# Señales y sistemas

## Otoño 2003

## Clase 11

9 de octubre 2003

1. Propiedades y ejemplos de la TF en tiempo discreto.
2. Dualidad en las series de Fourier (SF) y la transformada de Fourier (TF)
3. Magnitud / Fase de las transformadas y respuestas de frecuencia.

# Ejemplo de la propiedad de convolución

$$h[n] = \alpha^n u[n], \quad x[n] = \beta^n u[n] \qquad |\alpha|, |\beta| < 1$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}}, \quad X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \beta e^{-j\omega}}$$

$$\Downarrow$$

$$y[n] = h[n] * x[n] \longleftrightarrow Y(e^{j\omega}) = \left(\frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}}\right)\left(\frac{1}{1 - \beta e^{-j\omega}}\right)$$

- ratio of polynomials in $e^{-j\omega}$ (ratio de polinomios en (...))

$$\beta \neq \alpha : \; Y(e^{j\omega}) \overset{\text{PFE}}{=} \frac{A}{1 - \alpha e^{-j\omega}} + \frac{B}{1 - \beta e^{-j\omega}}$$

$A, B$ - determined by partial fraction expansion
($A$, $B$ - determinados por expansión de fracción parcial)

$$y[n] = A\alpha^n u[n] + B\beta^n u[n]$$

$$\beta = \alpha : \; Y(e^{j\omega}) = \left(\frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}}\right)^2$$

$$y[n] \;\; \xrightarrow[nx[n] \leftrightarrow j\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}]{} \;\; y[n] = (n+1)\alpha^n u[n]$$

## Sistema LTI en tiempo discreto descrito por las ecuaciones diferenciales de coeficiente lineal constante

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

From time-shifting property: $\quad x[n-k] \longleftrightarrow e^{-j\omega k} X(e^{j\omega})$

(A partir de la propiedad de desplazamiento de tiempo)

$$\Downarrow$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-jk\omega} Y(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{M} b_k e^{-jk\omega} X(e^{j\omega})$$

$$\Downarrow$$

$$Y(e^{j\omega}) = \underbrace{\left[ \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-jk\omega}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-jk\omega}} \right]}_{H(e^{j\omega})} X(e^{j\omega})$$

— Función racional de $e^{-j\omega}$, utilice PFE para obtener $h[n]$

**Ejemplo:** sistema recursivo de primer orden

$$y[n] - \alpha y[n-1] = x[n], \quad |\alpha| < 1$$

con la condición de reposo inicial $\Leftrightarrow$ *causal*

$$(1 - \alpha e^{-j\omega})Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}}$$

$$\Downarrow$$

$$h[n] = \alpha^n u[n]$$

# Propiedad de multiplicación de la TF en tiempo discreto

$$\begin{aligned} y[n] = x_1[n] \cdot x_2[n] \longleftrightarrow Y(e^{j\omega}) &= \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_1(e^{j\theta})X_2(e^{j(\omega-\theta)})d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} X_1(e^{j\omega}) \otimes X_2(e^{j\omega}) \\ &\hookrightarrow \text{ Periodic Convolution} \end{aligned}$$

(Convolución periódica)

Derivation:
(Derivación:)

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n] \cdot x_2[n] e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_1(e^{j\theta})e^{j\theta n} d\theta \right) x_2[n] e^{-j\omega n} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} (X_1(e^{j\theta}) \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2[n] e^{-j(\omega-\theta)n}}_{X_2(e^{j(\omega-\theta)})}) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_1(e^{j\theta}) X_2(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta \end{aligned}$$

## Cálculo de convoluciones periódicas

Suppose we integrate from $-\pi$ to $\pi$:
(Suponga que integramos de $-\pi$ a $\pi$:)

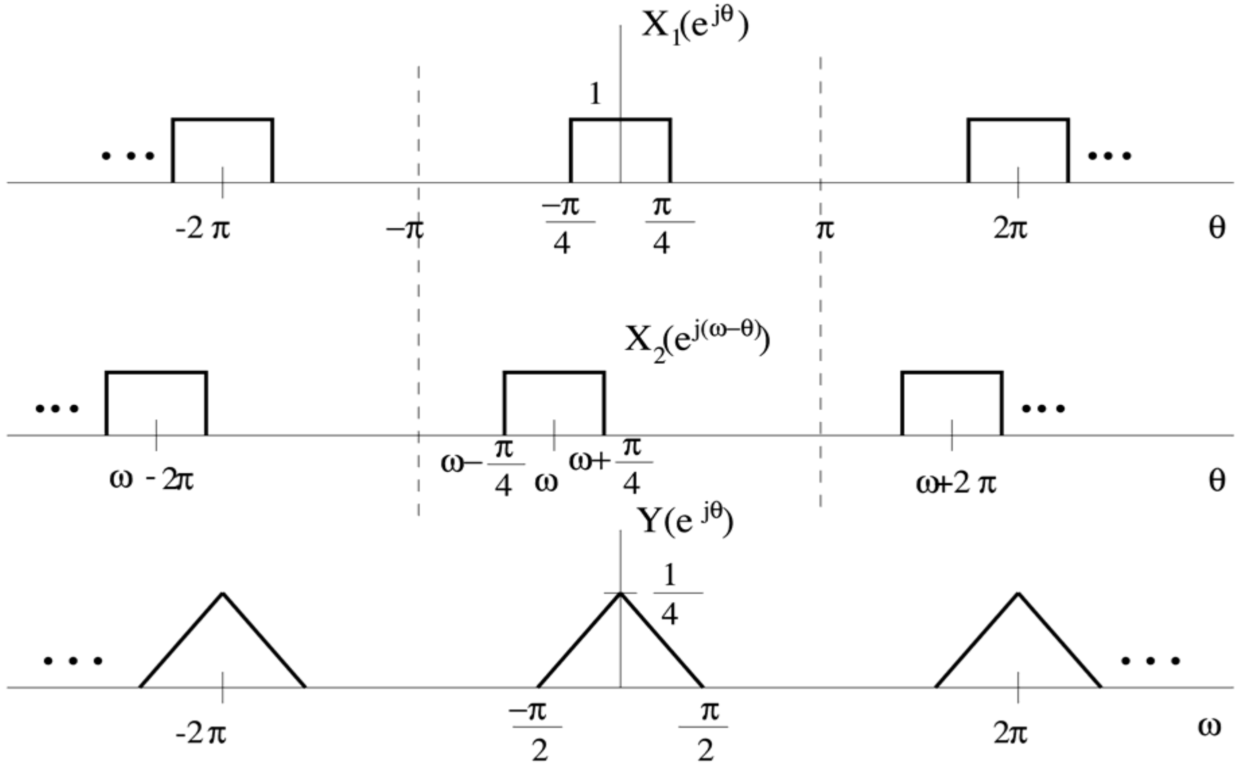
$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\theta})X_2(e^{j(\omega-\theta)})d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{X}_1(e^{j\theta})X_2(e^{j(\omega-\theta)})d\theta \end{aligned}$$

where (donde)

$$\hat{X}_1(e^{j\theta}) = \begin{cases} X_1(e^{j\theta}), & |\theta| \leq \pi \\ 0, & \text{otherwise} \\ & \text{(de lo contrario)} \end{cases}$$

**Ejemplo:** $y[n] = \left(\frac{\sin(\pi n/4)}{\pi n}\right)^2 = x_1[n] \cdot x_2[n], \quad x_1[n] = x_2[n] = \frac{\sin(\pi n/4)}{\pi n}$

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} X_1(e^{j\omega}) \otimes X_2(e^{j\omega})$$



# Dualidad en el análisis de Fourier

La transformada de Fourier es sumamente simétrica

TF en tiempo continuo: el tiempo y la frecuencia son continuos y, en general, *aperiódicos.*

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega$$

Lo mismo, excepto por estas diferencias

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt$$

$$\Downarrow$$

Suponga que $f(\cdot)$ y $g(\cdot)$ son dos funciones relacionadas mediante:

$$f(r) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)e^{-jr\tau}\,d\tau$$

Entonces,

Let $\tau = t$ and $r = \omega$:
(Sea) (y)

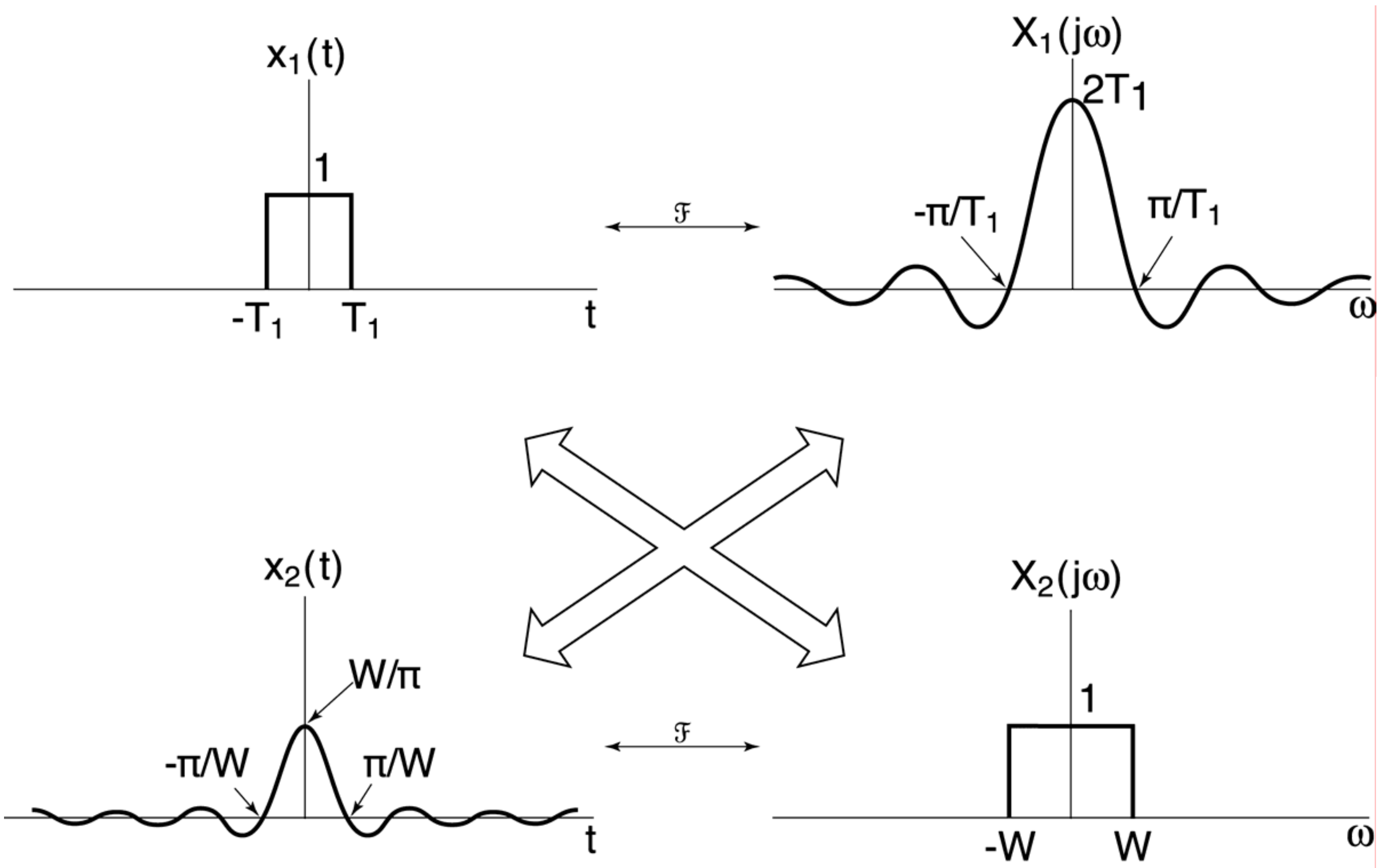
$$x_1(t) = g(t) \longleftrightarrow X_1(j\omega) = f(\omega)$$

Let $\tau = -\omega$ and $r = t$:
(Sea) (y)

$$x_2(t) = f(t) \longleftrightarrow X_2(j\omega) = 2\pi g(-\omega)$$

# Ejemplo de dualidad de la TF en tiempo continuo

Pulso cuadrado en el dominio del tiempo o en el de la frecuencia



# SF en tiempo discreto

(*Discreta y periódica* en el tiempo) (*Discreta y periódica* en la frecuencia)

*Discrete & periodic* in time $\longleftrightarrow$ *Periodic & discrete* in frequency

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\omega_0 n} = x[n+N], \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{k=<N>} x[n] e^{-jk\omega_0 n} = a_{k+N}$$

# Dualidad en la SF en tiempo discreto

Suppose $f[\cdot]$ and $g[\cdot]$ are two functions related by

(Suponga $f$ [·] y $g$[·] son dos funciones relacionadas mediante)

$$f[m] = \frac{1}{N} \sum_{r=<N>} g[r] e^{-jr\omega_0 m}$$

$$\Rightarrow g[r] = \sum_{m=<N>} f[m] e^{jr\omega_0 m}$$

Entonces,

Let $m = n$ and $r = -k$:
(Sea) (y)

$$x_1[n] = f[n] \longleftrightarrow a_k = \frac{1}{N} g[-k]$$

Let $r = n$ and $m = k$:
(Sea) (y)

$$x_2[n] = g[n] \longleftrightarrow a_k = f[k]$$

## Dualidad entre la SF en tiempo continuo y la TF en tiempo discreto

**SF en continuo**

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = x(t+T), \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

*Periodic* in time $\leftrightarrow$ *Discrete* in frequency
(*Periódico* en el tiempo <--> *Discreto* en frecuencia)

**TF en tiempo discreto**

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} = X\left(e^{j(\omega+2\pi)}\right)$$

*Discrete* in time $\leftrightarrow$ *Periodic* in frequency
(*Discreto* en el tiempo <--> *Periódico* en frecuencia)

# Dualidad SF en tiempo continuo-TF en tiempo discreto

Suppose $f(\cdot)$ is a CT signal and $g[\cdot]$ a DT sequence related by
(Suponga que $f(\cdot)$ es una señal de tiempo continuo y $g[\cdot]$ una secuencia de tiempo discreto relacionadas mediante:)

$$f(\tau) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} g[m] e^{jm\tau} = f(\tau + 2\pi)$$

Then (Entonces:)

$$x(t) = f(t) \longleftrightarrow a_k = g[k]$$

(periodic with period $2\pi$)
(periódico con un periodo $2\pi$)

$$x[n] = g[n] \longleftrightarrow X(e^{j\omega}) = f(-\omega)$$

# Magnitud y fase de la TF y relación de Parseval

TC:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$X(j\omega) = |X(j\omega)| e^{j\angle X(j\omega)}$$

Relación de Parseval:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \underbrace{|X(j\omega)|^2}_{\text{Densidad de energía en } \omega} d\omega$$

TD:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| e^{j\angle X(e^{j\omega})}$$

Relación de Parseval:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \int_{2\pi} \frac{1}{2\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

# Efectos de la fase

- *No* se da en la distribución de energía de la señal como función de la frecuencia.

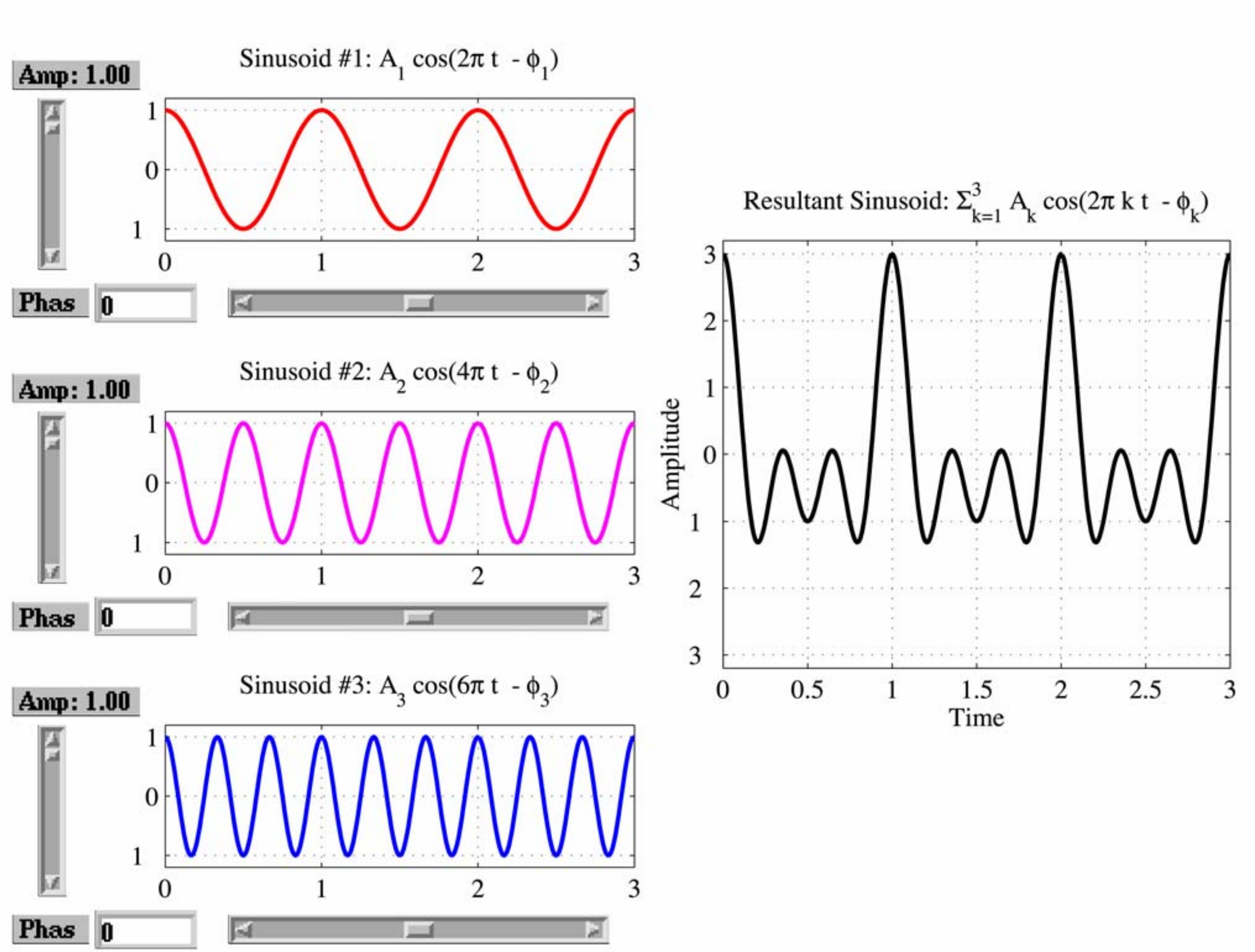
- *Puede* tener un efecto notable sobre la forma / el carácter de la señal.

  — Interferencia constructiva / destructiva.

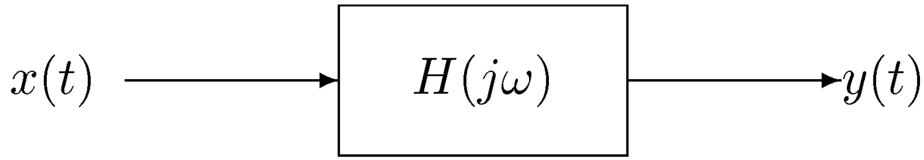
- ¿Es importante eso?

  — Depende de la señal y del contexto.

**Demo:** 1) Efecto de la fase en las series de Fourier.
2) Efecto de la fase en el procesamiento de imágenes.



# Magnitud logarítmica y fase



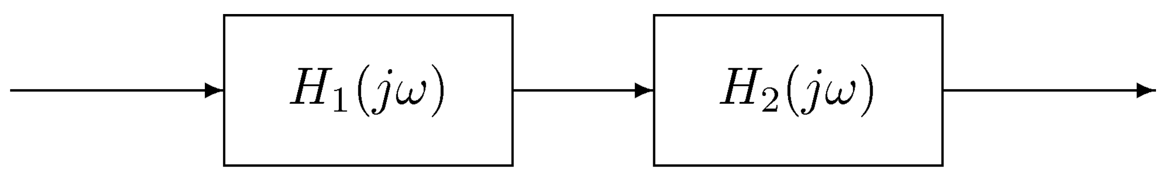

$$\Downarrow$$

$$|Y(j\omega)| = |H(j\omega)| \cdot |X(j\omega)|$$

or (o) $\quad \log|Y(j\omega)| = \log|H(j\omega)| + \log|X(j\omega)|$

and (y) $\quad \angle Y(j\omega) = \angle H(j\omega) + \angle X(j\omega)$

Cascading:
(en cascada)




$$\left.\begin{array}{c} \log|H(j\omega)| = \log|H_1(j\omega)| + \log|H_2(j\omega)| \\ \angle H(j\omega) = \angle H_1(j\omega) + \angle H_2(j\omega) \end{array}\right\} \text{fácil de añadir}$$

# Trazado de la magnitud logarítmica y la fase

a) Para señales y sistemas de valor real

$$\left.\begin{aligned} |H(-j\omega)| &= |H(j\omega)| \\ \angle H(-j\omega) &= -\angle H(j\omega) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

**Diagrama para ω ≥ 0**, a menudo con una escala *logarítmica* para la frecuencia en tiempo continuo

b) En tiempo discreto, sólo es necesario un diagrama para $0 \leq \omega \leq \pi$ (con escala *lineal*).

c) Por razones históricas, la magnitud logarítmica se traza, generalmente, en unidades de *decibelios* (dB):

$$\left(1\ bel = 10\ decibels = \frac{\text{output power}}{\text{input power}} = 10\right)$$

(potencia de salida)

(potencia de entrada)

potencia

magnitud

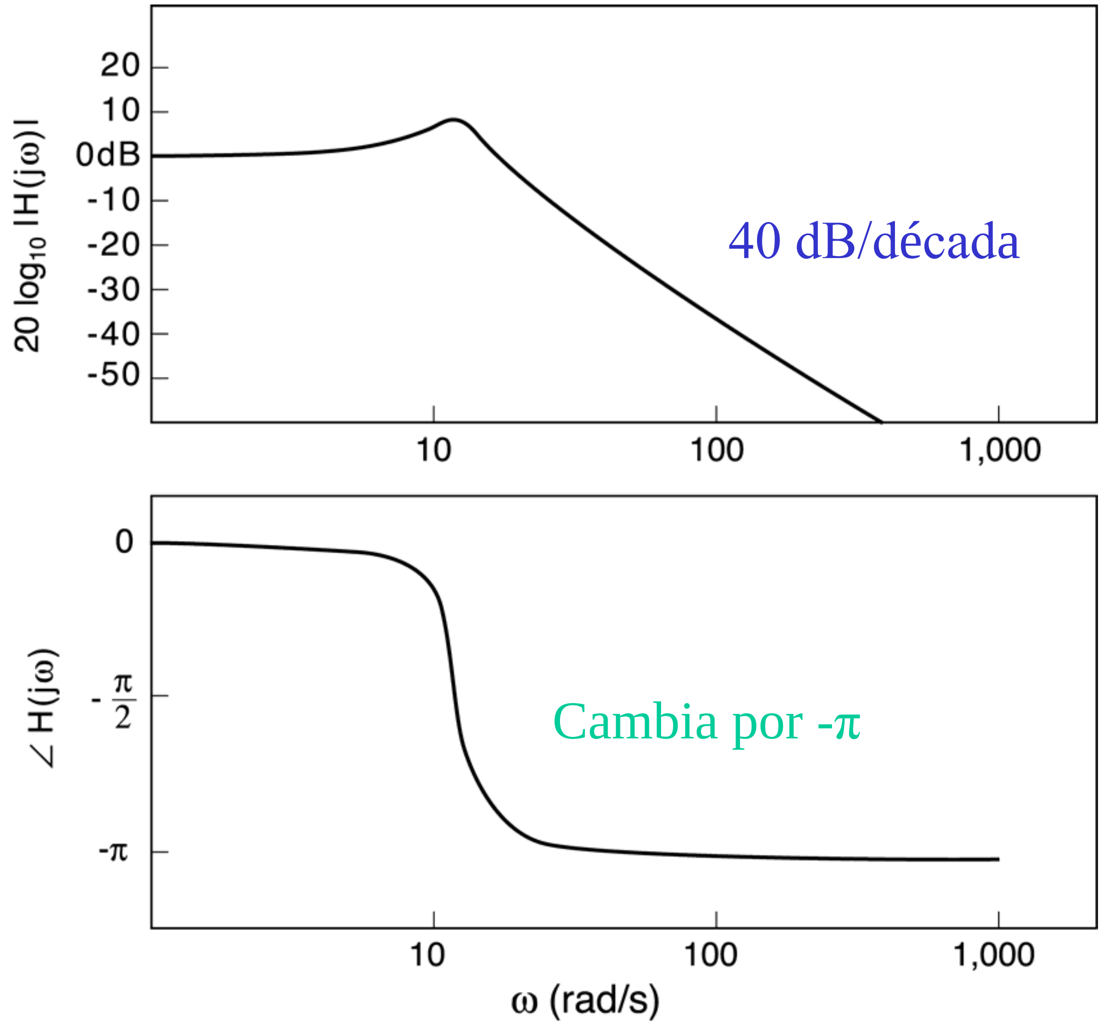
$$10\log_{10}|H(j\omega)|^2 = 20\log_{10}|H(j\omega)|$$

$$\begin{aligned} |H(j\omega)| &= 1 & &\longrightarrow & 0\,\text{dB} \\ |H(j\omega)| &= \sqrt{2} & &\longrightarrow & \sim 3\,\text{dB} \\ |H(j\omega)| &= 2 & &\longrightarrow & \sim 6\,\text{dB} \\ |H(j\omega)| &= 10 & &\longrightarrow & 20\,\text{dB} \\ |H(j\omega)| &= 100 & &\longrightarrow & 40\,\text{dB} \end{aligned}$$

**Por tanto,… 20 dB o 2 *belios*:**
**= ganancia de amplitud 10**
**= ganancia de potencia 100**

**Diagrama de Bode típico para un sistema de segundo orden en tiempo continuo**

$20 \log|H(j\omega)|$ y $\angle H(j\omega)$ vs. $\log \omega$



## Diagrama típico de la magnitud y la fase de una respuesta de frecuencia de segundo orden en tiempo discreto

$20\log|H(e^{j\omega})|$ y $\angle H(e^{j\omega})$ vs. ω