponiendo que:  $X(j\omega)$  es 

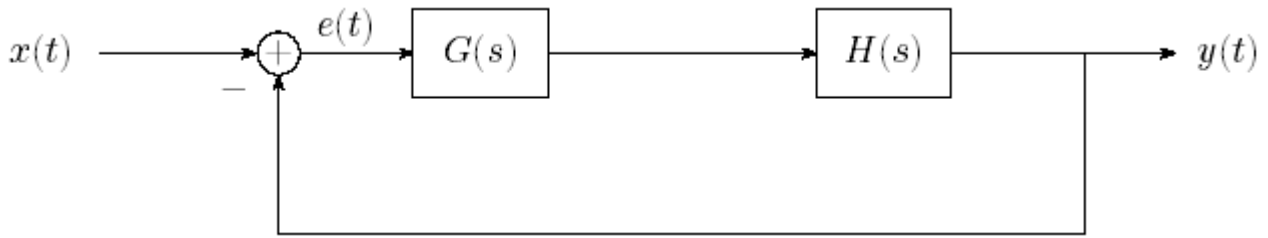
En el muestreo sub-Nyquist, tenemos:



Mientras que las imágenes no se superpongan entre sí en  $\Omega = 0$ , se mantendrá la propiedad.  $\therefore 2\pi - WT > 0$

**PROBLEMA 5 (30 puntos)**

Considere el siguiente sistema de retroalimentación:



donde  $H(s) = \frac{1}{s^2}$  es la planta,  $x(t)$  es la entrada de referencia,  $e(t) = x(t) - y(t)$  es la señal de error e  $y(t)$  es la salida de la planta  $H(s)$ .

**Apartado a.** ¿Es  $H(s)$  estable ?

SÍ o NO

**Razone brevemente la respuesta:**

Polos en el eje  $j\omega$ .  $\therefore$  ROC no puede incluir el eje  $j\omega$ .

**Apartado b.** Halle las funciones del sistema  $\frac{Y(s)}{X(s)}$  y  $\frac{E(s)}{X(s)}$ . Exprese las respuestas en términos de potencias de  $s$  y  $G(s)$ .

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\frac{G(s)}{s^2 + G(s)}}{\hspace{15em}}$$

$$\frac{E(s)}{X(s)} = \frac{\frac{s^2}{s^2 + G(s)}}{\hspace{15em}}$$

**Página de trabajo del problema 5**

(b) Utilizando la fórmula de Black:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G(s)H(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

Si se sustituye  $H(s) = \frac{1}{S^2}$ :

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\frac{G(s)}{S^2}}{1 + \frac{G(s)}{S^2}} = \frac{G(s)}{S^2 + G(s)}$$

$$\frac{E(s)}{X(S)} = \frac{1}{1 + G(s)H(s)} = \frac{1}{1 + \frac{G(s)}{S^2}} = \frac{S^2}{S^2 + G(s)}$$

**Apartado c.** Suponga que  $G(s) = K_d s + K_p$  donde  $K_d$  y  $K_p$  son números reales. Halle los valores de  $K_d$  y  $K_p$  que hagan que el sistema de bucle cerrado este críticamente amortiguado con una frecuencia natural no amortiguada de 10 rad/s.

$$K_d = \underline{\quad 20 \quad}$$

$$K_p = \underline{\quad 100 \quad}$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K_d s + K_p}{S^2 + K_d s + K_p}$$

Si lo comparamos con nuestra forma estándar en el denominador polinomial de  $S^2 + \left\{ \omega_n s + \omega_n^2 \right\}$ , tenemos  $K_p = \omega_n^2$  y  $K_d = 2\omega_n$ .

$$\text{Frecuencia natural} = 10 = \omega_n$$

$$\therefore K_p = 10^2 = 100$$

Para una amortiguación crítica  $\zeta = 1$

$$\begin{aligned} \therefore K_d &= 2(\omega_n) \quad (10) \\ &= 20 \end{aligned}$$

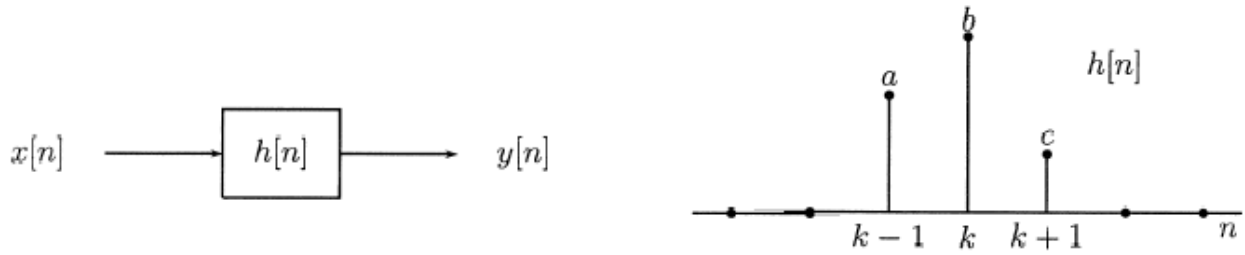
*Otoño 2003: examen final*

**NOMBRE:** \_\_\_\_\_

**Página de trabajo del problema 5**

**PROBLEMA 6 (25 puntos)**

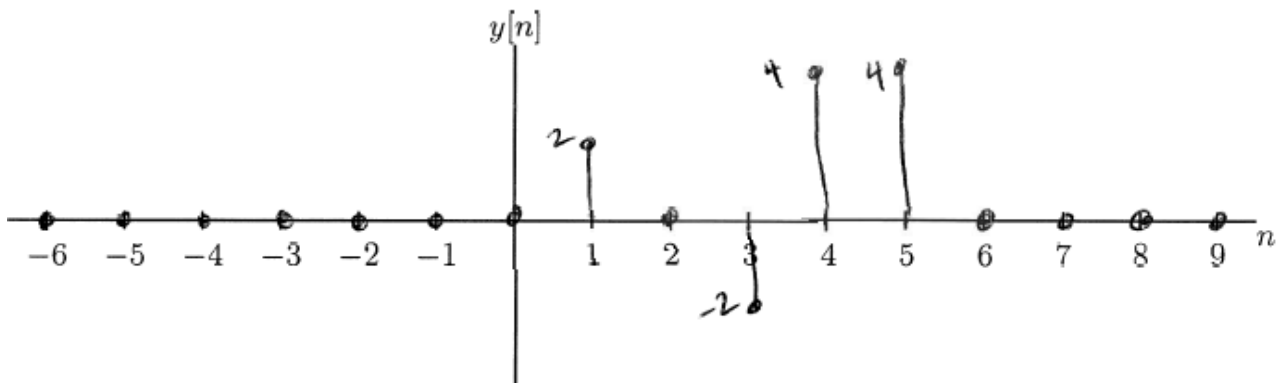
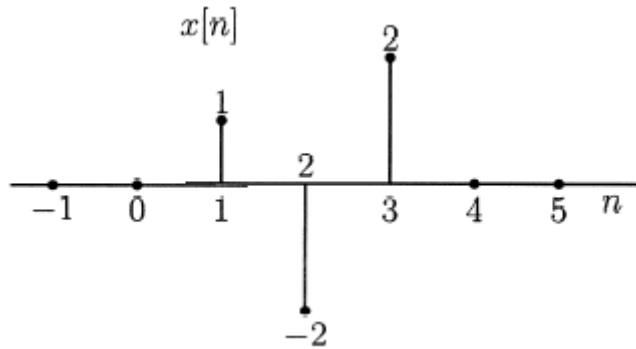
Considere el siguiente sistema LTI de DT cuya respuesta de muestra unitaria,  $h[n]$ , es:



donde  $k$  es un entero desconocido y  $a$ ,  $b$ , y  $c$  son números reales desconocidos. Se sabe que  $h[n]$  cumple las condiciones siguientes:

- (i) Sea  $H(e^{j\omega})$  la transformada de Fourier de  $h[n]$ .  $H(e^{j\omega})e^{j\omega}$  es real y par.
- (ii) Si  $x[n] = (-1)^n$  para todo  $n$ , entonces  $y[n] = 0$ .
- (iii) Si  $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$  para todo  $n$ , entonces  $y[2] = \frac{9}{2}$ .

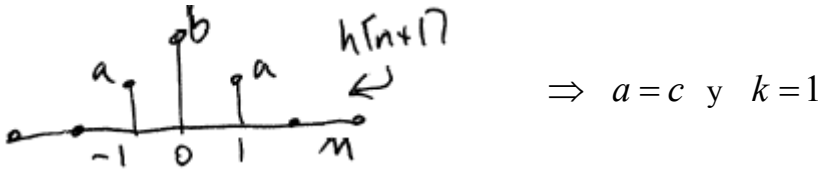
Realice un diagrama etiquetado de la salida  $y[n]$  cuando la entrada  $x[n]$  es la que se indica a continuación. Su respuesta no debería incluir  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , o  $k$ .



**Página de trabajo del problema 6**

(1)  $H(z) = az^{-(k-1)} + bz^{-k} + cz^{-(k+1)}$

(2) Dado que  $H(e^{j\omega})e^{j\omega}$  es real y par y que  $h[n-n_0] \xrightarrow{\mathcal{F}} H(e^{j\omega})e^{-j\omega n_0}$ , entonces  $h[n+1]$  es real y par.



(3)  $H(z)0a + bz^{-1} + az^{-2} = h[0] + h[1]z^{-1} + h[2]z^{-2}$

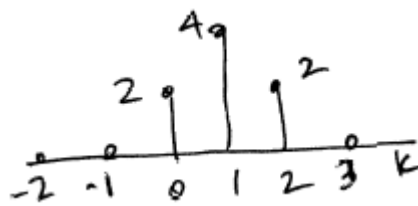
(4) Si  $x[n] = (-1)^n$   $y[n] = 0 \Rightarrow y[n] = (1)^n H(-1) = 0 \Rightarrow H(-1) = 0$   
 ( $h[n]$  es una señal finita, por lo que  $H(-1)$  existe)  
 $H(-1) = a - b + a = 0 \quad 2a = b$

(5) Si  $x[n] = \frac{1}{2} u[n]$   $y[2] = \frac{9}{2}$

$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \Rightarrow y[2] = x[0]h[2] + x[1]h[1] + x[2]h[0]$

$y[2] = \frac{9}{2} = 1 \cdot a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{4}a = \frac{5}{4}a + \frac{1}{2}(2a) = \frac{9}{4}a$

$a = 2 \quad b = 4 \quad c = 2$

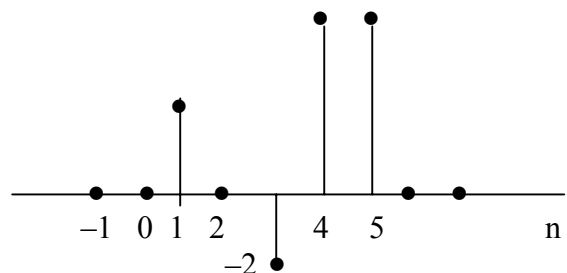


(6)  $Y(z) = H(z)X(z) = (2 + 4z^{-1} + 2z^{-2})(z^{-1} - 2z^{-2} + 2z^{-3})$

$Y(z) = 2z^{-1} + 4z^{-2} - 4z^{-2} + 4z^{-3} - 8z^{-3} + 2z^{-3} + 8z^{-4} - 4z^{-4} + 4z^{-5}$   
 $= 2z^{-1} - 2z^{-3} + 4z^{-4} + 4z^{-5}$

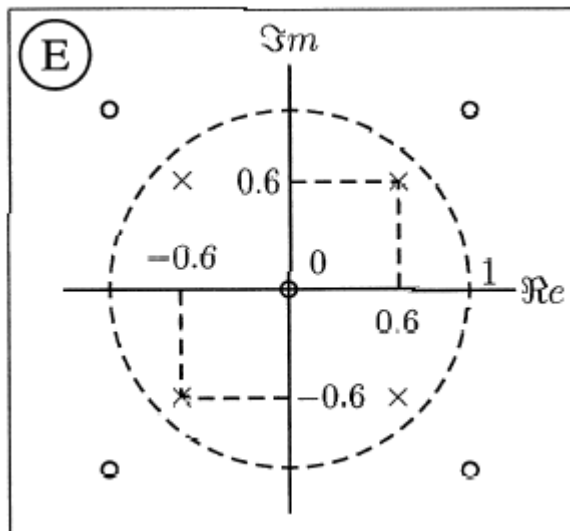
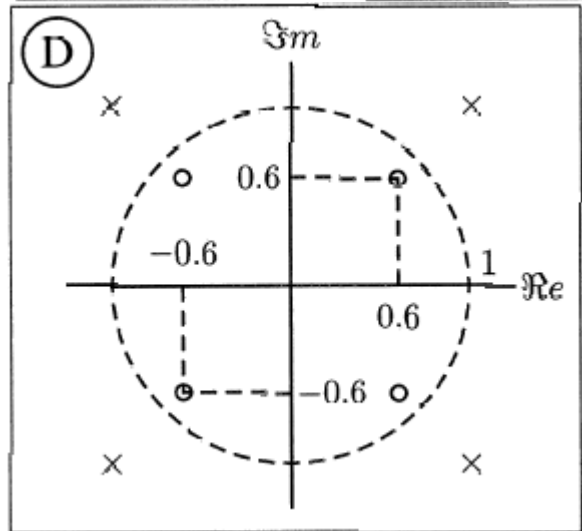
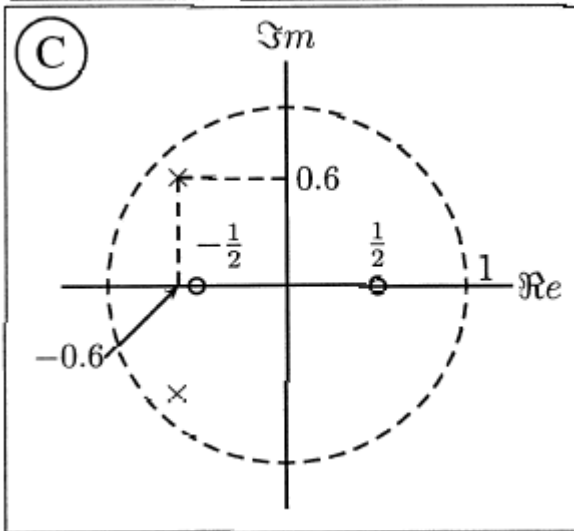
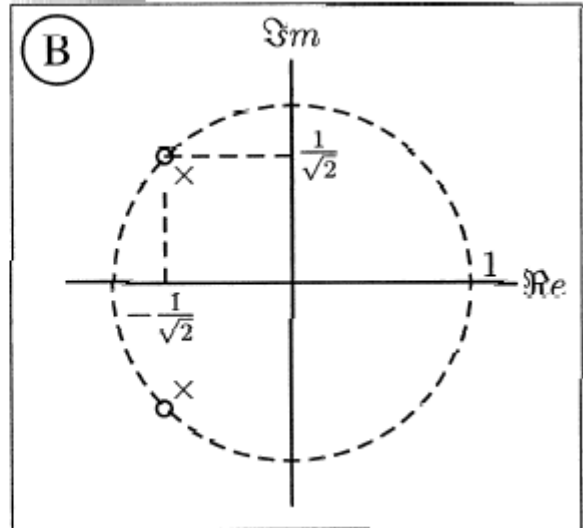
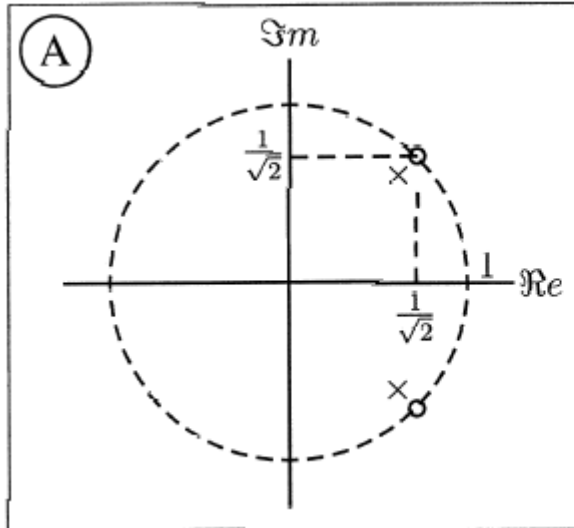
$= y[1]z^{-1} + y[3]z^{-3} + y[4]z^{-4} + y[5]z^{-5}$

$y[n] \rightarrow$



**PROBLEMA 7 (35 puntos)**

Considere los siguientes diagramas polo-cero. Cada uno de ellos, dibujado a escala, corresponde a la función de un sistema LTI de DT cuya respuesta de muestra unitaria es real. *Observe que cuenta con toda la información para resolver las cuestiones que se plantean en este problema, aunque algunos de los polos y ceros no estén etiquetados.* Para mayor comodidad, le facilitamos también los diagramas polo-cero idénticos a los de esta página junto con las tablas de transformadas.



## **Página de trabajo del problema 7**

**Apartado a.** ¿Qué diagrama o diagramas pueden tener una ROC tal que corresponda a un sistema causal y estable?

¿Cuál o cuales?

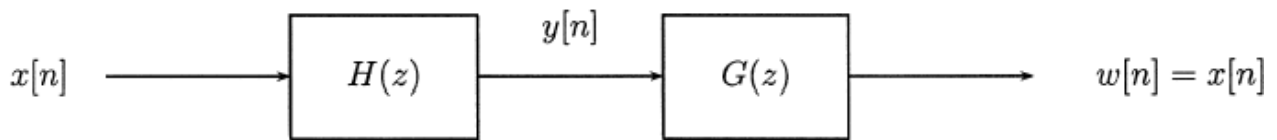
A, B, C

**Razone brevemente su respuesta:**

En el caso de los sistemas causales y estables, es necesario que los polos se encuentren dentro del círculo unitario  $\Rightarrow A, B, C, E$  son candidatos.

$E$  tiene un polo en el infinito también, puesto que hay un cero finito más que polos finitos. Por lo tanto,  $E$  no puede ser causal.

**Apartado b.** Considere el siguiente diagrama de bloques:



$H(z)$  se describe mediante uno o más de los diagramas polo-cero  $A-E$ .  $G(z)$ , que no se corresponde con ninguno de esos diagramas  $A-E$ , es un sistema tal que  $w[n] = x[n]$ . ¿Que diagrama o diagramas corresponden a  $H(z)$  tal que tanto  $H(z)$  como  $G(z)$  son causales y estables?

¿Cuál o cuales?

C

**Razone brevemente su respuesta:**

$$G(z) = \frac{1}{H(z)}$$

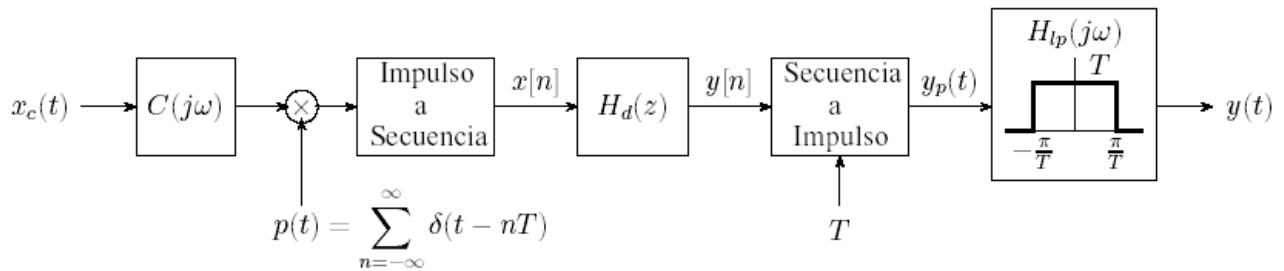
$\therefore$  Para que los polos de  $G(z)$  se encuentren dentro del círculo unitario, los ceros de  $H(z)$  tiene que estar dentro del círculo unitario. Por lo tanto, para  $H(z)$  y  $G(z)$  causal y estable, todos los polos y ceros de  $H(z)$  tienen que estar ubicados dentro del círculo unitario  $\Rightarrow C$

*El problema 7 continua en la página siguiente.*

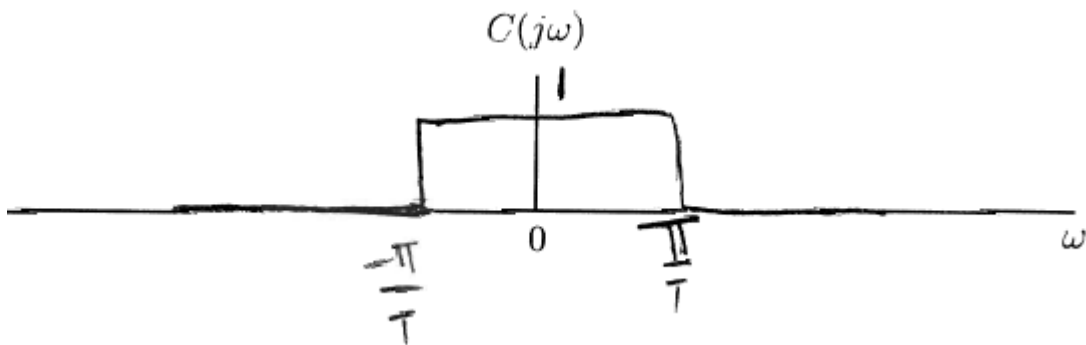
**Página de trabajo del problema 7**

*El problema 7 continua en la página siguiente.*

**Apartado c.** Considere el siguiente sistema con  $T = \frac{1}{480}$  seg.



- (i) Trace la respuesta de frecuencia  $C(j\omega)$  tal que todo el sistema sea LTI con el mayor ancho de banda posible.



- (ii) Suponga que  $C(j\omega)$  es 1 para todo y que  $x_c(t)$  tiene un límite de banda suficiente tal que se cumple el criterio de Nyquist.  $x_c(t)$  consiste en la superposición de  $s(t)$ , que es la señal que le interesa, y una interferencia sinusoidal de 60Hz, es decir:

$$x_c(t) = s(t) + \cos(2\pi \cdot 60t)$$

¿Qué diagrama de polo-cero es la mejor opción para  $H_d(z)$  tal que  $|Y(j\omega)|$ , la magnitud de la transformada de Fourier de la salida global  $y(t)$  sea aproximadamente igual a  $|S(j\omega)|$ , la magnitud de la transformada de Fourier de  $s(t)$ ?

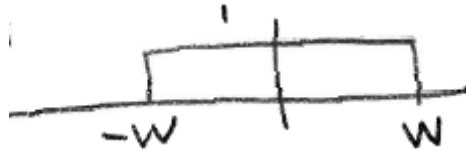
Cuál o cuales?

**Razone brevemente su respuesta:**

**Página de trabajo del problema 7**

(c)

- (i) No nos indican que la señal de entrada sea de banda limitada. por lo tanto, utilizamos  $C(j\omega)$  para forzar a la entrada hacia el multiplicador del tren de impulsos para que cumpla en criterio de Nyquist. Por tanto:



$$W = \frac{1}{2} \omega_s = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{T}$$

Observamos que cualquier altura del furgón es igualmente aplicable en este caso, al igual que también funciona cualquier forma que fuerce el criterio de Nyquist.

- (ii) También necesitamos un filtro de muesca para eliminar la interferencia de 60 Hz sin que llegue a atenuar mucho el resto de la señal.  $A$  y  $B$  son diagramas de polo-cero de filtros de muesca.

La interferencia de 60 Hz en el dominio de la frecuencia de DT es un par de impulsos en

$$\pm 2\pi \cdot 60 \cdot T \text{ rad/seg} = \pm 2\pi \cdot 60 \cdot \frac{1}{480} = \pm \frac{\pi}{4}$$

Necesitamos que los filtros de muescas se ubiquen en  $\pm \frac{\pi}{4}$ .

Puesto que  $\tan^{-1} \left( \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \right) = \frac{\pi}{4}$ , seleccionamos  $A$ .

**Página de trabajo adicional**

**A partir de esta página no hay más enunciados. Las páginas 34 a la 37 son solamente páginas de trabajo adicionales.**