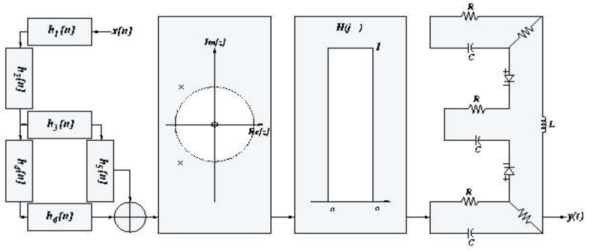


Señales y sistemas

Otoño 2003

Clase 6

23 de septiembre de 2003

1. Repetición, propiedades y ejemplos de las series de fourier en TC
2. Series de Fourier en tiempo discreto (TD)
3. Ejemplos de series de Fourier en tiempo discreto y diferencias con las series de Fourier en tiempo continuo (TC)

Pares de series de Fourier en tiempo continuo (TC)

$$\left(\omega_0 = \frac{2\pi}{T}\right)$$

Review:
(Repaso:)

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j2\pi kt/T}$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

pasar esto por alto en el futuro

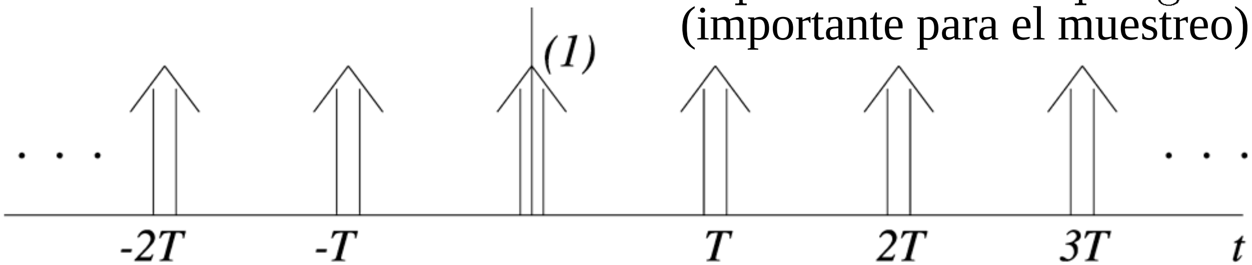
$$x(t) \stackrel{FS}{\longleftrightarrow} a_k$$

Otro ejemplo (importante): tren de impulsos periódicos

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad - \quad \text{Sampling function}$$

(función de muestreo)

important for sampling
(importante para el muestreo)



$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \delta(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

$$= \frac{1}{T} \quad \text{for } all\ k \quad !$$

(para todo)

$$\Downarrow$$

$$x(t) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_0 t}$$

— Todos los componentes tienen:

(1) la misma amplitud,

y

(2) la misma fase.

(Algunas de las) Propiedades de las series de Fourier en tiempo continuo (TC)

- Linealidad $x(t) \leftrightarrow a_k, y(t) \leftrightarrow b_k \;\; \Rightarrow \alpha x(t) + \beta y(t) \leftrightarrow \alpha a_k + \beta b_k$
- Conjugar simetría

$$x(t) \text{ is real} \quad \Rightarrow \quad a_{-k} = a_k^*$$

(es real)

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} a_k &= Re\{a_k\} + jIm\{a_k\} \\ &= |a_k| e^{j\angle a_k} \end{aligned}$$

$Re\{a_k\}$ is even, $Im\{a_k\}$ is odd
(es par) (es impar)

or

$|a_k|$ is even, $\angle a_k$ is odd
(es par) (es impar)

- Desplazamiento de tiempo

$$\begin{aligned} x(t) &\leftrightarrow a_k \\ x(t-t_0) &\leftrightarrow a_k e^{-jk\omega_0 t_0} = a_k e^{-jk2\pi t_0/T} \end{aligned}$$

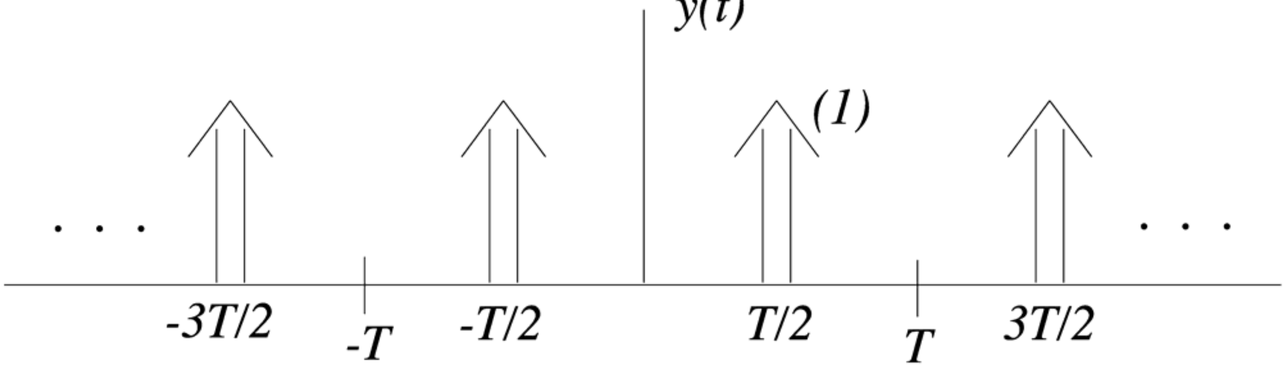
Introduce un desplazamiento lineal de fase $\propto t_o$

Ejemplo: desplazamiento por medio periodo

$$y(t) = x(t - T/2) \ \leftrightarrow \quad a_k e^{-jk\pi} = (-1)^k a_k$$

$$\text{using} \quad e^{-jk\omega_0 T/2} \quad = \quad e^{-jk\pi}$$

(utilizando)



$$y(t) \leftrightarrow \quad (-1)^k a_k \quad \left(a_k = \frac{1}{T} = \text{ F.C. of } \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \right)$$

$$\|$$

$$\frac{(-1)^k}{T}$$

- **Relación de Parseval**

$$\underbrace{\frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2 dt}_{\substack{\text{Average signal power} \\ \text{(potencia media de la señal)}}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{|a_k|^2}_{\substack{\text{Power in the} \\ k_{th} \text{ harmonic} \\ \text{(potencia en el armónico } k_{th}\text{)}}}$$

La energía es la misma tanto si se mide en el dominio del tiempo como en el de la frecuencia

- **Propiedad de multiplicación**

$$\begin{array}{ccll} x(t) \leftrightarrow a_k, y(t) & \leftrightarrow & b_k & (\text{Both } x(t) \text{ and } y(t) \text{ are} \\ & \Downarrow & & \text{periodic with the same period } T) \end{array}$$

($x(t)$ e $y(t)$ son periódicos con el mismo periodo T)

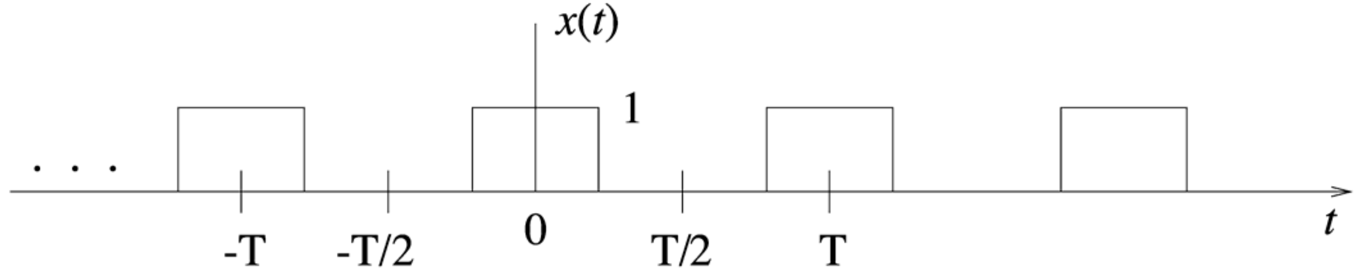
$$x(t) \cdot y(t) \quad \leftrightarrow \quad c_k = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l b_{k-l} = a_k * b_k$$

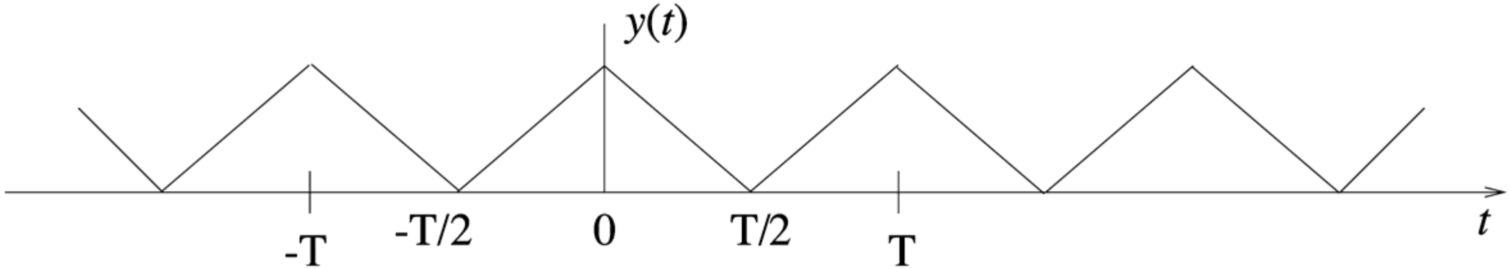
Proof: (Prueba:)

$$\underbrace{\sum_l a_l e^{jl\omega_0 t}}_{x(t)} \cdot \underbrace{\sum_m b_m e^{jm\omega_0 t}}_{y(t)} = \sum_{l,m} a_l b_m e^{j(l+m)\omega_0 t} \xrightarrow{l+m=k} \sum_k \underbrace{\left[\sum_l a_l b_{k-l}\right]}_{c_k} e^{jk\omega_0 t}$$

Convolución periódica

$x(t)$, $y(t)$ periódico con periodo T





$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t-\tau) d\tau \quad - \text{ not very meaningful}$$

(no es muy significativo)

E.g. If both $x(t)$ and $y(t)$ are positive, then
(Ej., si $x(t)$ e $y(t)$ son positivos,)

$$x(t) * y(t) = \infty$$

Convolución periódica (continuación)

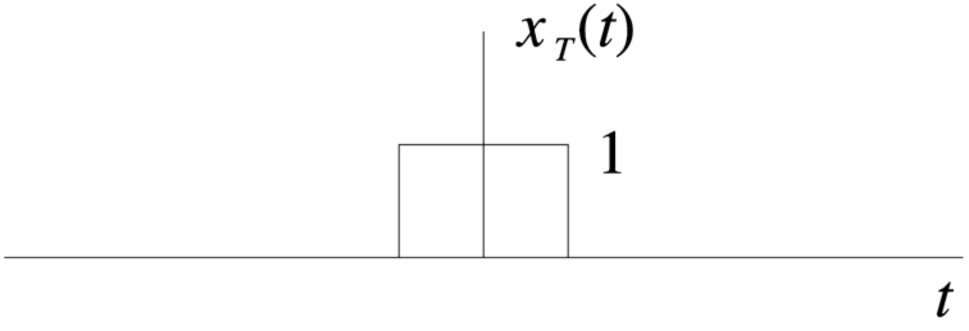
Convolución periódica: integrar sobre un periodo *cualquiera* (ej. -*T*/2 a *T*/2)

$$z(t) = \int_{-T/2}^{T/2} x(\tau)y(t-\tau)d\tau \ = \int_{-\infty}^{\infty} x_T(\tau)y(t-\tau)d\tau$$

where
(donde)

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t) & -T/2 < t < T/2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

(de lo contrario)



Datos de la convolución periódica (continuación)

1) $z(t)$ es periódico con periodo T (¿por qué?)

From Lecture #2, $x(t) = x(t+T) \to y(t) = y(t+T)$ for LTI systems.
(De la clase 2,...) (para los sistemas LTI)

In the convolution, treat $y(t)$ as the input and $x_T(t)$ as $h(t)$
(En la convolución, considere $y(t)$ como la entrada y $x(t)$ como $h(t)$)

2) No importa el periodo sobre el que hayamos decidido realizar la integración:

$$z(t) = \int_T x(\tau)y(t-\tau)d\tau = x(t) \otimes y(t)$$

Convolución periódica en el tiempo

3)

$$x(t) \leftrightarrow a_k, y(t) \leftrightarrow b_k, z(t) \leftrightarrow c_k$$

$$c_k = \frac{1}{T}\int_T z(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_T \left(\int_T x(\tau)y(t-\tau)d\tau\right)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

$$= \int_T \underbrace{\left(\frac{1}{T}\int_T y(t-\tau)e^{-jk\omega_0(t-\tau)}dt\right)}_{b_k} x(\tau)e^{-jk\omega_0\tau}d\tau$$

$$= \int_T b_k x(\tau)e^{-jk\omega_0\tau}d\tau = Ta_k b_k$$

¡Multiplicación en frecuencia!

Representación de las series de Fourier de señales periódicas de tiempo discreto (TD)

- $x[n]$ - periódico con periodo fundamental N, frecuencia fundamental

$$x[n+N] = x[n] \quad \text{and} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

- Sólo los $e^{j\omega n}$ periódicos con periodo N aparecerán en las *SF*

$$\omega N = k2\pi \Leftrightarrow \omega = k\omega_0 \quad , \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

- Sólo existen N señales distintivas de esta forma

$$e^{j(k+N)\omega_0 n} = e^{jk\omega_0 n} e^{j\overbrace{N\omega_0 n}^{2\pi n}} = e^{jk\omega_0 n}$$

- *Podríamos* utilizar sólo $e^{j0\omega_0 n}, e^{j1\omega_0 n}, e^{j2\omega_0 n}, \cdots, e^{j(N-1)\omega_0 n}$
- Sin embargo, a menudo resulta útil permitir la elección de que N valores consecutivos de k sean *arbitrarios*.

$$\Downarrow$$

Representación de las series de Fourier en tiempo discreto (TD)

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$$

$\sum_{k=<N>}$ = Sumar sobre *cualesquiera* N valores consecutivos de k

— Esta es una serie *finita*

$\{a_k\}$ - Coeficientes de las series de Fourier

Preguntas:

1) ¿Qué señales periódicas de tiempo continuo tienen tal representación?

2) ¿Cómo hallamos a_k?

Respuesta a la pregunta 1:

Cualquier señal periódica de tiempo discreto tiene una representación de las series de Fourier:

$$
\begin{aligned}
x[n] &= \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\omega_0 n} \\
&\Downarrow \\
x[0] &= \sum_{k=<N>} a_k \\
x[1] &= \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\omega_0} \\
x[2] &= \sum_{k=<N>} a_k e^{j2k\omega_0} \\
&\vdots \\
x[N-1] &= \sum_{k=<N>} a_k e^{j(N-1)k\omega_0}
\end{aligned}
$$

N equations for N unknowns, $a_0, a_1, \cdots, a_{N-1}$

(N ecuaciones para N incógnitas,)

Una forma más directa de resolver para a_k

Series geométricas finitas

$$\sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \begin{cases} N & ,\alpha = 1 \\ \dfrac{1-\alpha^N}{1-\alpha} & ,\alpha \neq 1 \end{cases}$$

$$\Downarrow \qquad \alpha = e^{jk\omega_0}$$

$$\sum_{n=<N>} e^{jk\omega_0 n} = \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{jk\omega_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{jk2\pi/N}\right)^n$$

$$= \begin{cases} N & ,k = 0, \pm N, \pm 2N, \cdots \\ \dfrac{1-e^{jk(2\pi/N)N}}{1-e^{jk\omega_0}} = 0 & ,\text{otherwise} \end{cases}$$

(de lo contrario)

Por tanto, a partir de

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\omega_0 n}$$

$\Downarrow$ multiply both sides by $e^{-jm\omega_0 n}$
(multiplique ambos lados por)
and then $\sum_{n=<N>}$
(y después)

$$\begin{aligned}
\sum_{n=<N>} x[n]e^{-jm\omega_0 n} &= \sum_{n=<N>} \left(\sum_{k=<N>} a_k e^{jk\omega_0 n}\right) e^{-jm\omega_0 n} \\
&= \sum_{k=<N>} a_k \underbrace{\left(\sum_{n=<N>} e^{j(k-m)\omega_0 n}\right)}_{=N\delta[k-m]-\text{ orthogonality}} \\
&= N a_m \\
&\Downarrow
\end{aligned}$$

(ortogonalidad)

Par de las series de Fourier de tiempo discreto $\left(\omega_0 = \frac{2\pi}{N}\right)$

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\omega_0 n}$$ (Synthesis equation) (ecuación de síntesis)

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n] e^{-jk\omega_0 n}$$ (Analysis equaiton) (ecuación de análisis)

Nota: resulta conveniente pensar en a_k como elemento definido por *todos* los enteros k. Por tanto:

1) $a_{k+N} = a_k$ — propiedad especial de los coeficientes de Fourier de tiempo discreto (TD)

2) En la ecuación de síntesis sólo utilizamos N valores consecutivos de a_k. (Dado que $x[n]$ es periódico, viene especificado por N números en el dominio del tiempo o de la frecuencia.

Ejemplo 1: suma de un par de sinusoides

$$x[n] = \cos(\pi n/8) + \cos(\pi n/4 + \pi/4)$$

$$- \text{ periodic with period } N = 16 \Rightarrow \omega_0 = \pi/8$$

(periódico con periodo *N*)

$$x[n] = \frac{1}{2}\left[e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}\right] + \frac{1}{2}\left[e^{j\pi/4}e^{j2\omega_0 n} + e^{-j\pi/4}e^{-j2\omega_0 n}\right]$$

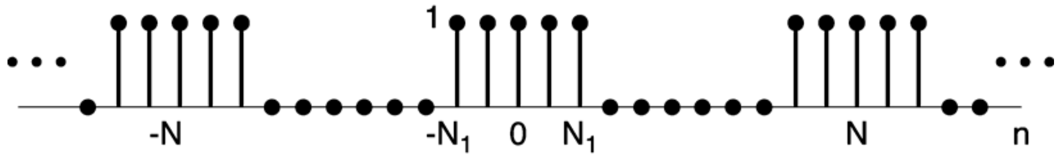
$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_1 &= 1/2 \\ a_{-1} &= 1/2 \\ a_2 &= e^{j\pi/4}/2 \\ a_{-2} &= e^{-j\pi/4}/2 \\ a_3 &= 0 \\ a_{-3} &= 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$a_{15} = a_{-1+16} = a_{-1} = 1/2$$

$$a_{66} = a_{2+4\times 16} = a_2 = e^{j\pi/4}/2$$

Ejemplo 2: **onda cuadrada de tiempo discreto (TD)**



$$a_0 = \frac{1}{N}\sum_{n=-N_1}^{N_1} x[n] = \frac{2N_1+1}{N} = a_N = a_{-N} = a_{6N} = \cdots$$

For $k \neq$ multiple of N:

(Para ... múltiplo de *N*:)

Utilizando $n = m - N_1$

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk\omega_0 (m-N_1)}$$

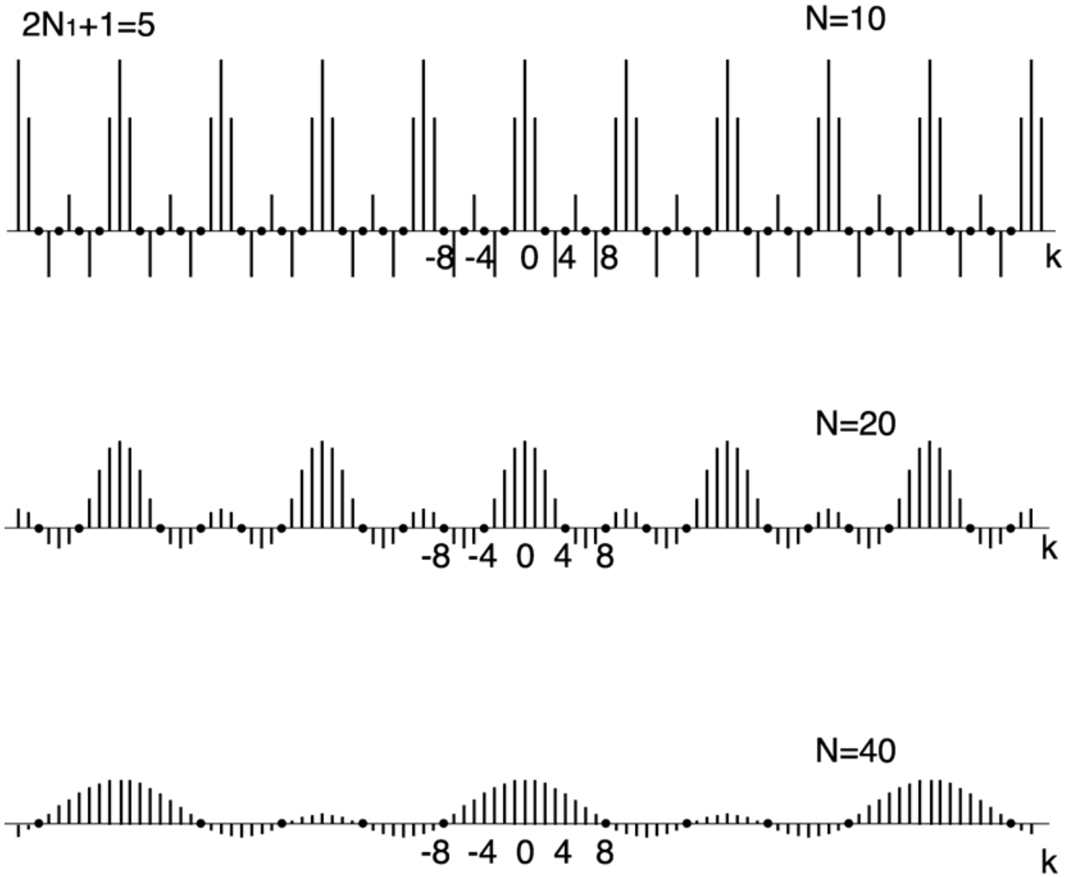
$$= \frac{1}{N}e^{jk\omega_0 N_1}\sum_{m=0}^{2N_1}\left(e^{-jk\omega_0}\right)^m = \frac{1}{N}e^{jk\omega_0 N_1}\frac{1-e^{-jk\omega_0(2N_1+1)}}{1-e^{jk\omega_0}}$$

$$= \frac{1}{N}\frac{\sin\left[k(N_1+1/2)\omega_0\right]}{\sin(k\omega_0/2)} = \frac{1}{N}\frac{\sin\left[2\pi k(N_1+1/2)/N\right]}{\sin(\pi k/N)}$$

$$\Downarrow$$

Ejemplo 2: onda cuadrada de tiempo discreto (continuación)

$$a_k = \frac{1}{N}\frac{\sin\left[2\pi k(N_1 + 1/2)/N\right]}{\sin(\pi k/N)}$$



Cuestiones de convergencia para las series de Fourier de tiempo discreto.

No se considera una cuestión, puesto que todas las series son sumas finitas.

Propiedades de las series de Fourier de tiempo discreto: muchas, al igual que en las series de Fourier de tiempo continuo.

Ejemplo:

$$
\begin{aligned}
x[n] &\quad \leftrightarrow \quad a_k \\
e^{jM\omega_0 n} x[n] &\quad \leftrightarrow \quad b_k = ?
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x[n] e^{jM\omega_0 n} &= \sum_{r=<N>} a_r e^{jr\omega_0 n} e^{jM\omega_0 n} \\
&\overset{k=r+M}{=} \sum_{k=<N>} a_{k-M} e^{jk\omega_0 n}
\end{aligned}
$$

$$\Downarrow$$

(desplazamiento de frecuencia)

Frequency shift

$$b_k = a_{k-M} \qquad jk\omega_0 \rightarrow j(k-M)\omega_0$$