INSTITUTO TECNOLÓGICO DE MASSACHUSSETS
Departamento de Ingeniería Eléctrica e Informática

6.003: Señales y sistemas - Otoño 2003

Soluciones del boletín de problemas 5

Distribución: 22 de octubre de 2003

Ejercicio para el estudio en casa:

O&W , 4.47

En este problema se estudia la transformada de Fourier de un sistema LTI en tiempo continuo con una respuesta a impulso $h(t)$ real y causal.

(a) Para demostrar lo anterior, $H(j\omega)$ está determinado completamente por $\Re e\{H(j\omega)\}$ para $h(t)$ real y causal, exploramos la parte par de una función $h_e(t)$.

Por definición, $h_e(t) = \frac{1}{2}h(t) + \frac{1}{2}$ *h(-t)*. Dado que $h(t) = 0$ para $t < 0$,

$$h(t) = \begin{cases} 2h_e(t) & \text{para } t > 0 \\ h_e(t) & \text{para } t = 0 \\ 0 & \text{para } t < 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Por lo tanto, si conocemos $H_e(j\omega)$, podemos hallar $h_e(t)$ y $h(t)$. Si $h(t)$ no fuese causal, no podríamos determinar $h(t)$ solamente a partir de $h_e(t)$, ya que sería necesario también $h_o(t)$, la parte impar de $h(t)$. ¿Qué es $H_e(j\omega)$? Si $h(t)$ es real, $H_e(j\omega) = \Re e\{H(j\omega)\}$. A continuación, mostramos esto:

$$H_e(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h_e(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}h(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}h(-t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}h(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}h(t)e^{j\omega t}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\cos(\omega t)\mathrm{d}t = \Re e\{H(j\omega)\}.$$

(b) Dado que conocemos que $\Re e\{H(j\omega)\}$ es $\cos\omega$, necesitamos hallar $h(t)$.

$$\Re e\{H(j\omega)\} = H_e(j\omega) = \cos\omega = 0.5e^{j\omega} + 0.5e^{-j\omega}$$

.

$$h_e(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\cos(\omega)\} = \mathcal{F}^{-1}\{0.5e^{j\omega}\} + \mathcal{F}^{-1}\{0.5e^{-j\omega}\} = h_{e1}(t) + h_{e2}(t)$$

Para $h_{e1}(t)$ utilizamos la propiedad de desplazamiento de tiempo que para cualquier t_o, $e^{-j\omega t_o}X(j\omega) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} x(t - t_o)$. De este modo $h_{e1}(t)$, $t_o = -1$. Tenemos:

$$h_{e1}(t) = \mathcal{F}^{-1}\{0.5e^{-j\omega\cdot -1} \cdot 1\} = 0.5\delta(t + 1).$$

Hallamos $h_{e2}(t)$ utilizando el mismo método:

$$h_{e2}(t) = \mathcal{F}^{-1}\{0.5e^{-j\omega\cdot 1}\cdot 1\} = 0.5\delta(t-1).$$

Combinamos las dos señales para obtener $h_e(t) = 0.5\delta(t+1) + 0.5\delta(t-1)$. Por último, dado que $h(t)$ es causal, sabemos que nuestra respuesta final es $h(t) = 2h_e(t) = \delta(t-1)$.

(c) Tenemos que mostrar que un $h(t)$ real y causal se puede recuperar a partir de $h_o(t)$ en todas partes menos en $t = 0$. Por definición, $h_o(t) = \frac{1}{2}h(t) - \frac{1}{2}h(-t)$. Puesto que $h(t)$ es causal, $h_o(t) = \frac{1}{2}h(t)$ para $t > 0$ y $h_o(t) = -\frac{1}{2}h(-t)$ para $t < 0$. Esto significa que si conocemos $h_o(t)$, conocemos $h(t) = 2h_o(t)$ cuando $t > 0$ y $h(t) = 0$ cuando $t < 0$. Sin embargo, en $t = 0$ tenemos un problema. $h_o(0) = 0$ sea cual sea h(0) . Por ejemplo, si $h(t) = \delta(t) + \delta(t-1)$, entonces $h_o(t) = \frac{1}{2}\delta(t-1) + \frac{1}{2}\delta(-t-1)$. La función delta en $t = 0$ se perdió cuando examinamos la parte impar de $h(t)$.

Si no tenemos una singularidad en $t = 0$, pero en su lugar tenemos algún valor finito arbitrario en $t = 0$, podemos utilizar la parte imaginaria de $H(j\omega)$ para determinar $H(j\omega)$. Si tenemos:

$$h(t) = \begin{cases} 1 + u(t) & \text{para } t = 0 \\ u(t) & \text{para } t \neq 0 \end{cases} \tag{2}$$

Entonces$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t$. El valor finito de 1 en $t = 0$ no tiene área por lo que no se muestra debajo de la integral.

$H_o(j\omega) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}(h(t) - h(-t))e^{-j\omega t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(\int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t - \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{j\omega t}\mathrm{d}t) = -j\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\sin\omega t.$ Esto demuestra que $H_o(j\omega) = \Im m\{H(j\omega)\}$. Esto demuestra también que $H_o(j\omega) = \frac{1}{2}H(j\omega) - \frac{1}{2}H(-j\omega)$. De este modo, $H(j\omega)$ se puede recuperar a partir de $H_o(j\omega)$. Además, l aparte imaginaria se puede utilizar para hallar $h_o(t)$ que puede utilizarse para hallar $h(t)$ en todas partes menos en $t = 0$.

Problemas para entregar:

Problema 1 Considere la señal $x(t)$ con el espectro indicado en la figura p4.28 (a) de O&W. Dibuje el espectro de:

$$y(t) = x(t)\left[\cos(t/2) + \cos(3t/2)\right].$$

Solución:

Para dibujar $Y(j\omega)$, el espectro de $y(t)$, utilizamos la linealidad y la propiedad de multiplicación. Así, $Y(j\omega) = \frac{1}{2\pi}[X(j\omega) * \mathcal{F}\{\cos\frac{t}{2}\}] + \frac{1}{2\pi}[X(j\omega) * \mathcal{F}\{\cos\frac{3t}{2}\}]$.

$$\mathcal{F}\{\cos\frac{t}{2}\} = \pi[\delta(\omega - 0.5) + \delta(\omega + 0.5)].$$

$$\mathcal{F}\{\cos\frac{3t}{2}\} = \pi[\delta(\omega - 1.5) + \delta(\omega + 1.5)].$$

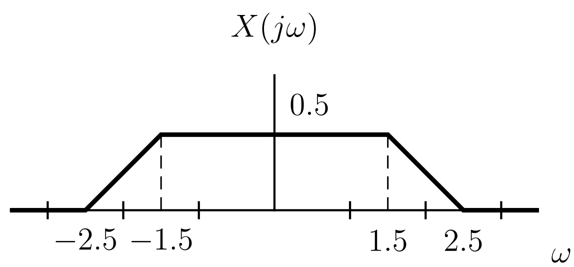
De este modo,

$$Y(j\omega) = \frac{1}{2\pi}X(j\omega) * \pi\delta(\omega - 0.5) + \frac{1}{2\pi}X(j\omega) * \pi\delta(\omega + 0.5)$$

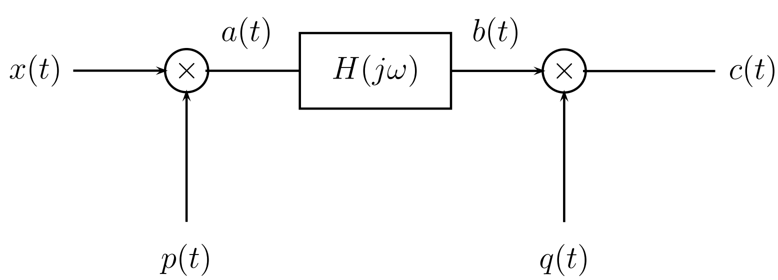
$$+\frac{1}{2\pi}X(j\omega)*\pi\delta(\omega-1.5)+\frac{1}{2\pi}X(j\omega)*\pi\delta(\omega+1.5).$$

$$=\frac{1}{2}\left(X(j(\omega-0.5))+X(j(\omega+0.5))+X(j(\omega-1.5))+X(j(\omega+1.5))\right)$$

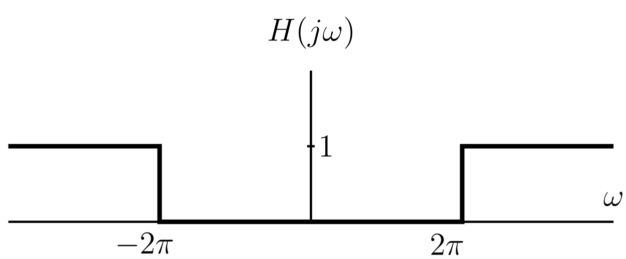
Por lo tanto, $X(j\omega)$ se convoluciona con 4 funciones de impulso desplazado. La convolución de una señal con una función de impulso desplazado provoca que la señal se desplace y se reproduzca exactamente igual aproximadamente en la ubicación del eje x, donde se ubica la función del impulso. Así, centrando en *t* = -1.5, -0,5; 0,5 y 1:5 reproducimos exactamente $X(j\omega)$. También es necesario que realicemos a escala las 4 réplicas por un factor de $\frac{1}{2}$ debido a la multiplicación de las constantes, $\frac{1}{2\pi}\cdot\pi$. Esto se puede ver en la figura siguiente:



Problema 2 Considere el sistema que se indica a continuación:



donde $x(t)=\dfrac{\sin 4\pi t}{\pi t}$, $p(t)=\cos 2\pi t$, $q(t)=\dfrac{\sin 2\pi t}{\pi t}$, y la respuesta de frecuencia de $H(j\omega)$ viene dada por:



(a) Sea $A(j\omega)$ la transformada de Fourier de $a(t)$. Dibuje y marque claramente $A(j\omega)$.

(b) Sea $B(j\omega)$ la transformada de Fourier de $b(t)$. Dibuje y marque claramente $B(j\omega)$.

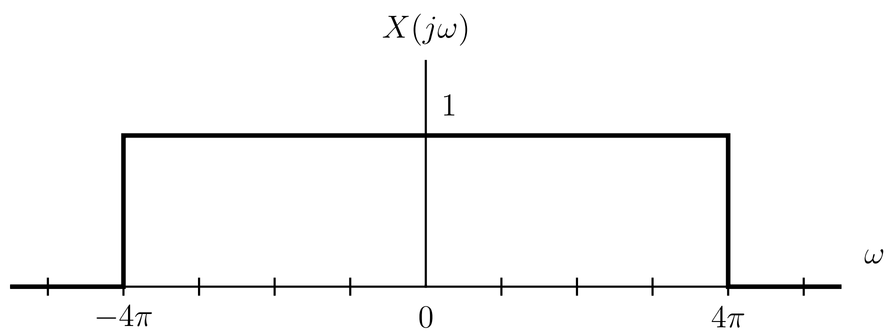
(c) Sea $C(j\omega)$ la transformada de Fourier de $c(t)$. Dibuje y marque claramente $C(j\omega)$.

(d) Calcule la salida $c(t)$.

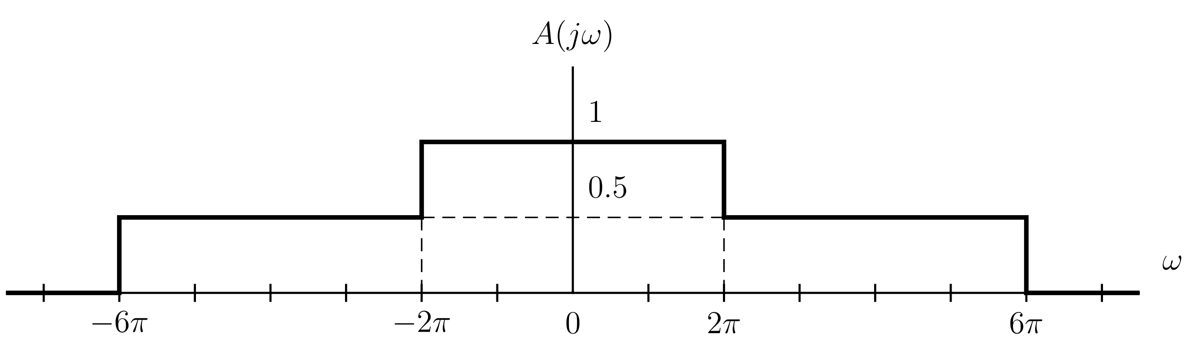
Solución:

(a) Para hallar $A(j\omega)$, utilizamos la propiedad de multiplicación. Dado que $a(t) = x(t) \times p(t)$, $A(j\omega) = \frac{1}{2\pi}[X(j\omega) * P(j\omega)]$. Tenemos que hallar $X(j\omega)$ y $P(j\omega)$. Para hallar $X(j\omega)$ a partir de $x(t)$, reconocemos $x(t)$ como parte de la tabla 4.2 de O&W de pares básicos de transformada de Fourier. Es una función sinc con $W = 4\pi$. De este modo:

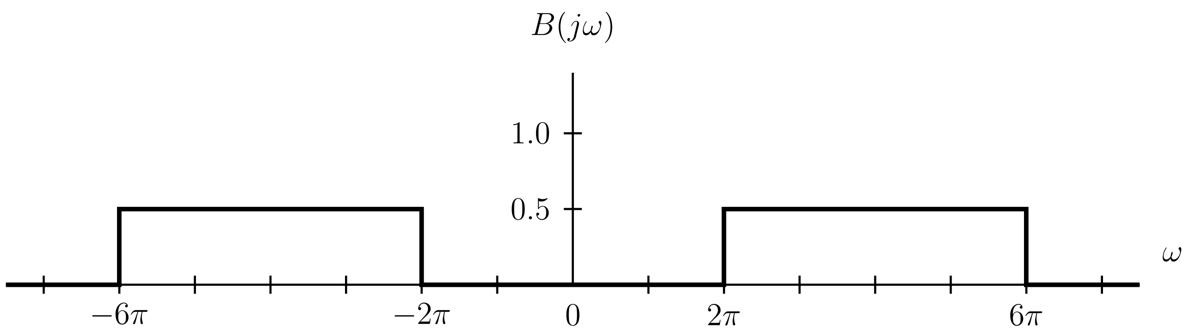
$$X(j\omega) = \begin{cases} 1 & \text{para } |\omega| < 4\pi \\ 0 & \text{para } |\omega| > 4\pi \end{cases} \tag{3}$$



Puesto que $p(t) = \cos 2\pi t$, $P(j\omega) = \pi[\delta(\omega - 2\pi) + \delta(\omega + 2\pi)]$. Dado que $P(j\omega)$ son dos funciones de impulso, la convolución de $X(j\omega)$ con $P(j\omega)$ da como resultado la superposición de dos copias de $X(j\omega)$, una centrada en $\omega = 2\pi$ y la otra en $\omega = -2\pi$.
A continuación, se indica el gráfico del $\mathrm{A}(\mathrm{j}\omega)$ que resulta:



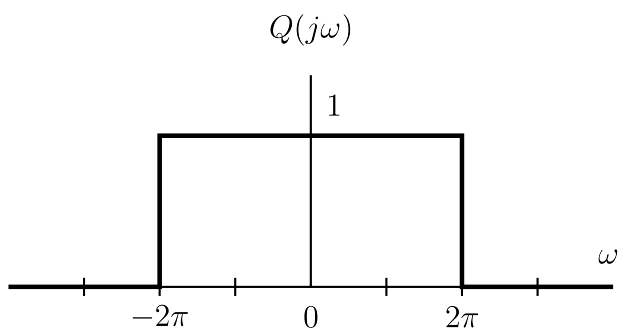
(b) Para hallar $B(j\omega)$, utilizamos la propiedad de la convolución. Así, $B(j\omega) = A(j\omega)H(j\omega)$. $A(j\omega)$ es un filtro de paso bajo y $H(j\omega)$ un filtro de paso alto. Si multiplicamos los dos se crea un filtro paso de banda. $A(j\omega)$ corta todas las frecuencias para $|\omega| > 6\pi$. $H(j\omega)$ corta todas las frecuencias para $|\omega| < 2\pi$. A continuación, se muestra la señal que resulta, $B(j\omega)$:



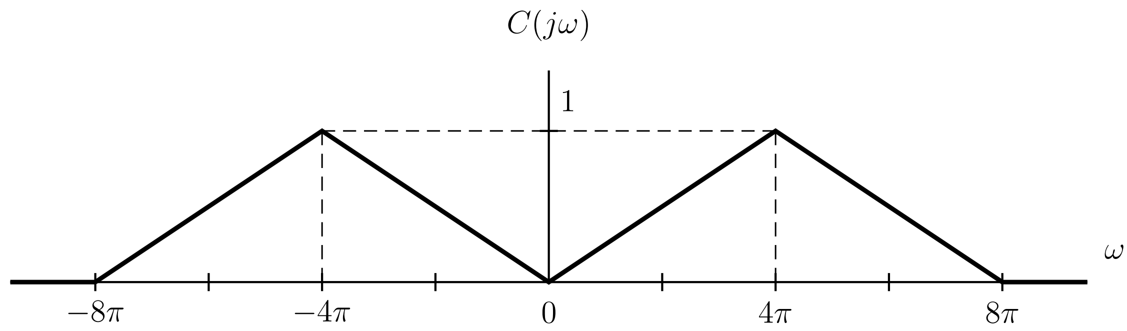
(c) Para hallar $C(j\omega)$, tenemos que convolucionar $B(j\omega)$ con $Q(j\omega)$.

$$Q(j\omega) = \begin{cases} 1 & \text{para } |\omega| < 2\pi \\ 0 & \text{para } |\omega| > 2\pi \end{cases} \tag{4}$$

$Q(j\omega)$ se muestra a continuación:



De este modo, $C(j\omega)$ se puede dibujar como se indica a continuación:



(d) Para calcular $c(t)$, multiplicamos $b(t)$ por $q(t)$. $B(j\omega)$ es la suma de dos filtros ideales de ganancia unitaria de frecuencia desplazada. Los filtros del dominio de frecuencias se convierten en funciones sinc en el dominio del tiempo. Además, un desplazamiento de frecuencia de ω_o corresponde a multiplicar por $e^{-j\omega_o t}$ en el dominio de tiempo. Por consiguiente,

$$b(t) = \frac{1}{2}e^{-j4\pi t}\frac{\sin 2\pi t}{\pi t} + \frac{1}{2}e^{j4\pi t}\frac{\sin 2\pi t}{\pi t} = \cos 4\pi t\frac{\sin 2\pi t}{\pi t}.$$

Por lo tanto,

$$c(t) = b(t)q(t) = \cos 4\pi t\frac{\sin^2 2\pi t}{\pi^2 t^2}.$$

Problema 3 O&W, 4.44. Además de completar los apartados (a) y (b), responda a las siguientes cuestiones.

(c) Halle la ecuación diferencial que relaciona la entrada y la salida de este sistema.

Solución:

(a) Tenemos la siguiente ecuación que relaciona la salida $y(t)$ de un sistema LTI causal con la entrada $x(t)$.

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + 10y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)z(t-\tau)\mathrm{d}\tau - x(t) \tag{5}$$

donde,

$$z(t) = e^{-t}u(t) + 3\delta(t).$$

Queremos hallar la respuesta de frecuencia $H(j\omega) = Y(j\omega)/X(j\omega)$ de este sistema. Para ello, tomamos la transformada de cada término de la ecuación 5. Debido a la linealidad, para hallar la transformada de Fourier de la ecuación completa, tomamos la transformada de Fourier de cada término. Para el primer término, $\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}$, utilizamos la propiedad de la diferenciación para hallar:

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\right\} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} j\omega Y(j\omega).$$

Para el segundo término, tenemos $10Y(j\omega)$. Para el siguiente término, la integral, reconocemos esta integral como la convolución de *x*(*t*) y *z*(*t*). De este modo, la propiedad de la convolución nos indica que:

$$\mathcal{F}\{x(t) * z(t)\} \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(j\omega)Z(j\omega).$$

Por último, $x(t)$ se convierte en $X(j\omega)$. La nueva ecuación del dominio de frecuencia es:

$$j\omega Y(j\omega) + 10Y(j\omega) = X(j\omega)Z(j\omega) - X(j\omega).$$

Las manipulaciones algebraicas se utilizan para apartar $Y(j\omega)$ al lado izquierdo de la ecuación y $X(j\omega)$ al lado derecho. Por tanto, hallamos:

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{Z(j\omega) - 1}{10 + j\omega} \tag{6}$$

Insertamos la función $Z(j\omega)$. Por linealidad, $\mathcal{F}\{z(t)\} = \mathcal{F}\{e^{-t}u(t)\} + \mathcal{F}\{3\delta(t)\}$. La transformada de Fourier para cada uno de los términos se puede encontrar en la tabla 4.2 de O&W.

$$Z(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega} + 3. = \frac{4 + 3j\omega}{1 + j\omega}$$

Esto se puede introducir en la ecuación (6) para obtener:

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{3 + 2j\omega}{(10 + j\omega)(1 + j\omega)} \tag{7}$$

(b) Se puede hallar la respuesta a impulso realizando una expansión de fracción parcial $H(j\omega)$ como se halló en la ecuación (7).

$$H(j\omega) = \frac{3 + 2j\omega}{(10 + j\omega)(1 + j\omega)} = \frac{A}{10 + j\omega} + \frac{B}{1 + j\omega} = \frac{17/9}{10 + j\omega} + \frac{1/9}{1 + j\omega}.$$

La transformada inversa de Fourier de los dos últimos términos se puede determinar a partir de la tabla 4.2 de O&W para obtener:

$$h(t) = \left(\frac{1}{9}e^{-t} + \frac{17}{9}e^{-10t}\right)u(t).$$

(c) Para hallar la ecuación diferencial que relaciona la entrada con la salida volvemos a la ecuación 7 y la rescribimos de la siguiente forma:

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{3 + 2j\omega}{(j\omega)^2 + 11j\omega + 10}.$$

Después de realizar una multiplicación cruzada, obtenemos:

$$10Y(j\omega) + 11j\omega Y(j\omega) + (j\omega)^2 Y(j\omega) = 3X(j\omega) + 2j\omega X(j\omega).$$

Utilizando la propiedad de la diferenciación, realizamos una transformada inversa de Fourier para obtener la ecuación diferencial:

$$10y(t) + 11\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + 11\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2} = 3x(t) + 2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}.$$

Problema 4 O&W , 5.21 (c), (g)
Solución:

(c) Necesitamos calcular la transformada de Fourier de $x[n] = \frac{1}{3}^{|n|}u[-n-2]$. Para ello utilizamos la ecuación de análisis que se indica a continuación:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{-2}\left(\frac{1}{3}\right)^{-n}e^{-j\omega n} = \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{3}e^{j\omega}\right)^{n} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{j\omega}} - 1 - \frac{1}{3}e^{j\omega} = \frac{\frac{1}{9}e^{j2\omega}}{1-\frac{1}{3}e^{j\omega}}$$

(g) Necesitamos calcular la transformada de Fourier de $x[n] = \sin(\frac{\pi}{2}n) + \cos(n)$. Utilizamos la tabla 5.2 de O&W para hallar la transformada de Fourier de cada uno de los términos y, a continuación, sumamos las dos transformadas para $x[n]$.

$$\mathcal{F}\left\{\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)\right\} = \frac{\pi}{j}\sum_{l=-\infty}^{\infty}(\delta(\omega - \frac{\pi}{2} - 2\pi l) - \delta(\omega + \frac{\pi}{2} - 2\pi l))$$

$$\mathcal{F}\{\cos(n)\} = \pi\sum_{l=-\infty}^{\infty}(\delta(\omega - 1 - 2\pi l) + \delta(\omega + 1 - 2\pi l))$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{\pi}{j}\sum_{l=-\infty}^{\infty}(\delta(\omega-\frac{\pi}{2}-2\pi l)-\delta(\omega+\frac{\pi}{2}-2\pi l))+\pi\sum_{l=-\infty}^{\infty}(\delta(\omega-1-2\pi l)+\delta(\omega+1-2\pi l))$$

Problema 5 A continuación, se indican las transformadas de Fourier de señales de tiempo discreto. Determine la señal correspondiente a cada transformada.

(a) $X(e^{j\omega}) = 4e^{j4\omega} - e^{j\omega} + 6 + 8e^{-j3\omega} - 16e^{-j11\omega}$

(b)

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & 0 \le |\omega| < \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2} < |\omega| \le \pi \\ 0, & \frac{\pi}{4} < |\omega| < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

(c) $X(e^{j\omega}) = \dfrac{1+3e^{-j3\omega}}{1+\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$

Soluciones:

(a) Cuando la transformada de Fourier es una suma de exponenciales, a menudo, la forma más sencilla de hallar $x[n]$ es utilizar la ecuación de análisis,

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

para unir cada término con el valor concreto de n. Por ejemplo, en este problema podemos ver que el primer término, $4e^{j4\omega}$ solamente puede ser resultado del término $n = -4$. De este modo, podemos rescribir la ecuación de la forma siguiente:

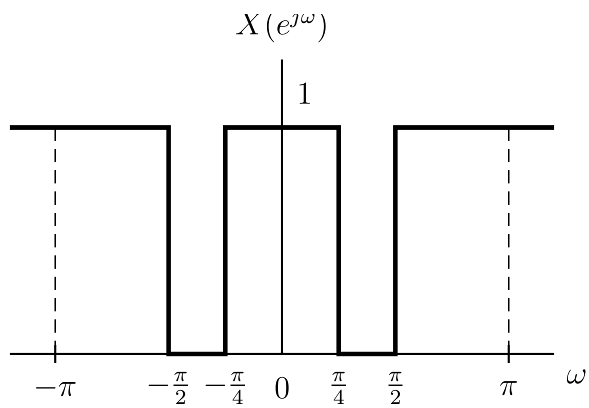
$$X(e^{j\omega}) = x[-4]e^{-j\omega(-4)} + x[-1]e^{-j\omega(-1)} + x[0]e^{-j\omega 0} + x[3]e^{-j\omega(3)} + x[11]e^{-j\omega(11)}.$$

Igualamos los términos para hallar:

$$x[-4] = 4, x[-1] = -1, x[0] = 6, x[3] = 8, x[11] = -16.$$

$x[n] = 0$ para los demás n.

(b) Para este problema, $X(e^{j\omega})$ es parecido a:



La transformada de Fourier para esta señal, es considerada la suma de 3 filtros ideales de paso bajo siendo dos de ellos de frecuencia desplazada para $\omega = \frac{3\pi}{4}$ y $\omega = -\frac{3\pi}{4}$. En la tabla 5.1 de O&W se muestra que el desplazamiento de frecuencia corresponde a la multiplicación por un exponencial en el dominio de tiempo:

$$X(e^{j(\omega-\omega_o)}) \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} e^{j\omega_o n}x[n].$$

De este modo, en el dominio de tiempo podemos rescribir esto como la suma de tres funciones sinc, cada una con $W = \frac{\pi}{4}$ y por dos de ellas multiplicadas por el exponencial adecuado. Esto nos proporciona lo siguiente:

$$x[n] = e^{-j\frac{3\pi}{4}n}\frac{\sin\frac{\pi}{4}n}{\pi n} + \frac{\sin\frac{\pi}{4}n}{\pi n} + e^{j\frac{3\pi}{4}n}\frac{\sin\frac{\pi}{4}n}{\pi n} = \left(2\cos(\frac{3\pi}{4}n) + 1\right)\frac{\sin(\frac{\pi}{4}n)}{\pi n}.$$

(c) Esta transformada de Fourier es similar a la transformada de Fourier para $a^n u[n]$ de la tabla 5.2 de O&W, pero la manipularemos para que sea más parecida a ésta. En primer lugar, la separamos en dos términos de forma que:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1+\frac{1}{4}e^{-j\omega}} + \frac{3e^{-j3\omega}}{1+\frac{1}{4}e^{-j\omega}} = X_1(e^{j\omega}) + X_2(e^{j\omega}).$$

Por linealidad podemos resolver para la señal de tiempo de cada transformada y, a continuación, $x[n] = x_1[n] + x_2[n]$. $X_1(e^{j\omega})$ es igual al par de transformada mencionado anteriormente en la tabla 5.2 con $a = -\frac{1}{4}$. De este modo:

$$x_1[n] = \left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n].$$

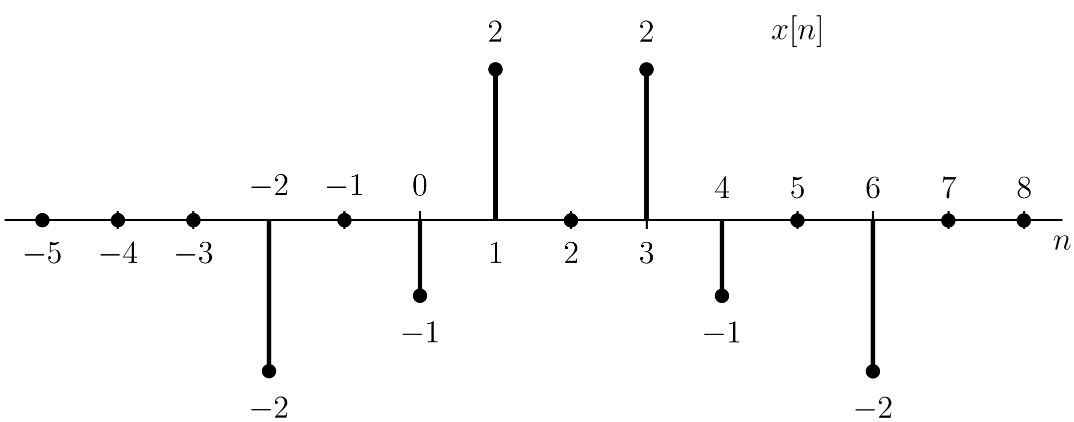
$X_2(e^{j\omega})$ también es igual al par de transformada de la tabla 5.2, excepto para el término del numerador de $3e^{-j3\omega}$. Éste corresponde a una escala de 3 y a un desplazamiento de tiempo de 3.
De este modo,

$$x_2[n] = 3\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-3} u[n-3].$$

Si sumamos los dos términos obtenemos:

$$x[n] = \left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n] + 3\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-3} u[n-3].$$

Problema 6 $X(e^{j\omega})$ denota la transformada de Fourier de la señal $x[n]$ que se indica a continuación.



(a) Halle $X(1) = X(e^{j0})$.

(b) Halle α tal que $e^{j\alpha\omega}X(e^{j\omega})$ es real.

(c) Evalúe $\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})d\omega$.

(d) Halle $X(e^{j\pi})$.

(e) Determine y dibuje la señal cuya transformada de Fourier es $\Re e\{X(e^{j\omega})\}$.

(f) Evalúe cada una de las siguientes integrales:

(f.1) $\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$

(f.2) $\int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}\right|^2 d\omega$

Soluciones:

(a) Utilizamos la ecuación de análisis:

$$X(1) = X(e^{j0}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{j\cdot 0\cdot n} = -2.$$

(b) Si $x[n]$ es real y par, $X(e^{j\omega})$ es real y par. Puesto que esta señal es real, sólo necesitamos hacerla par. Si desplazamos en el tiempo $x[n]$ 2 pasos a la izquierda, será real y par. Un desplazamiento de 2 en el tiempo a la izquierda corresponde a multiplicar el espectro de frecuencia por $e^{j\omega 2}$. $\alpha = 2$ hará que el espectro de frecuencia sea real (y par).

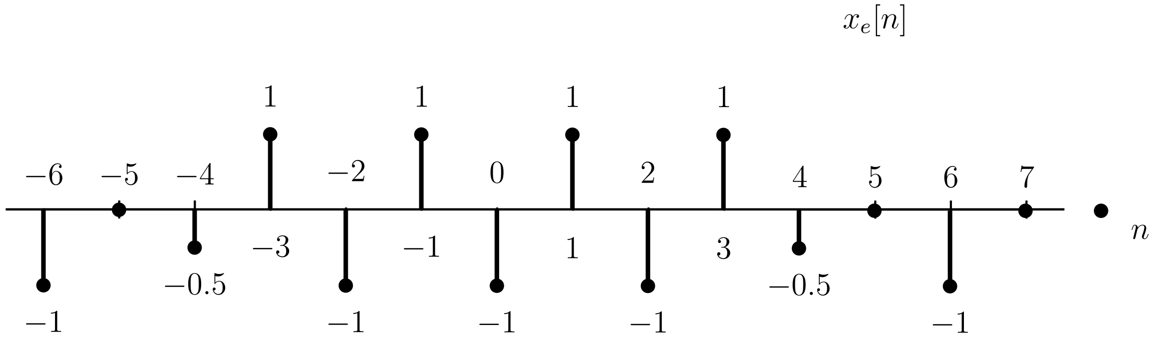
(c) Utilizamos la ecuación de síntesis:

$$\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\mathrm{d}\omega = 2\pi\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega\cdot 0}d\omega\right) = 2\pi x[0] = -2\pi.$$

(d) Utilizamos la ecuación de análisis:

$$X(e^{j\pi}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\pi n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](-1)^n = -10$$

(e) $\Re e\{X(e^{j\omega})\}$, que es la parte real (y par) de $X(e^{j\omega})$, es la transformada de Fourier de la parte par de la señal de tiempo. De este modo, necesitamos dibujar $x_e[n] = 0.5x[n] + 0.5x[-n]$.
A continuación, indicamos el gráfico:



(f) Para evaluar las siguientes integrales utilizamos las relaciones de Parseval:

(f.1) Con la relación de Parseval sabemos que:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 \mathrm{d}\omega.$$

Puesto que conocemos $x[n]$, podemos utilizarlo en la relación de Parseval para hallar la cantidad que nos interesa. De este modo,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = 18$$

y $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega = 18 \cdot 2\pi = 36\pi.$

(f.2) Para utilizar de nuevo la relación de Parseval, necesitamos definir una nueva variable, $Y(e^{j\omega}) = j\frac{\mathrm{d}X(e^{j\omega})}{\mathrm{d}\omega}$. Por lo tanto, según la tabla 5.1 de O&W:

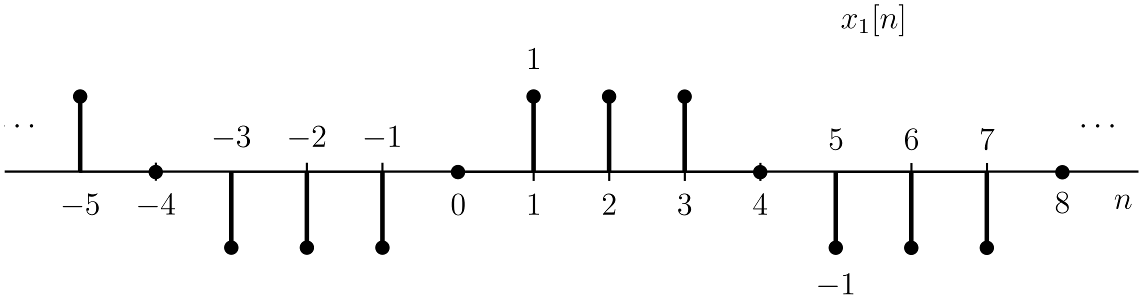
$$\mathcal{F}^{-1}\left\{j\frac{\mathrm{d}X(e^{j\omega})}{\mathrm{d}\omega}\right\} = \mathcal{F}^{-1}\{Y(e^{j\omega})\} = y[n] = nx[n].$$

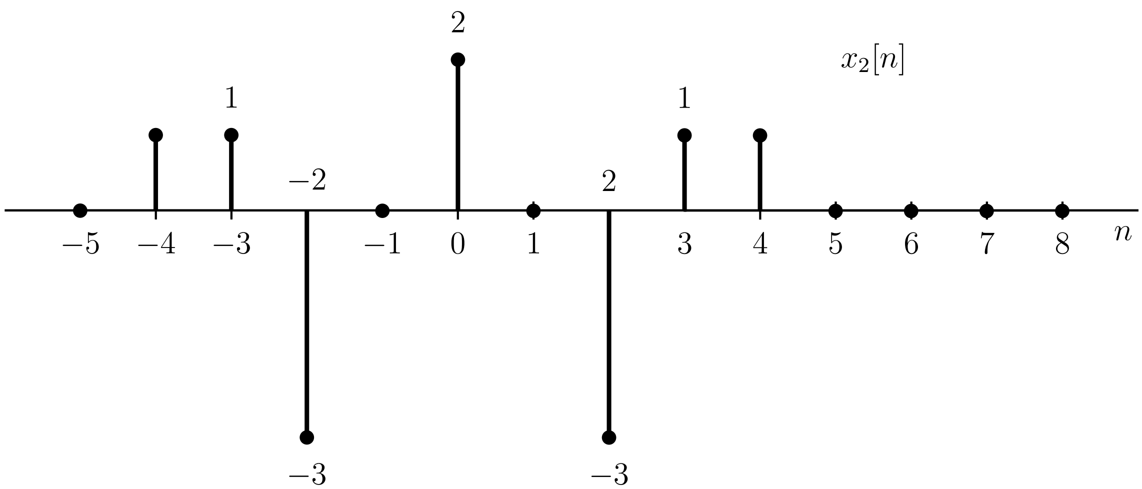
De modo que:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\mathrm{d}X(e^{j\omega})}{\mathrm{d}\omega}\right|^2 \mathrm{d}\omega = \int_{-\pi}^{\pi}\left|j\frac{\mathrm{d}X(e^{j\omega})}{\mathrm{d}\omega}\right|^2 \mathrm{d}\omega = 2\pi\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|Y(e^{j\omega})|^2\mathrm{d}\omega\right)$$

$$= 2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}|y[n]|^2 = 2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}|nx[n]|^2 = 2\pi\cdot 96 = 432\pi.$$

Problema 7 Responda a las preguntas planteadas en O&W 5.24 en el caso de las dos señales siguientes:





Solución:

(a) (a.1) Queremos saber si $\Re e\{X_1(e^{j\omega})\} = 0$. Esto es cierto sólo si $x_1[n]$ es puramente real e impar, o puramente imaginario y par. Si observamos la señal, $x_1[n]$ vemos que es real e impar, o $x_e[n] = 0.5x[n] + 0.5x[-n] = 0$. Sí, $\Re e\{X_1(e^{j\omega})\} = 0$.

(a.2) Dado que esta señal es real e impar, es puramente imaginaria, $\Im m\{X_1(e^{j\omega})\} \neq 0$.

(a.3) La parte real de una transformada de Fourier corresponde a la parte de la señal de tiempo que es real y par, y a la parte de la señal de tiempo que es imaginaria e impar.
Si multiplicamos $X_1(e^{j\omega})$ por $e^{j\alpha\omega}$, podemos desplazar la señal en el tiempo. Así, podemos desplazar por el número correcto de unidades para que la señal sea par. El gráfico de $x_1[n]$ nos revela que el desplazamiento de tiempo de $\alpha = \pm 2$ provocará que la señal sea par, de modo que la transformada de Fourier que resulte, $e^{j\pm 2\omega}X_1(e^{j\omega})$, será real.

(a.4) Podemos utilizar la ecuación de síntesis de la forma siguiente:

$$\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\mathrm{d}\omega = 2\pi \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega\cdot 0}d\omega \right) = 2\pi x[0] = 0.$$

Sí, $\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\mathrm{d}\omega = 0$.

(a.5) Por definición, la transformada de Fourier de cualquier secuencia discreta es periódica, por tanto $X(e^{j\omega})$ es periódico.

(a.6) Puesto que $x_1[n]$ es periódico:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right)$$

donde $a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$. Si introducimos $\omega = 0$ en la ecuación anterior obtenemos lo siguiente:

$$X(e^{j0}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta\left(-\frac{2\pi}{N}k\right).$$

A partir de esta ecuación, podemos ver que todos los términos serán cero, excepto posiblemente $2\pi a_0\delta(0)$. Si $a_0 = 0$ entonces $X(e^{j0}) = 0$. Si utilizamos la fórmula anterior para a_k observamos que:

$$a_0 = \frac{1}{8}\sum_{n=<N>} x[n] = 0.$$

También podemos observar que a_0 es la media DC de la señal. A partir del gráfico observamos que esta media es cero. Por lo tanto, sí, $X(e^{j0}) = 0$.

(b) (b.1) Para determinar si $\Re e\{X(e^{j\omega})\} = 0$, necesitamos ver si $x_2[n]$ es real o imaginario y si es par o impar. En el gráfico podemos ver que es real y par. De este modo, $X(e^{j\omega})$ es real y par. Por lo tanto, $\Re e\{X(e^{j\omega})\} \neq 0$.

(b.2) Esto significa que $\Im m\{X(e^{j\omega})\} = 0$.

(b.3) Dado que $X(e^{j\omega})$ ya es real, $\alpha = 0$.

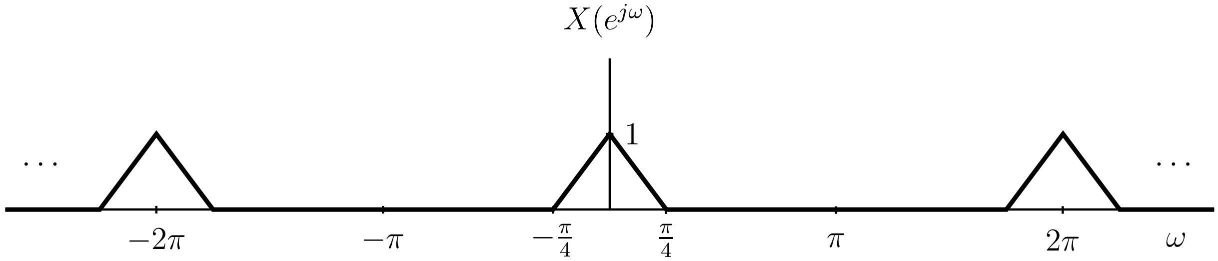
(b.4) Si utilizamos la misma estrategia que para $x_1[n]$, vemos que $x_2[0] \neq 0$ por tanto, $\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\mathrm{d}\omega \neq 0$.

(b.5) Por definición, todo $X(e^{j\omega})$ es periódico, por lo que $X_2(e^{j\omega})$ es periódico.

(b.6) $X_2(e^{j0})$ es el componente DC de la señal. Podemos ver que el componente DC es igual a cero, con lo cual se cumple esta condición. Es decir,

$$X_2(e^{j0}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] = 0.$$

Problema 8 Considere la misma pregunta planteada en O&W, 5.27 (a) pero con $X(e^{j\omega})$ tal como se indica a continuación:



y con:

$$p[n] = \cos \pi n - \cos(\pi n/2).$$

Solución:
Para dibujar $\mathrm{W}(e^{j\omega})$, utilizamos la propiedad de multiplicación:

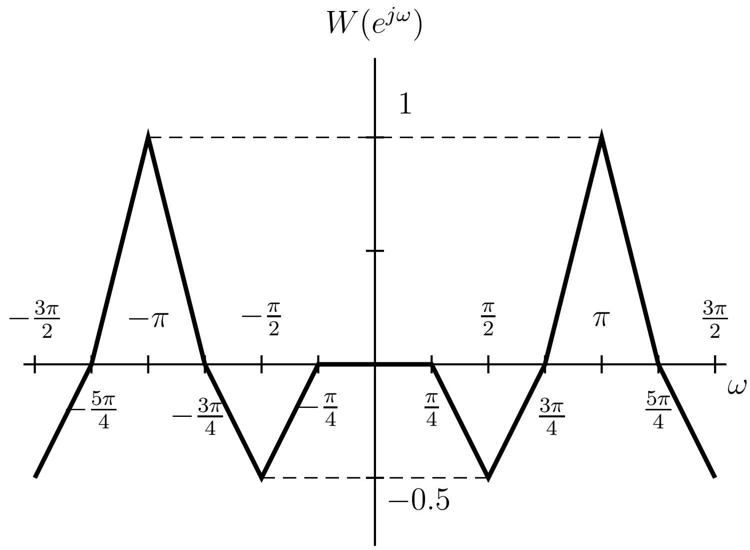
$$p[n]x[n] = w[n] \stackrel{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} W(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} P(e^{j\omega}) * X(e^{j\omega}).$$

Esto nos permite utilizar la convolución circular para resolver el problema. $X(e^{j\omega})$ es tal como se indica arriba y:

$$P(e^{j\omega}) = \pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} (\delta(\omega - \pi - 2\pi l) + \delta(\omega + \pi - 2\pi l)) - \pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} (\delta(\omega - \frac{\pi}{2} - 2\pi l) + \delta(\omega + \frac{\pi}{2} - 2\pi l)).$$

El área debajo de los impulsos $\omega = \pm\pi \pm 2\pi l$ es igual a 2π , no simplemente π ya que los impulsos del término $\sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \pi - 2\pi l)$ se superponen con los del término $\sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\omega + \pi - 2\pi l)$.

Estos y los impulsos en $\omega = \pm\frac{\pi}{2} \pm 2\pi l$ provocan réplicas de $X(e^{j\omega})$ centradas en estos ω. A continuación se muestra el $W(e^{j\omega})$ que resulta:



Problema 9 Responda a las mismas preguntas planteadas en O&W, 5.30 (b) con $x[n]$ como se indica en ese problema y para cada una de las respuestas de muestra unitaria del LTI:

(a) $h[n] = \dfrac{\sin \pi n/16}{\pi n} - \dfrac{\sin(\pi n/12)}{\pi n}$

(b) $h[n] = \dfrac{\sin(\pi n/8)\sin(\pi n/2)}{\pi^2 n^2}$

Solución:

Tenemos que $x[n] = \sin(\frac{\pi n}{8}) - 2\cos(\frac{\pi n}{4})$.

(a) Para determinar $y[n]$, utilizaremos la propiedad de convolución. Es decir, calcularemos $Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$ y después podremos utilizar la ecuación de síntesis para determinar $y[n]$ a partir de $Y(e^{j\omega})$. Para hallar $H(e^{j\omega})$ para $h[n]$ dado, utilizamos las tablas 5.1 y 5.2 de O&W y hallamos $H(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega}) - H_2(e^{j\omega})$ donde:

$$H_1(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & \text{para} |\omega| < \frac{\pi}{16} \\ 0 & \text{para} \frac{\pi}{16} < |\omega| < \pi \end{cases} \tag{8}$$

y

$$H_2(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & \text{para } |\omega| < \frac{\pi}{12} \\ 0 & \text{para} \frac{\pi}{12} < |\omega| < \pi \end{cases} \tag{9}$$

Si sustraemos $H_2(e^{j\omega})$ de $H_1(e^{j\omega})$ obtenemos:

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} -1 \text{ para } \frac{3\pi}{48} < |\omega| < \frac{4\pi}{48} \\ 0 \text{ para } \frac{3\pi}{48} > |\omega| > \frac{4\pi}{48} \end{cases} \tag{10}$$

$H(e^{j\omega})$ es un filtro de paso de banda con ganancia −1.

$X(e^{j\omega})$ se encuentra en la tabla 5.2:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{\pi}{j}\sum_{l=-\infty}^{\infty}(\delta(\omega-\frac{\pi}{8}-2\pi l)-\delta(\omega+\frac{\pi}{8}-2\pi l))-2\pi\sum_{l=-\infty}^{\infty}(\delta(\omega-\frac{\pi}{4}-2\pi l)+\delta(\omega+\frac{\pi}{4}-2\pi l)).$$

Está claro que el filtro de paso de banda no permite que $x[n]$ pase através de y, por consiguiente $Y(e^{j\omega}) = 0$ e $y[n] = 0$.

(b) Utilizaremos de nuevo la propiedad de convolución para hallar $Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$ y luego para hallar $y[n]$ a partir de $Y(e^{j\omega})$. $X(e^{j\omega})$ es el mismo que en el problema anterior. Sin embargo,

$$h[n] = \frac{\sin(\frac{\pi n}{8})\sin\frac{\pi n}{2}}{\pi^2 n^2} = h_1[n]h_2[n].$$

Podemos utilizar la propiedad de multiplicación para hallar $H(e^{j\omega})$. Aquí:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}H_1(e^{j\omega}) * H_2(e^{j\omega}).$$

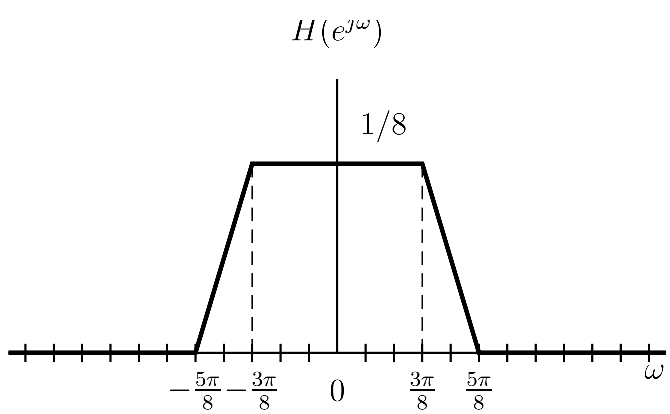
$h_1[n]$ y $h_2[n]$ son funciones sinc, por lo que:

$$H_1(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & \text{para } |\omega| < \frac{\pi}{8} \\ 0 & \text{para } \frac{\pi}{8} < |\omega| < \pi \end{cases} \tag{11}$$

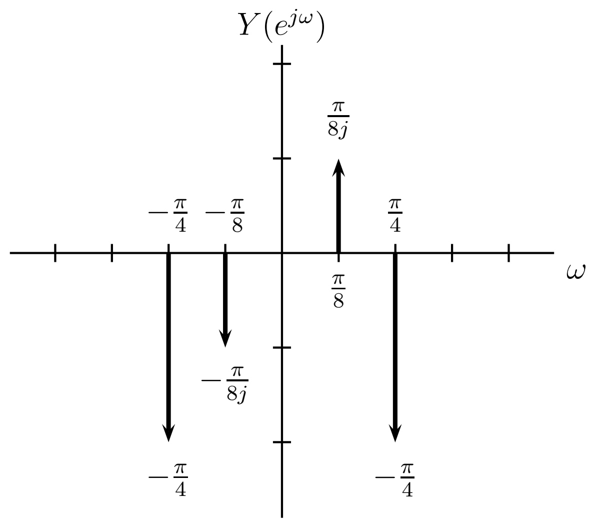
$$H_2(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & \text{para } |\omega| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{para } \frac{\pi}{2} < |\omega| < \pi \end{cases} \tag{12}$$

Hay que calcular la convolución de estas dos señales.

A continuación se indica $H(e^{j\omega})$:



Si multiplicamos $X(e^{j\omega})$ por $H(e^{j\omega})$ obtenemos el siguiente espectro para $Y(e^{j\omega})$:



La figura anterior nos muestra que $y[n]$ es simplemente una versión a escala de $x[n]$. De este modo,

$$y[n] = \frac{1}{8}\sin\left(\frac{\pi n}{8}\right) - \frac{1}{4}\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right).$$

Problema 10 Considere un sistema que consista en una cascada de dos sistemas LTI , tal como se indica a continuación:

$$n] \longrightarrow \boxed{\text{Sistema 1}} \xrightarrow{z[n]} \boxed{\text{Sistema 2}} \longrightarrow y[n]$$

El sistema 1 es un sistema LTI y tiene un respuesta de muestra unitaria:

$$h[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n].$$

El sistema 2 es un sistema LTI, y sabemos que si la entrada es:

$$x[n] = \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1]$$

la salida es:

$$y[n] = 10\delta[n] - \delta[n-1].$$

Por favor, muestre su trabajo en los siguientes apartados:

(a) ¿Cuál es la respuesta de frecuencia $X(e^{j\omega})$ de todo el sistema?

(b) Halle la ecuación de diferencias para todo el sistema.

(c) Halle la respuesta a impulsos de todo el sistema.

Solución:

(a) En el caso de esta cascada de dos sistemas LTI:

$$H(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega})H_2(e^{j\omega}).$$

si tomamos una transformada de Fourier de $h_1[n] = (\frac{1}{4})^n u[n]$ obtenemos:

$$H_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - 0.25e^{-j\omega}}.$$

Para $H_2(e^{j\omega})$, tomamos las transformadas de Fourier de $z[n]$ e $y[n]$ como se indica anteriormente y $H_2(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{Z(e^{j\omega})}$. Esto nos da:

$$H_2(e^{j\omega}) = \frac{10 - e^{-j\omega}}{1 + 0.5e^{-j\omega}}.$$

Si multiplicamos los dos términos obtenemos la siguiente respuesta de frecuencia total:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - 0.25e^{-j\omega}} \frac{10 - e^{-j\omega}}{1 + 0.5e^{-j\omega}}.$$

(b) Para hallar la ecuación de diferencias de todo el sistema, necesitamos multiplicar $Y(e^{j\omega})$ por el denominador de la ecuación anterior y multiplicar $Z(e^{j\omega})$ por el numerador de la ecuación anterior. Es decir,

$$Y(e^{j\omega})(1 + 0.25e^{-j\omega} - 0.125e^{-j2\omega}) = X(e^{j\omega})(10 - e^{-j\omega}).$$

Por tanto,

$$Y(e^{j\omega}) = -0.25e^{-j\omega}Y(e^{j\omega}) + 0.125e^{-j2\omega}Y(e^{j\omega}) + 10X(e^{j\omega}) - 1e^{-j\omega}X(e^{j\omega}).$$

Debido a la linealidad, tomamos la transformada inversa de Fourier de cada término, observando que la multiplicación de $e^{-j\omega n_o}$ en el dominio de frecuencia corresponda a un desplazamiento de $-n_o$ en el dominio de tiempo. De este modo, la ecuación de diferencias es:

$$y[n] = -0.25y[n-1] + 0.125y[n-2] + 10x[n] - x[n-1].$$

(c) Para hallar la respuesta a impulso, $h[n]$, rescribimos la ecuación para $H(e^{j\omega})$ que hallamos en el apartado (a) como la suma de dos sistemas de primer orden y unimos término por término para hallar qué valores del numerador deben corresponder a cada término. Es decir,

$$H(e^{j\omega}) = \frac{10 - e^{-j\omega}}{(1-0.25e^{-j\omega})(1+0.5e^{-j\omega})} = \frac{A}{(1-0.25e^{-j\omega})} + \frac{B}{(1+0.5e^{-j\omega})}$$

$$= \frac{A(1+0.5e^{-j\omega})}{(1-0.25e^{-j\omega})(1+0.5e^{-j\omega})} + \frac{B(1-0.25e^{-j\omega})}{(1-0.25e^{-j\omega})(1+0.5e^{-j\omega})}$$

$$= \frac{A + B + (0.5A - 0.25B)e^{-j\omega})}{(1-0.25e^{-j\omega})(1+0.5e^{-j\omega})}.$$

Al unir los términos obtenemos $A = 2$ y $B = 8$. Entonces, la transformada inversa de cada término se puede determinar a partir de la tabla 5.2:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{2}{(1-0.25e^{-j\omega})} + \frac{8}{(1+0.5e^{-j\omega})}$$

que nos da,

$$h[n] = 2(0.25)^n u[n] + 8(-0.5)^n u[n].$$