INSTITUTO TECNOLÓGICO DE MASSACHUSETTS
Departamento de Ingeniería Eléctrica e Informática

6.003: Señales y sistemas — Otoño 2003

Soluciones del boletín de problemas 8

Ejercicios para el estudio en casa

O&W, 8.35

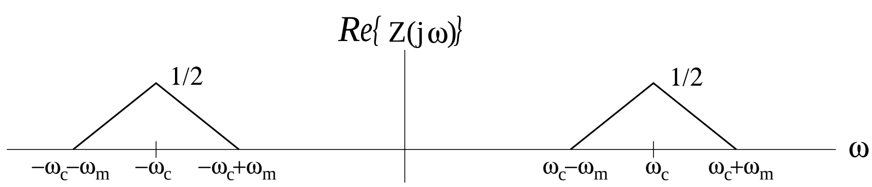
(a) En el diagrama del sistema observamos que:

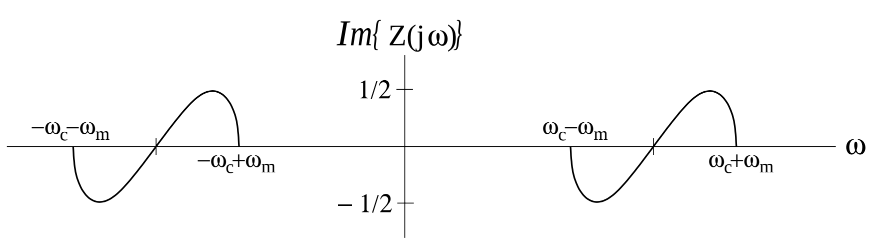
$$z(t) \quad = \quad x(t)\cos(\omega_c t)$$

Si utilizamos la propiedad de la multiplicación:

$$Z(j\omega) \quad = \quad \frac{1}{2\pi}(X(j\omega) * \mathcal{FT}\{\cos w_c t\})$$

La TF de $\cos w_c t$ son dos impulsos con área π en $\pm w_c$. Por lo tanto, $Z(jw)$ es el espectro de $X(j\omega)$ desplazado para centrarse en ω_c y $-\omega_c$ y a escala de $\frac{1}{2\pi} \times \pi = \frac{1}{2}$. Las partes reales e imaginarias de $Z(j\omega)$ son las siguientes:





Para hallar la TF de $p(t)$, definamos en primer lugar una señal, $q(t)$, tal que:

$$q(t) = \begin{cases} 2, & |w| \leq \frac{\pi}{2w_c} \\ 0, & |w| > \frac{\pi}{2w_c} \end{cases}$$

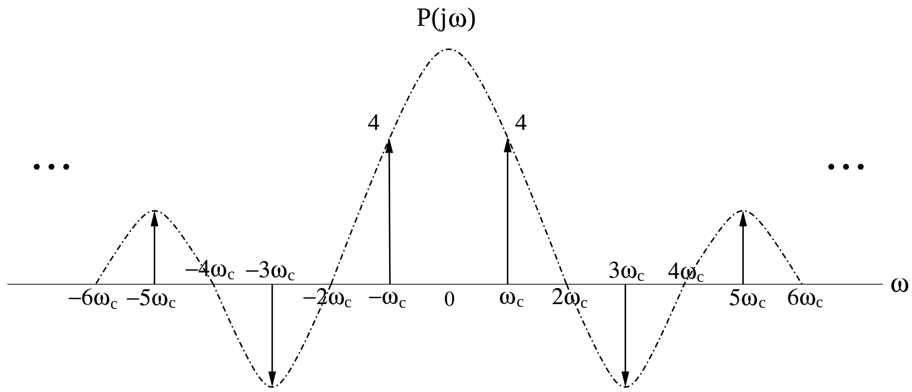
Por lo tanto,

$$p(t) = \left[q(t) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n\frac{2\pi}{w_c}) \right] - 1$$

Si tomamos la transformada de Fourier,

$$P(j\omega) = \frac{4\sin(\frac{\pi\omega}{2\omega_c})}{\omega} \left[\omega_c \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_c) \right] - 2\pi\delta(\omega)$$

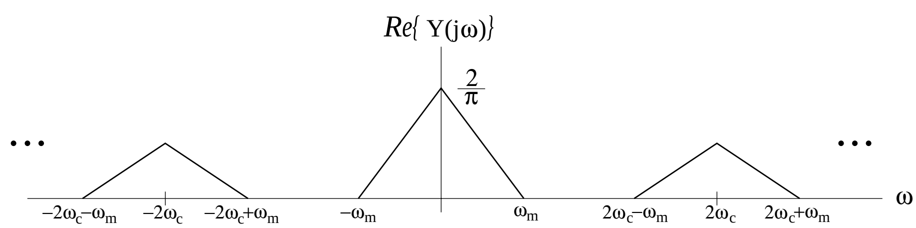
A continuación, tenemos el diagrama de $P(jw)$. $\Im m\{P(jw)\} = 0$.

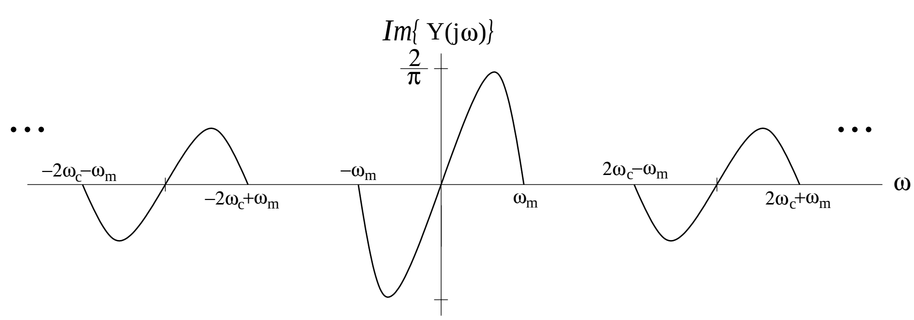


Observe que en el gráfico anterior desaparece el impulso que se encuentra en el origen debido a la resta con $2\pi\delta(\omega)$.

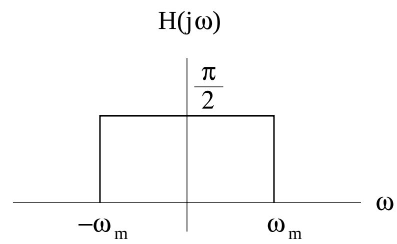
Utilice de nuevo la propiedad de la multiplicación $Y(j\omega) = \frac{1}{2\pi}(Z(j\omega) * P(jw))$.

A continuación, se muestran las partes real e imaginaria de $Y(jw)$:

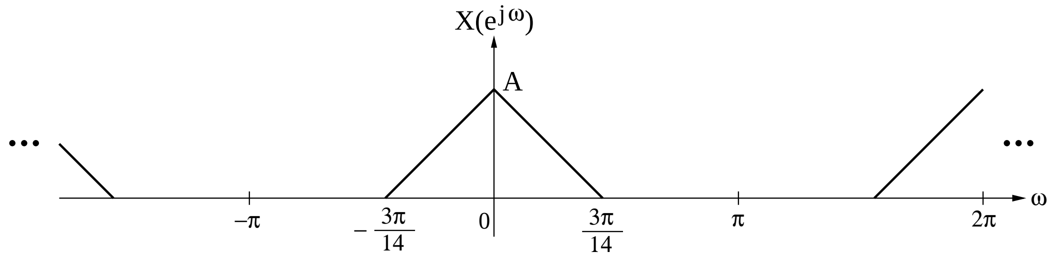




(b) Para que $x(t) = v(t)$, debemos mantener el contenido de la frecuencia de $Y(j\omega)$ entre $\pm w_m$ realizar su escala correctamente. Por tanto, $H(j\omega)$ es un filtro de paso bajo con frecuencia de corte ω_m y ganancia $\frac{\pi}{2}$, tal como se dibuja a continuación:

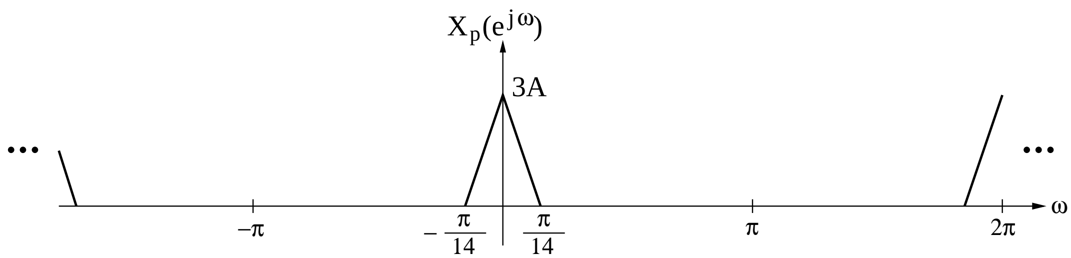


Problema 1 (O&W, 7.34)
$X(e^{j\omega})$ tiene las características que se trazan en el siguiente gráfico (donde A es cualquier número real) :

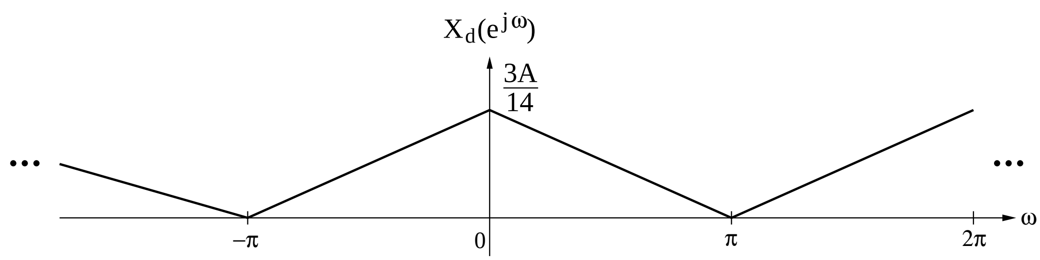


Para que $X(e^{j\omega})$ ocupe todo el rango entre $-\pi$ y π, tenemos que realizar a escala el espectro de $-\frac{3\pi}{14}$ a $\frac{3\pi}{14}$ por un factor de $\frac{14}{3}$, para lo cual tenemos que cambiar la velocidad de muestreo por un factor de $\frac{14}{3}$. Dado que sólo podemos sobremuestrear y submuestrear por factores enteros, tenemos que sobremuestrear por un factor de 3 y, a continuación, submuestrear por un factor de 14.

Al sobremuestrear por 3, comprimimos el espectro de $X(e^{j\omega})$ por un factor de 3 y, a continuación, lo pasamos a través de un filtro de paso bajo con una ganancia de 3. En la siguiente figura se muestra el resultado:



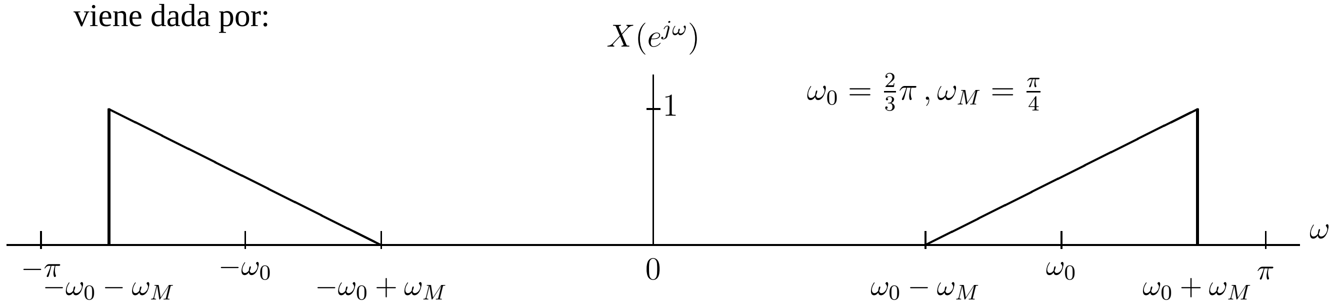
Posteriormente, cuando submuestreamos el espectro anterior por 14, lo expandimos por un factor de 14 y trazamos la escala de la altura a $\frac{1}{14}$, como se indica en el siguiente gráfico:



Por lo tanto, $L = 3$ y $M = 14$.

Problema 2

(a) $x[n]$ es una señal en tiempo discreto de valor real cuya TF en tiempo discreto (DTFT) $-\pi < \omega < \pi$ viene dada por:

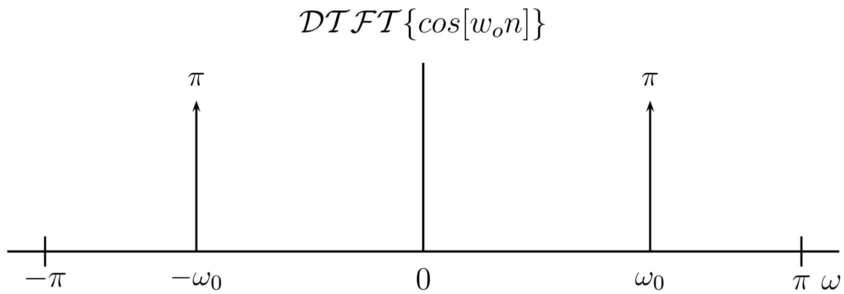


Sea,

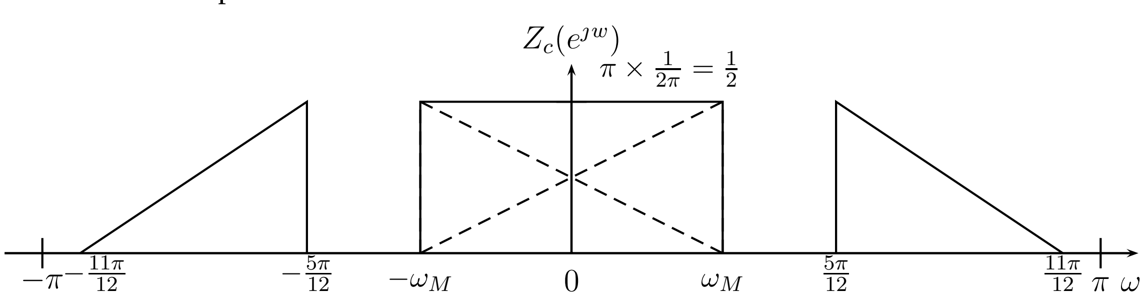
$$z_c[n] = x[n]\cos[w_o n]$$

Si utilizamos la tabla 5.2 y tomamos la transformada de Fourier de $\cos\,[w_o n]$,

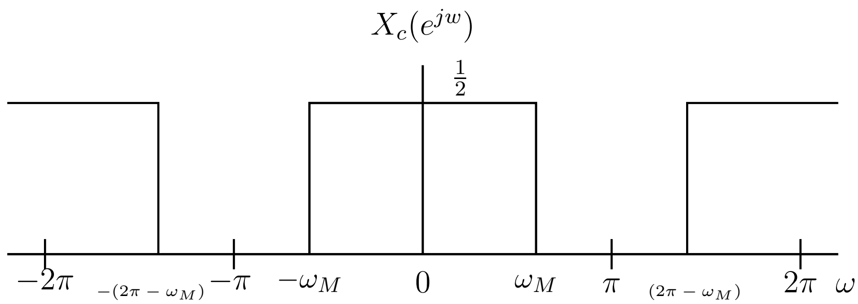
$$\mathcal{DTFT}\{\cos[w_o n]\} = \pi \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \{\delta(w - w_o - 2\pi l) + \delta(w + w_o - 2\pi l)\}$$



Si utilizamos la propiedad de la multiplicación de la tabla 5.1, $Z_c(e^{jw})$ es la convolución periódica de $X(e^{jw})$ y la $\mathcal{DTFT}\{\cos[w_o n]\}$ sobre un periodo 2π y después a escala $\frac{1}{2\pi}$. Tomamos un periodo, de $-\pi$ a π, de $\mathcal{DTFT}\{\cos[w_o n]\}$ y realizamos una convolución regular con $X(e^{jw})$. Centrado en $w = 0$, obtenemos la superposición de dos $X(e^{jw})$ a escala $\frac{1}{2}$. $Z_c(e^{jw})$ se muestra a continuación para el intervalo de $-\pi$ a π.



$Z_c(e^{jw})$ pasa después a través de un filtro de paso bajo con frecuencia de corte w_M y ganancia 1. A continuación, se muestra la TF en tiempo discreto (DTFT) de $x_c[n]$:



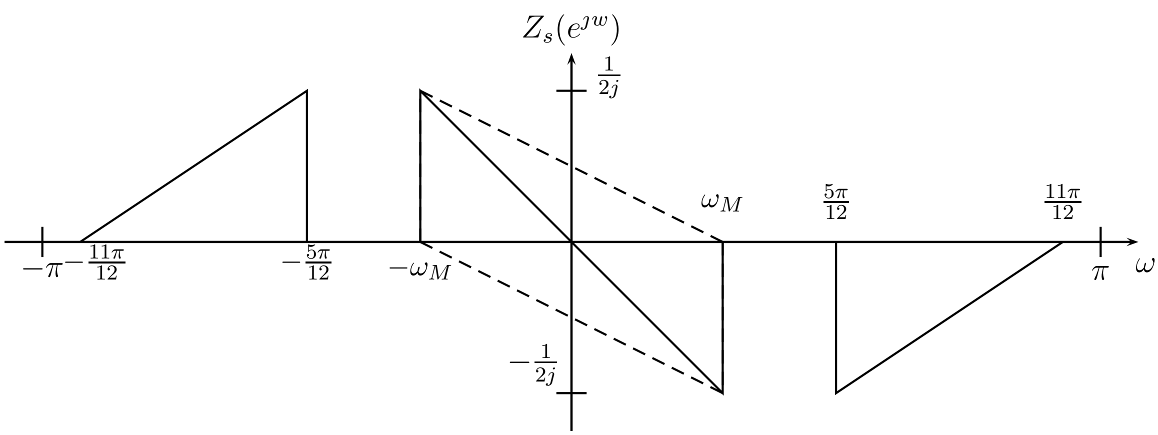
Sea,

$$z_s[n] = x[n]\sin[w_o n]$$

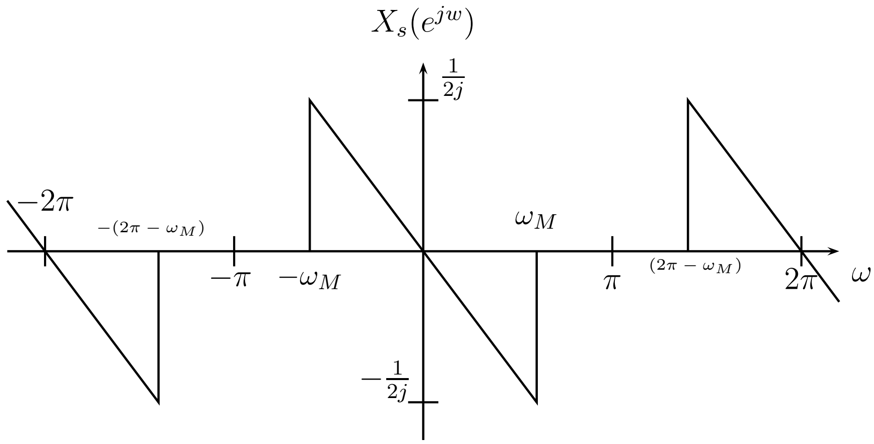
Si utilizamos la tabla 5.2 y tomamos la transformada de Fourier de $\sin[w_o n]$,

$$\mathcal{DTFT}\{\sin[w_o n]\} = \frac{\pi}{j}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\{\delta(w-w_o-2\pi l)-\delta(w+w_o-2\pi l)\}$$

Hallamos $Z_s(e^{jw})$ mediante la convolución periódica como anteriormente. A continuación, se muestran los términos superpuestos centrados en $w=0$ desde $X(e^{jw})$ (en líneas discontinuas). Añadidos los términos de superposición, indicamos el $Z_s(e^{jw})$ que resulta para el intervalo de $-\pi$ a π.



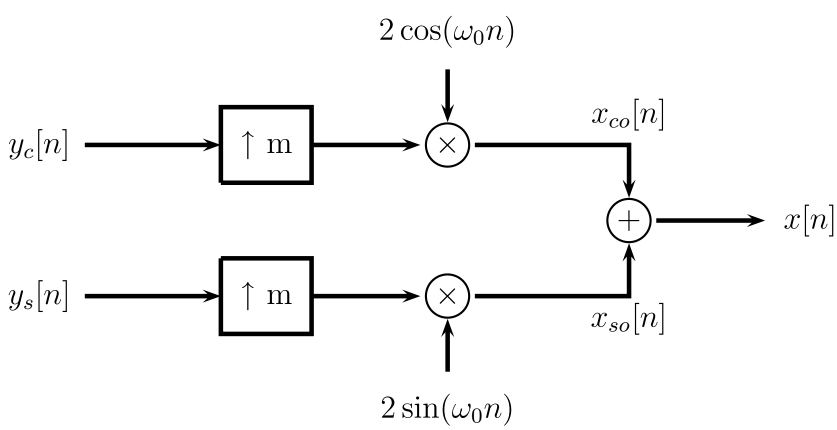
$Z_s(e^{jw})$ pasa a través del filtro de paso bajo con frecuencia de corte w_M y ganancia de 1. Hallamos la DTFT de $x_s[n]$ tal como se indica a continuación:



(b) El máximo submuestreo posible se consigue una vez se expande la parte no cero de un periodo del espectro de tiempo discreto para llenar toda la banda desde $-\pi$ hasta π.
Por lo tanto,

$$m = \frac{\pi}{w_M} = \frac{\pi}{\frac{\pi}{4}} = 4$$

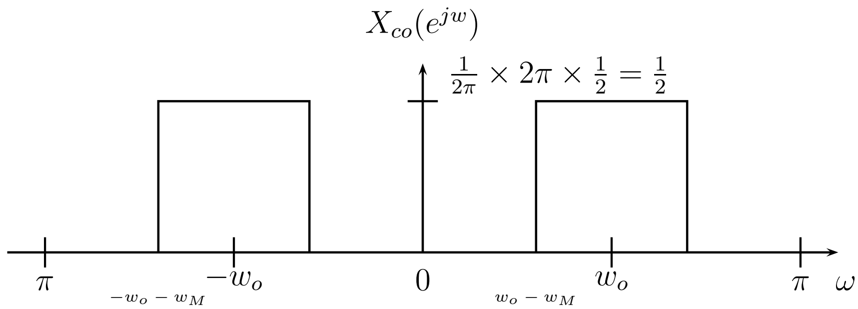
(c) El siguiente esquema corresponde al diagrama del sistema para recuperar $x[n]$.

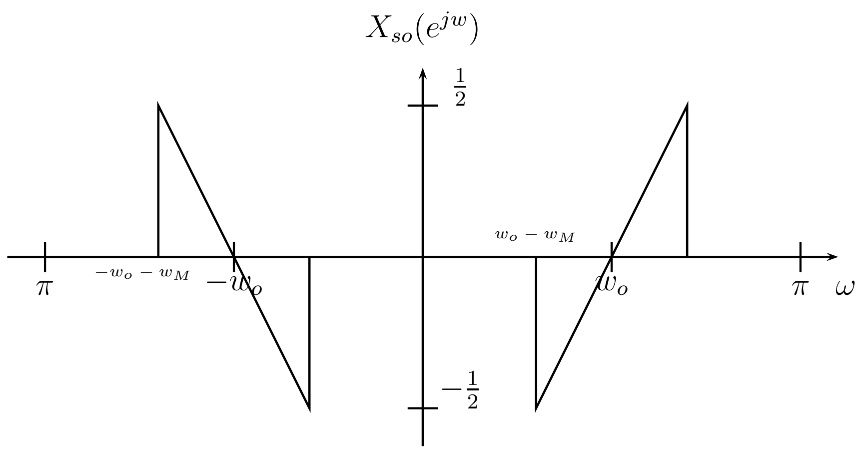


Después de sobremuestrear por m, recuperamos $x_c[n]$ y $x_s[n]$ de $y_c[n]$ e $y_s[n]$ respectivamente. Observe que el sobremuestreo por m tiene un bloque (flecha m hacia arriba) de inserción cero y un filtro de paso bajo para la interpolación del dominio de tiempo. La DTFT de $x_c[n]$ y $x_s[n]$ se deriva en *a*. Según el diagrama del sistema:

$$x_{co}[n] = x_c[n] \times 2\cos[w_o n]$$

Si utilizamos la propiedad de la multiplicación y realizamos una convolución periódica, obtenemos $X_{co}(e^{jw})$ tal como se indica a continuación:





Igualmente, $x_{so}[n] = x_s[n] \times 2\sin[w_o n]$, y obtenemos $X_{so}(e^{jw})$ como se indica en la figura.

Si añadimos $X_{co}(e^{jw})$ y $X_{so}(e^{jw})$, obtenemos el espectro de $X(e^{jw})$. De este modo, recuperamos $x[n]$.

Problema 3

(a)

$$x(t) = e^{-t}u(-t) + 2e^{-2t}u(t)$$

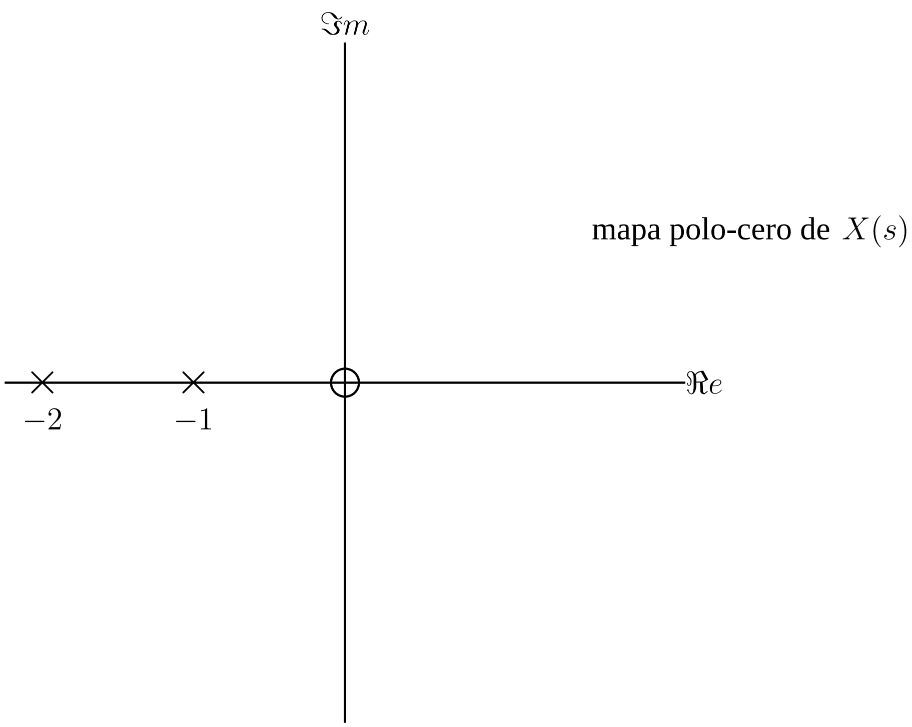
Si utilizamos las transformadas de Laplace de las funciones elementales (tabla 9.2), hallamos:

$$\begin{aligned} e^{-t}u(-t) &\longleftrightarrow \frac{-1}{s+1}, \qquad R_1 = \mathcal{R}e\{s\} < -1 \\ e^{-2t}u(t) &\longleftrightarrow \frac{1}{s+2}, \qquad R_2 = \mathcal{R}e\{s\} > -2 \end{aligned}$$

Si utilizamos la propiedad de linealidad tenemos:

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{-1}{s+1} + \frac{2}{s+2}, \qquad \text{ROC contiene} \quad R_1 \bigcap R_2 \\ &= \frac{s}{(s+1)(s+2)} \qquad \text{ROC} = -2 < \mathcal{R}e\{s\} < -1 \end{aligned}$$

A continuación, se indica el diagrama de polo-cero:



(b)

$$\begin{aligned} x(t) &= (e^t \cos t)u(-t) + u(-t) \\ &= \left(e^t(\frac{1}{2}e^{jt} + \frac{1}{2}e^{-jt})\right)u(-t) + u(-t) \\ &= \frac{1}{2}e^{(1+j)t}u(-t) + \frac{1}{2}e^{(1-j)t}u(-t) + u(-t) \end{aligned}$$

Mediante las transformadas de Laplace de funciones elementales (tabla 9.2), hallamos:

$$\begin{aligned} e^{(1+j)t}u(-t) &\longleftrightarrow \frac{-1}{s-(1+j)}, \qquad R_1 = \mathcal{R}e\{s\} < 1 \\ e^{(1-j)t}u(-t) &\longleftrightarrow \frac{-1}{s-(1-j)}, \qquad R_2 = \mathcal{R}e\{s\} < 1 \\ u(-t) &\longleftrightarrow \frac{-1}{s} \qquad R_3 = \mathcal{R}e\{s\} < 0 \end{aligned}$$

Mediante la propiedad de linealidad tenemos que:

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{-1/2}{s-(1+j)} + \frac{-1/2}{s-(1-j)} + \frac{-1}{s}, \qquad \text{ROC contiene} \quad R_1 \bigcap R_2 \bigcap R_3 \\ &= \frac{-(1/2)s^2 + (1/2)s(1-j) - (1/2)s^2 + (1/2)s(1+j) - s^2 + 2s - 2}{s(s^2-2s+2)} \qquad \text{ROC} = \mathcal{R}e\{s\} < 0 \\ &= \frac{-1(2s^2-3s+2)}{s(s^2-2s+2)} \qquad \text{ROC} = \mathcal{R}e\{s\} < 0 \end{aligned}$$

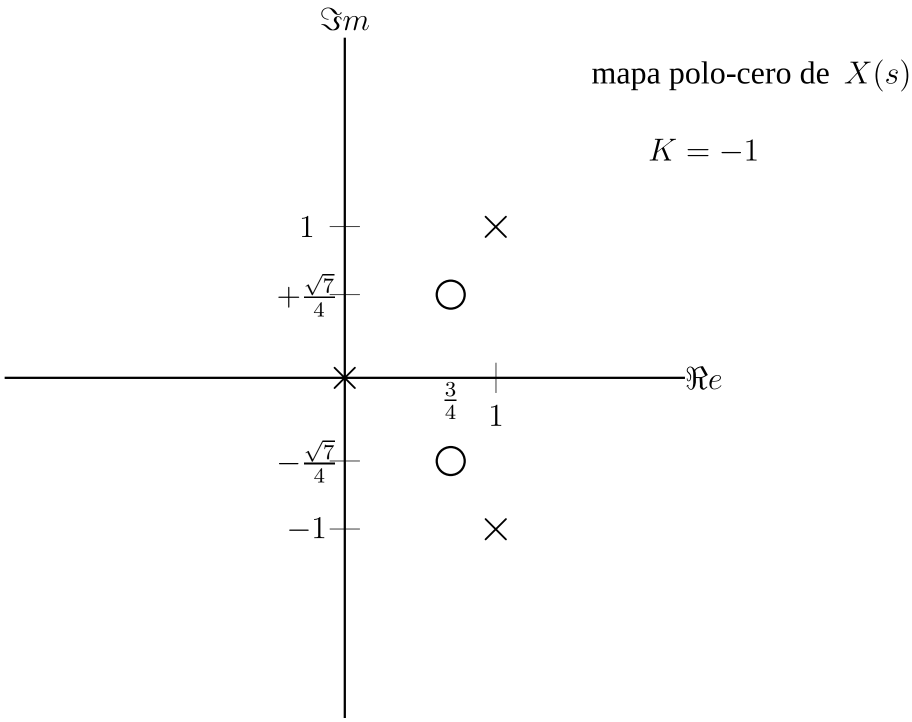
Resolviendo el denominador, observamos que los polos se ubican en:

$$\begin{aligned} s &= 1 \pm j \\ s &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo el numerador observamos que los ceros se ubican en:

$$s = \frac{3}{4} \pm j\frac{\sqrt{7}}{4}$$

A continuación, indicamos el diagrama polo cero:



Problema 4

(a) Tenemos lo siguiente:

$$X(s) = \frac{s-25}{s^2-s-12} = \frac{s-25}{(s-4)(s+3)} \qquad -3 < \mathcal{R}e\{s\} < 4$$

Mediante la expansión de fracción parcial:

$$\frac{s-25}{(s-4)(s+3)} = \frac{A}{s-4} + \frac{B}{s+3}$$

multiplique ambos lados por $(s-4)$ e introduzca $s = 4$,

$$\begin{aligned} \frac{s-25}{s+3} &= A \\ A &= -3 \end{aligned}$$

multiplique ambos lados por $(s+3)$ e introduzca $s = -3$,

$$\begin{aligned} \frac{s-25}{s-4} &= B \\ B &= 4 \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$X(s) \;=\; \frac{-3}{s-4} + \frac{4}{s+3} \qquad -3 < \mathcal{R}e\{s\} < 4$$

Utilizando la tabla de las transformadas de Laplace para funciones elementales (tabla 9.2) y dada la ROC, hallamos:

$$x(t) = 3e^{4t}u(-t) + 4e^{-3t}u(t)$$

(b) Tenemos lo siguiente:

$$X(s) = \frac{2s^2+7s+9}{(s+2)^2} = \frac{2s^2+7s+9}{s^2+4s+4} \qquad \mathcal{R}e\{s\} > -2$$

Como el grado del numerador es el mismo que el del denominador, tenemos que utilizar una división larga para dividir el numerador por el denominador antes de hallar la expansión de la fracción parcial:

$$X(s) = 2 - \frac{s-1}{(s+2)^2}$$

Ya podemos hallar la expansión de la fracción parcial del segundo término del lado derecho de la igualdad:

$$\frac{s-1}{(s+2)^2} = \frac{A}{(s+2)^2} + \frac{B}{s+2}$$

multiplique los dos lados por $(s+2)^2$ e introduzca $s=-2$,

$$\begin{aligned} s-1 &= A + B(s+2) \\ A &= -3 \end{aligned}$$

multiplique los dos lados por $(s+2)^2$, e introduzca A y $s=1$,

$$\begin{aligned} s-1 &= A + B(s+2) \\ B &= 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto:

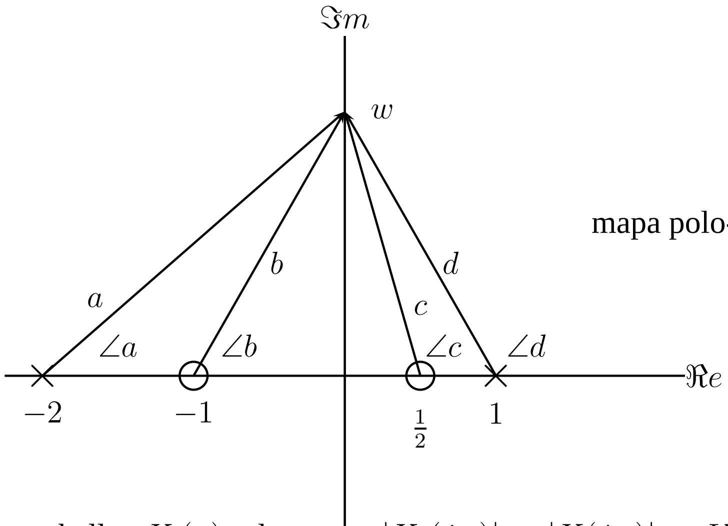
$$\begin{aligned} X(s) &= 2 - \left(\frac{-3}{(s+2)^2} + \frac{1}{s+2}\right) \qquad \mathcal{R}e\{s\} > -2 \\ &= 2 + \frac{3}{(s+2)^2} - \frac{1}{s+2} \qquad \mathcal{R}e\{s\} > -2 \end{aligned}$$

Utilizando la tabla de las transformadas de Laplace para funciones elementales (tabla 9.2) y dada la ROC, hallamos:

$$x(t) = 2\delta(t) + 3te^{-2t}u(t) - e^{-2t}u(t)$$

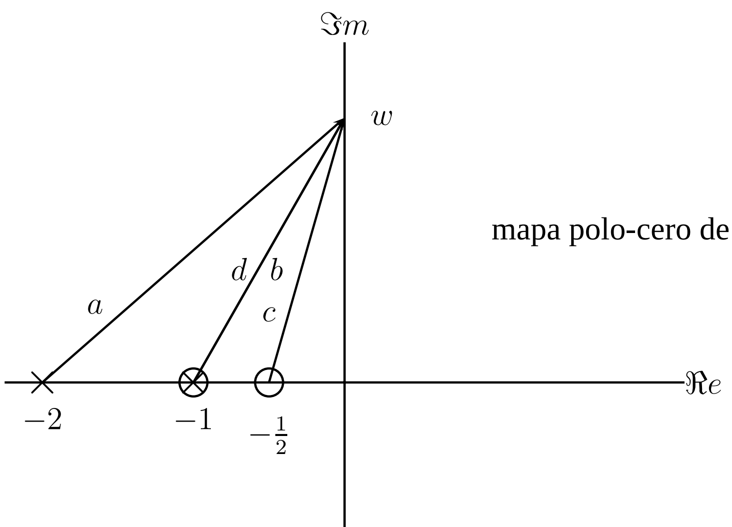
Problema 5 (O&W, 9.24 (f))

Tenemos $X(s)$. Se puede calcular $|X(jw)|$ para cualquier w como $K\frac{bc}{ad}$ donde K es cualquier número real y a, b, c, d son magnitudes de vectores, como se indica a continuación en el diagrama de polo-cero de $X(s)$.



Tenemos que hallar $X_1(s)$ tal que, $|X_1(jw)| = |X(jw)| = K\frac{bc}{ad}$, y no existan polos ni ceros en el plano derecho.

Si reflejamos el polo (en 1 en el eje real) y el cero (en $\frac{1}{2}$ en el eje real) a lo largo del eje jw o del eje imaginario, podemos conservar las magnitudes *d* y *c* del polo y del cero respectivamente. El diagrama polo-cero que resulta es el siguiente:



En el diagrama anterior, el polo y el cero en −1 se cancelarán mutuamente. Por lo tanto,

$$X_1(s) \quad = \quad \frac{K(s+\frac{1}{2})}{(s+2)}$$

Es importante observar que, a partir del mapa polo-cero de $X(s)$, como $b = d$,

$$|X(jw)| \quad = \quad K\frac{bc}{ad} = K\frac{c}{a} = |X_1(jw)|$$

Ahora, tenemos que hallar $X_2(jw)$ de forma que $\angle X_2(jw) = \angle X(jw)$ y no existan polos o ceros en el plano derecho del mapa polo-cero de $X_2(s)$. En el mapa polo-cero de $X(s)$ de la página anterior podemos escribir la fase, $\angle X(jw)$, de la siguiente forma:

$$\angle X(jw) \;=\; \angle b + \angle c - \angle a - \angle d$$

Si reflejamos el polo en $s = 1$ a lo largo del eje jw, la contribución a la fase general desde el polo reflejado se transforma en $-(\pi - \angle d) = -\pi + \angle d$. Observe que el signo del ángulo aportado $(\angle d)$ se ha invertido. Ahora, convirtamos ese polo en un cero. La contribución a la fase general del cero resultante es $+(\pi - \angle d) = \pi - \angle d$.
Las dos operaciones anteriores, que reflejan un polo a lo largo del eje jw y que lo transforma en cero, simplemente añaden $+\pi$ a la fase general. Para mantener la fase igual, podemos multiplicar la transformada de Laplace resultante por -1 ya que $-1 = e^{-j\pi}$ restará π de la fase general.

Igualmente, si reflejamos el cero en $s = \frac{1}{2}$ a lo largo del eje jw, transformamos el cero en un polo y multiplicamos la transformada de Laplace resultante por -1, la fase permanecerá igual, sin cambios.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} X_2(s) &= K(-1)(-1)\frac{(s+1)(s+1)}{(s+2)(s+\frac{1}{2})} \\ &= \frac{K(s+1)^2}{(s+2)(s+\frac{1}{2})} \end{aligned}$$

Problema 6 (O&W, 9.26)
Necesitamos hallar la transformada de Laplace de $y(t)$ utilizando las propiedades de dicha transformada. Las dos propiedades, el desplazamiento de tiempo (tabla 9.1 del libro de texto) y el escalado de tiempo -1 (págs. 686 y 687 del libro) que necesitaremos son:

$$\begin{aligned} x(t-t_0) &\longleftrightarrow e^{-st_0}X(s) \\ x(-t) &\longleftrightarrow X(-s) \end{aligned}$$

La ROC es la misma para la propiedad de desplazamiento de tiempo . Para la propiedad de escalado de tiempo por -1, la ROC se refleja sobre el eje $j\omega$ o el eje imaginario en el plano s.

$$\begin{aligned} y(t) &= x_1(t-2) * x_2(-t+3) \\ \text{donde} \quad x_1(t) &= e^{-2t}u(t) \\ \text{y} \quad x_2(t) &= e^{-3t}u(t) \end{aligned}$$

si tomamos la transformada de Laplace:

$$\begin{aligned} x_1(t) &\longleftrightarrow \frac{1}{s+2}, \qquad \mathcal{R}e\{s\} > -2 \\ x_1(t-2) &\longleftrightarrow e^{-2s}\frac{1}{s+2}, \qquad \mathcal{R}e\{s\} > -2 \\ x_2(t) &\longleftrightarrow \frac{1}{s+3}, \qquad \mathcal{R}e\{s\} > -3 \\ x_2(-t) &\longleftrightarrow \frac{1}{-s+3}, \qquad \mathcal{R}e\{s\} < 3 \\ x_2(-(t-3)) &\longleftrightarrow e^{-3s}\frac{1}{-s+3}, \qquad \mathcal{R}e\{s\} < 3 \end{aligned}$$

Utilizando la propiedad de la convolución de la transformada de Laplace (tabla 9.1), tenemos:

$$\begin{aligned} Y(s) &= X_1(s)X_2(s), \qquad \text{al menos} \quad R_1 \cap R_2 \\ &= \frac{e^{-2s}}{s+2} \times \frac{e^{-3s}}{-s+3} \\ Y(s) &= \frac{-e^{-5s}}{s^2-s-6}, \qquad -2 < \mathcal{R}e\{s\} < 3 \end{aligned}$$