INSTITUTO TECNOLÓGICO DE MASSACHUSETTS
Departamento de Ingeniería Eléctrica e Informática

**6.003: Señales y sistemas — Otoño 2003**

Soluciones del boletín de problemas 9

---

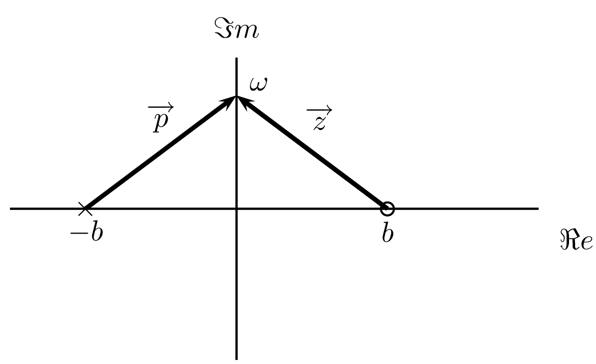
**Estudio en casa 1 O&W, 9.25(e)**

Suponemos que el sistema en consideración, $H(s)$, tiene la forma siguiente:

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{s-b}{s+b}(s+a+j\omega_0)(s+a-j\omega_0) \\ &= \frac{s-b}{s+b}(s^2+2as+a^2+\omega_0^2), \end{aligned}$$

donde $b$ corresponde al polo y al cero en el eje real y $a$ y $\omega_0$ caracterizan los ceros del conjugado complejo con $\omega_0 > a$. De este modo, podemos observar que $H(s)$ es una cascada de dos sistemas LTI, $H_1(s)$ y $H_2(s)$ , los cuales estudiamos en más detalle a continuación.

El siguiente es un diagrama polo-cero de $H_1(s)$, que tiene un polo y un cero en el eje real, los cuales están separados a la misma distancia del origen.



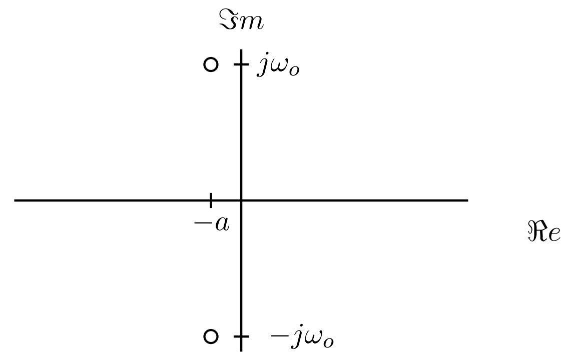

La respuesta de magnitud es el ratio de la magnitud de los vectores desde los ceros a los vectores de los polos cuando atravesamos el eje $j\omega$. Desde cualquier punto a lo largo del eje $j\omega$, los vectores del polo y del cero tienen la misma longitud y, por consiguiente, la magnitud de la respuesta de frecuencia $|H_1(j\omega)|$ es 1 e independiente de $\omega$. Este es un sistema todo paso analizado en la sección 9.4.3. Por lo tanto,

$$|H_1(j\omega)| = 1.$$

Por supuesto, también podemos ver esto claramente en la ecuación:

$$\begin{aligned} |H_1(j\omega)| &= \left|\frac{j\omega-b}{j\omega+b}\right| = \frac{|j\omega-b|}{|j\omega+b|} \\ &= \frac{\sqrt{\omega^2+b^2}}{\sqrt{\omega^2+b^2}} \\ \therefore |H_1(j\omega)| &= 1. \end{aligned}$$

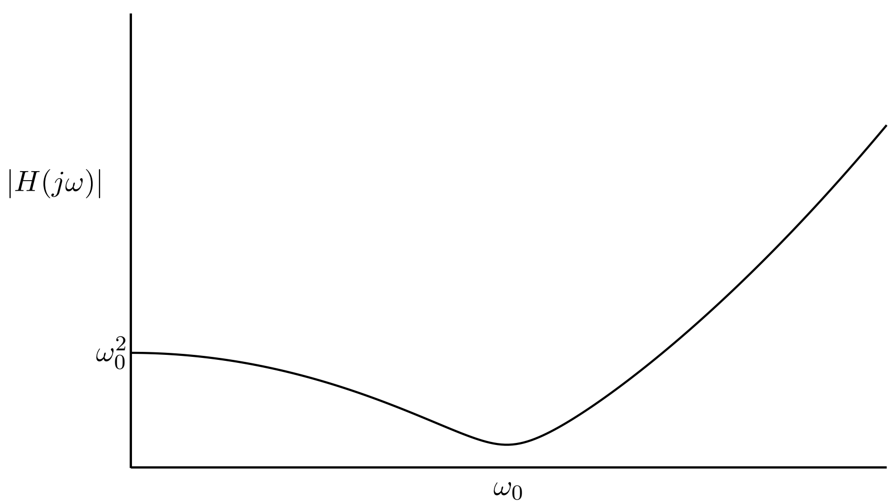
El siguiente es un diagrama polo-cero de $H_2(s)$ con 2 ceros en la mitad izquierda del plano y, como ya supusimos al comienzo $\omega_0 > a$.




De este modo, podemos considerar $H_2(s)$ un inverso de un sistema de segundo orden con un pequeño ratio de amortiguamiento:

$$H_2(s) = s^2 + 2as + a^2 + \omega_0^2.$$

Mientras que $\omega << \omega_0$, $H_2(j\omega)$ permanece aproximadamente igual a $\omega_0^2$. A medida que $\omega$ se aproxima a $\omega_0$, $|H_2(j\omega)|$ alcanza su mínimo, ya que la longitud del vector, $\overrightarrow{z_1}$, resultado de $s = -a + j\omega_0$, se reduce. Sin embargo, por el efecto del otro cero, $|H_2(j\omega)|$ no consigue su mínimo exactamente en $\omega = \omega_0$, si no en un $\omega$ ligeramente inferior a $\omega_0$. Cerca de $\omega = \omega_0$, la longitud del vector desde el otro cero, $\overrightarrow{z_2}$ no cambia mucho. De este modo, la variación de $|H_2(j\omega)|$ depende en mayor medida de como cambie $\overrightarrow{z_1}$ su longitud. Para $\omega >> \omega_0$, $|H_2(j\omega)|$ aumenta de forma cuadrática frente a $\omega$ lineal. De modo que, el diagrama general de magnitud es idéntico al de $H_2(j\omega)$. A continuación, se indica este diagrama para $\omega > 0$:




Observe que el escalado en los ejes $\omega$ y $|H(j\omega)|$ no es el mismo.

**Estudio en casa 2 O&W, 9.40**
Al tratar con un sistema que tiene condiciones iniciales, como el nuestro, resulta más sencillo utilizar la transformada unilateral de Laplace. A partir de las propiedades de dicha transformada obtenemos las relaciones siguientes:

$$\begin{aligned}
y(t) &\longleftrightarrow \mathcal{Y}(s) \\
y'(t) &\longleftrightarrow s\mathcal{Y}(s) - y(0^-) \\
y''(t) &\longleftrightarrow s^2\mathcal{Y}(s) - sy(0^-) - y'(0^-) \\
y'''(t) &\longleftrightarrow s^3\mathcal{Y}(s) - s^2y(0^-) - sy'(0^-) - y''(0^-)
\end{aligned}$$

Si las sustituimos en la ecuación diferencial y resolvemos para $\mathcal{Y}(s)$, obtenemos lo siguiente:

$$\mathcal{Y}(s) = \underbrace{\frac{\mathcal{X}(s)}{s^3+6s^2+11s+6}}_{ZSR} + \underbrace{\frac{s^2y(0^-) + s\left[y'(0^-)+6y(0^-)\right] + \left[y''(0^-)+6y'(0^-)+11y(0^-)\right]}{s^3+6s^2+11s+6}}_{ZIR}.$$

En la ecuación anterior hemos indicado que $\mathcal{Y}(s)$ puede dividirse en dos partes. La primera de ellas, la ZSR (respuesta de estado cero), corresponde a la salida cuando el sistema está inicialmente en reposo y únicamente responde a la entrada. La segunda parte, la ZIR (respuesta de entrada cero), corresponde a la salida cuando no hay una entrada y el sistema responde solamente a su estado inicial.

(a) Para determinar la ZSR, simplemente podemos utilizar la ecuación derivada de la página anterior,

$$\begin{aligned}
\mathcal{Y}_{ZSR}(s) &= \frac{1}{(s^3+6s^2+11s+6)(s+4)} \\
&= \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)} = \frac{\frac{1}{6}}{s+1} - \frac{\frac{1}{2}}{s+2} + \frac{\frac{1}{2}}{s+3} - \frac{\frac{1}{6}}{s+4}.
\end{aligned}$$

Si tomamos la transformada inversa obtenemos lo siguiente:

$$y_{ZSR}(t) = \frac{1}{6}e^{-t}u(t) - \frac{1}{2}e^{-2t}u(t) + \frac{1}{2}e^{-3t}u(t) - \frac{1}{6}e^{-4t}u(t).$$

(b) Si utilizamos la parte ZIR que derivamos anteriormente, podemos hallar la ZIR sustituyendo en el i dado

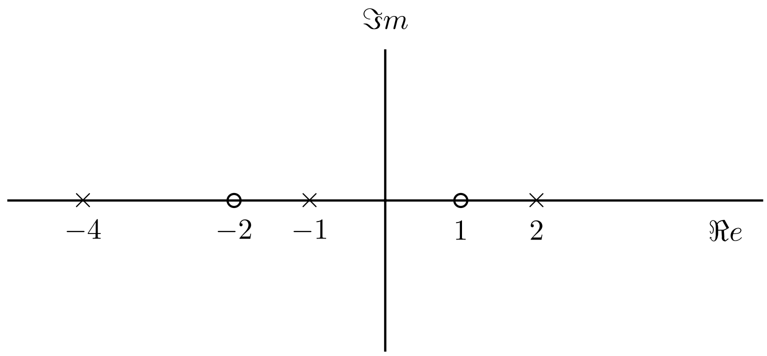
$$\mathcal{Y}_{ZIR}(s) = \frac{s^2+5s+6}{s^3+6s^2+11s+6} = \frac{1}{s+1}.$$

$$y_{ZIR}(t) = e^{-t}u(t)$$

(c) Entonces, por superposición,

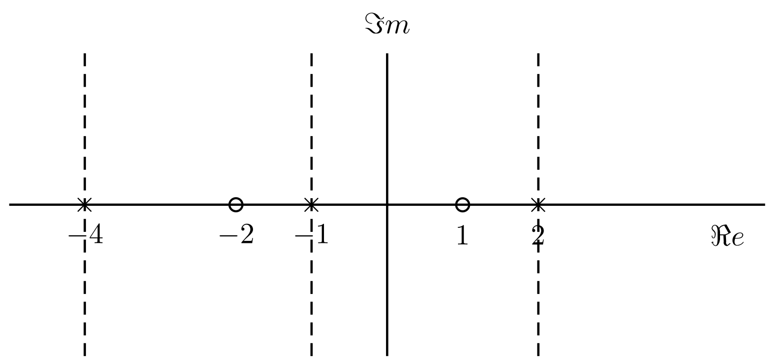
$$\begin{aligned}
y(t) &= y_{ZSR}(t) + y_{ZIR}(t) \\
&= \frac{7}{6}e^{-t}u(t) - \frac{1}{2}e^{-2t}u(t) + \frac{1}{2}e^{-3t}u(t) - \frac{1}{6}e^{-4t}u(t).
\end{aligned}$$

**Problema 1** Considere un sistema LTI para el que la función de sistema $H(s)$ es racional y tiene los patrones polo-cero que se indican a continuación:




(a) Indique todas las ROC posibles que puedan asociarse con este patrón polo-cero.

Las ROC están delimitadas por líneas verticales a través de la ubicación de los polos, como se indica en la figura siguiente:




De este modo, las ROC posibles son:

$$\begin{aligned} & \Re e\{s\} < -4 \\ -4 < \; & \Re e\{s\} < -1 \\ -1 < \; & \Re e\{s\} < 2 \\ 2 < \; & \Re e\{s\} \end{aligned}$$

(b) Para cada una de las ROC identificadas en el apartado (a), especifique si el sistema asociado es estable y/o causal.

Los sistemas causales tienen ROC a la derecha del polo situado más a la derecha. Las ROC de los sistemas estables incluyen el eje $j\omega$.

$\Re e\{s\} < -4$ : No causal. No estable

$-4 < \Re e\{s\} < -1$ : No causal. No estable

$-1 < \Re e\{s\} < 2$ : No causal. Estable

$2 < \Re e\{s\}$ : Causal. No estable

**Problema 2** Dibuje una representación directa para el sistema LTI causal con función de sistema:

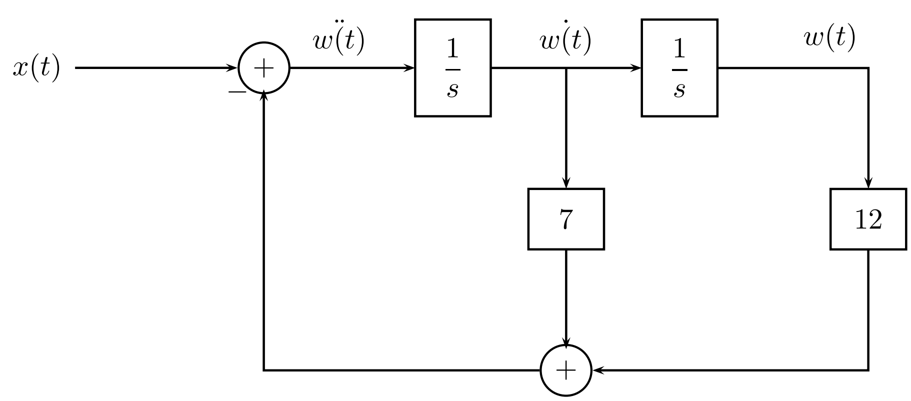
$$H(s) = \frac{s(s+1)}{(s+3)(s+4)}.$$

Observe que la función de sistema puede representarse de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{s(s+1)}{(s+3)(s+4)} \\ &= \frac{s^2+s}{s^2+7s+12} \\ &= \frac{Y(s)}{W(s)}\frac{W(s)}{X(s)} \\ &= \underbrace{s^2+s}_{\frac{Y(s)}{W(s)}}\underbrace{\frac{1}{s^2+7s+12}}_{\frac{W(s)}{X(s)}}. \end{aligned}$$

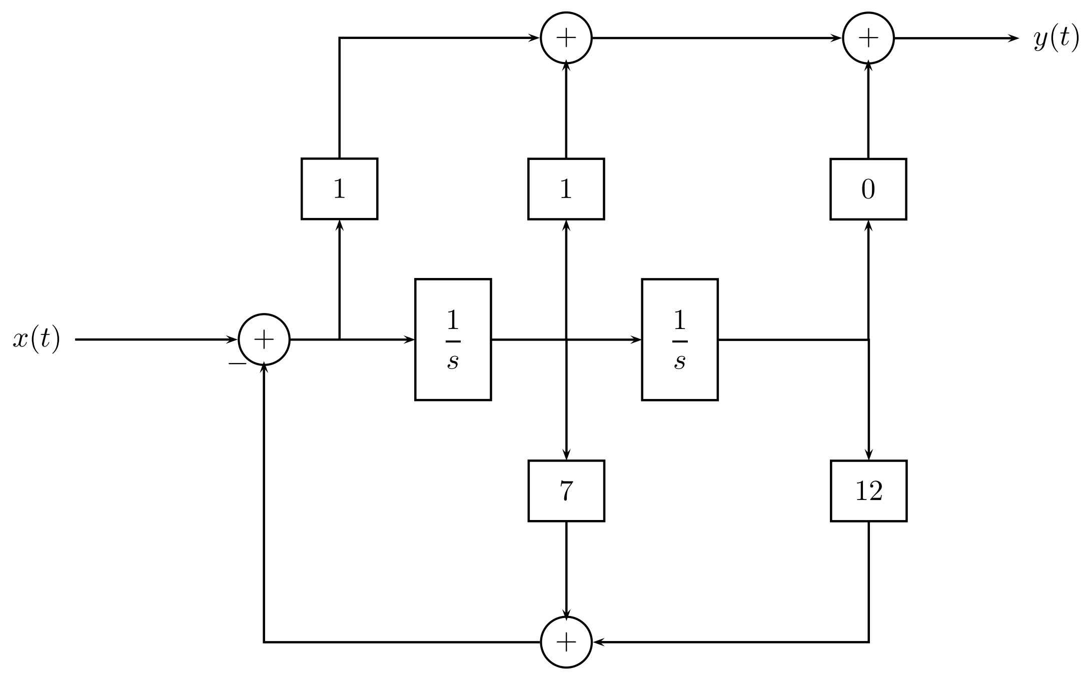
De este modo, podemos considerar el sistema $H(s)$ como una cascada de dos sistemas, es decir, $Z(s) = \frac{Y(s)}{W(s)}$ que representa los ceros, y $P(s) = \frac{W(s)}{X(s)}$ que representa los polos.

En primer lugar, la representación de un diagrama de bloques del sistema $P(s)$. Puesto que el sistema es de segundo orden, deseamos representarlo utilizando solamente dos integradores en cascada.



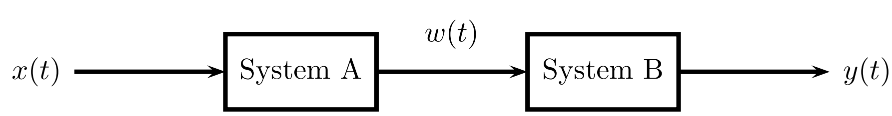
Observe aquí que $\ddot{w}(t) = \frac{d^2w(t)}{dt^2}$ y $\dot{w}(t) = \frac{dw(t)}{dt}$. Resulta fácil confirmar que la implementación anterior del sistema representa, de hecho, el sistema $P(s)$ aplicando la fórmula de Black de forma recursiva.

Ahora, nos gustaría utilizar el sistema anterior para implementar el otro sistema, $Z(s)$. Observe que $s$, en el dominio de Laplace corresponde la diferenciación en el dominio de tiempo. De este modo, $y(t)$ no es nada más que una combinación lineal de distintos órdenes de derivadas de $w(t)$; en nuestro caso, $y(t) = 1\times\ddot{w}(t)+1\times\dot{w}(t)+0\times w(t)$. A continuación, se muestra una representación directa del sistema general $H(s)$:




En esta representación del sistema, los números en los recuadros de ganancia se seleccionan simplemente de los coeficientes del numerador y el denominador para una función racional de sistema. A menudo, cuando los términos de ganancia son 1, se omiten, y cuando son 0, generalmente se omite la sección.

**Problema 3** Considere la cascada de dos sistemas LTI tal como se indica a continuacón:




donde tenemos lo siguiente:

- El sistema A es causal con respuesta a impulso:

$$h(t) = e^{-2t}u(t)$$

- El sistema B es causal y se caracteriza por la siguiente ecuación diferencial, que relaciona su entrada $w(t)$, y la salida, $y(t)$:

$$\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \frac{dw(t)}{dt} + \alpha w(t)$$

- Si la entrada $x(t) = e^{-3t}$, la salida $y(t) = 0$.

1. Halle la función de sistema $H(s) = Y(s)/X(s)$, determine su ROC y dibuje su patrón polo-cero. Nota: su respuesta debe ser sólo numérica (es decir, tiene suficiente información como para determinar el valor de $\alpha$).

2. Determine la ecuación diferencial que relaciona $y(t)$ y $x(t)$.

**Soluciones:**

1. La función general de sistema $H(s)$ es $H_A(s) \times H_B(s)$, ya que A y B del sistema están juntos en cascada. A partir de la tabla 9.2 de O&W, las transformadas de Laplace de funciones elementales,

$$H_A(s) = \frac{1}{s+2}, \Re e\{s\} > -2.$$

$H_B(s)$ se determina siendo $x(t) = e^{st}$ en la ecuación diferencial dada para el sistema B.
Por tanto, $y(t) = H(s)e^{st}$ y hallamos:

$$H_B(s) = \frac{s+\alpha}{s+1}, \Re e\{s\} > -1.$$

La ROC era $\Re e\{s\} > -1$, no $\Re e\{s\} < -1$, porque se nos indica que el sistema B es causal. Tenemos que resolver para $\alpha$. Además de la ecuación diferencial que relaciona la entrada con la salida del sistema B, nos indican que si $x(t) = e^{-3t}$, que es una función propia de un sistema LTI, entonces, $y(t) = 0$.

**El concepto que queríamos probar aquí era la propiedad de función propia de sistemas LTI. Sin embargo, el problema estaba mal planteado. Concretamente, para poder aplicar la propiedad de la función propia, $-3$, de $e^{-3t}$, debería haber estado ubicado en la ROC de $H(s)$, de forma que $H(-3)$ hubiese existido. Sin embargo, dado que la ROC de $H(s)$ es $\Re e\{s\} > -1$, $H(-3)$ no existe. Por lo tanto, no tenía suficiente información para determinar $H(s)$ en este problema. La siguiente solución es simplemente un ejemplo para ilustrar un posible método para obtener $H(s)$ suponiendo que existía $H(-3)$.**

De este modo, $H_B(s)|_{s=-3} = 0$. Esta restricción nos permite resolver para $\alpha$. Concretamente:

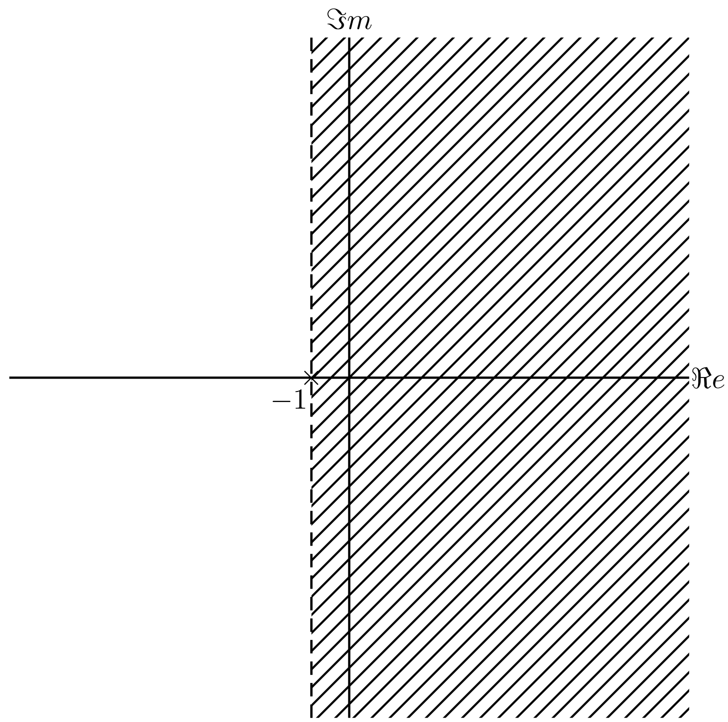
$$H_B(-3) = \frac{-3+\alpha}{-3+1} = 0 \longrightarrow \alpha = 3.$$

Por lo tanto, la función general del sistema en cascada es:

$$H(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}, \Re e\{s\} > -1$$

La ROC no debe tener ningún polo en ésta, por lo que la ROC general debe estar a la derecha de todos los polos en el sistema.

A continuación, se muestra el diagrama polo-cero:




2. Podemos determinar la ecuación diferencial que relaciona $y(t)$ y $x(t)$ a partir de la función de sistema hallada en *(a)*. Dado que $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$, multiplicamos el denominador de $H(s)$ por $Y(s)$ y el denominador de $H(s)$ por X(s):

$$Y(s)(s^2 + 3s + 2) = X(s)(s + 3).$$

Si lo distribuimos a ambos lados tenemos:

$$s^2Y(s) + 3sY(s) + 2Y(s) = sX(s) + 3X(s)$$

Debido a la linealidad, podemos tomar la transformada inversa de Laplace de cada uno de los términos anteriores y obtener la ecuación diferencial siguiente:

$$\frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2} + 3\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + 2y(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + 3x(t).$$

**Problema 4** Suponga que se nos facilita la información siguiente acerca de un sistema LTI causal y estable con respuesta a impulso $h(t)$ y con una función racional $H(s)$:

- La respuesta de estado estacionario a un escalón unitario, es decir, $s(\infty) = \frac{1}{3}$.
- Cuando la entrada es $e^t u(t)$, la salida es absolutamente integrable.

- La señal,

$$\frac{d^2h(t)}{dt^2} + 5\frac{dh(t)}{dt} + 6h(t)$$

tiene duración finita.

- $h(t)$ tiene exactamente un cero en el infinito.

Determine $H(s)$ y su ROC.

**Solución:** para determinar $H(s)$ y su ROC, tenemos que analizar y combinar toda la información que nos proporcionan.

El primer dato que se nos proporciona es que el sistema es causal y estable. Dado que el sistema es causal, sabemos que la ROC se encuentra en el lado derecho, y al ser estable, sabemos que la ROC incluye el eje $j\omega$.

El siguiente dato, *la respuesta de estado estacionario a un escalón unitario, es decir,* $s(\infty) = \frac{1}{3}$, nos proporciona información sobre $H(s)|_{s=0}$. Observe que la respuesta a escalón es $s(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)\mathrm{d}\tau$. Por tanto, para $t = \infty$, $s(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\mathrm{d}\tau$. No obstante, esta es la misma ecuación de la transformada de Laplace que podemos utilizar para resolver para $H(s)|_{s=0}$. Por lo tanto, $H(0) = \frac{1}{3}$.

El siguiente dato, *cuando la entrada es* $e^t u(t)$, *la salida es totalmente integrable*, nos proporciona información acerca de un cero de $H(s)$. Sabemos que si $x(t) = \mathrm{e}^t u(t)$, entonces $X(s) = \frac{1}{s-1}, \Re e\{s\} > 1$ e $Y(s) = H(s)X(s)$. La ROC para $Y(s)$ será, *al menos,* la intersección de la ROC para $X(s)$ con la ROC para $H(s)$. Si $y(t)$ es totalmente integrable, podemos tomar su transformada de Fourier correspondiente, es decir, la ROC incluye el eje $j\omega$. Dada la propiedad 2 del capítulo 9 de O&W, la ROC de cualquier sistema, incluido $Y(s)$, no incluye ningún polo. Por lo tanto, el polo en $Y(s)$ en $s = 1$ se elimina teniendo un cero en $s = 1$ en $H(s)$.

Pasemos al cuarto punto, *$h(t)$ tiene exactamente un cero en infinito*, que nos proporciona información sobre los órdenes relativos del numerador y del denominador para una transformada racional. Concretamente, el orden del denominador es uno superior al del numerador. Por lo tanto, sabemos que el denominador tiene dos polos.

El tercer punto nos proporciona información acerca de los polos de $H(s)$. Por la propiedad 3 del capítulo 9 de O&W, si una señal tiene duración finita y es totalmente integrable, la ROC de la señal es todo el plano s. Sabemos que $\frac{d^2h(t)}{dt^2} + 5\frac{dh(t)}{dt} + 6h(t)$ tiene duración finita. ¿Es también totalmente integrable? Podemos demostrar que lo es observando cada uno de los términos de la función por separado. Sabemos que $h(t)$ es totalmente integrable porque es estable, es decir, su ROC incluye el eje $j\omega$. Si multiplicamos $h(t)$ por 6 (una constante) su integrabilidad absoluta no variará. En la tabla 9.1, la ROC de la derivada de una función incluye también la ROC de la función original. Por tanto, $5\frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t}$ incluirá el eje $j\omega$ y será totalmente integrable. Igualmente, la segunda derivada, $\frac{\mathrm{d}^2h(t)}{dt^2}$ incluirá la ROC de la primera derivada y, por lo tanto, es además totalmente integrable. En la tabla 9.2, la suma de las 3 funciones tiene al menos la intersección de las ROC de cada una de las tres funciones. Dado que la ROC de cada una de estas funciones incluye el eje $j\omega$, la suma incluirá el eje $j\omega$ y, por lo tanto, la suma es

totalmente integrable. Dado que la ROC de esta señal, $\frac{d^2h(t)}{dt^2}+5\,\frac{dh(t)}{dt}+6h(t)$ es todo el plano s, no puede haber polos a excepción de en $\infty$. Sin embargo, sabemos que $H(s)$ tiene al menos dos polos. Para que la señal no tenga polos, debemos asegurarnos de que los polos de $H(s)$ queden cancelados por los ceros de la señal.
Si tomamos la transformada de Laplace de la señal tenemos que:

$$s^2H(s)+5sH(s)+6H(s)=(s+2)(s+3)H(s).$$

Por lo tanto, $H(s)$ sólo puede tener dos polos, en $s=-2$ y en $s=-3$.
Combinando toda la información acerca de los polos y los ceros tenemos:

$$H(s)=K\frac{s-1}{(s+2)(s+3)}, \Re e\{s\}>-2.$$

Por último, seleccionamos $K$ tal que $H(0)=\frac{1}{3}$. Es decir, $K=-2$ y,

$$H(s)=-2\frac{s-1}{(s+2)(s+3)}, \Re e\{s\}>-2.$$

**Problema 5** Considere el sistema básico de retroalimentación de la figura 11.3 (a) de la pág. 819 de O&W. Determine la respuesta a impulso del sistema de bucle cerrado cuando:

$$H(s)=\frac{1}{s+5}, \quad G(s)=\frac{2}{s+2}.$$

Podemos utilizar la fórmula de Black para calcular la función del sistema de todo el sistema, $Q(s)$, que viene dada por:

$$\begin{aligned} Q(s) &= \frac{\frac{1}{s+5}}{1+\frac{2}{(s+5)(s+2)}} \\ &= \frac{(s+2)}{s^2+7s+12} \end{aligned}$$

A continuación, podemos utilizar la expansión de fracción parcial para escribir $Q(s)$ como la suma de los términos de primer orden.

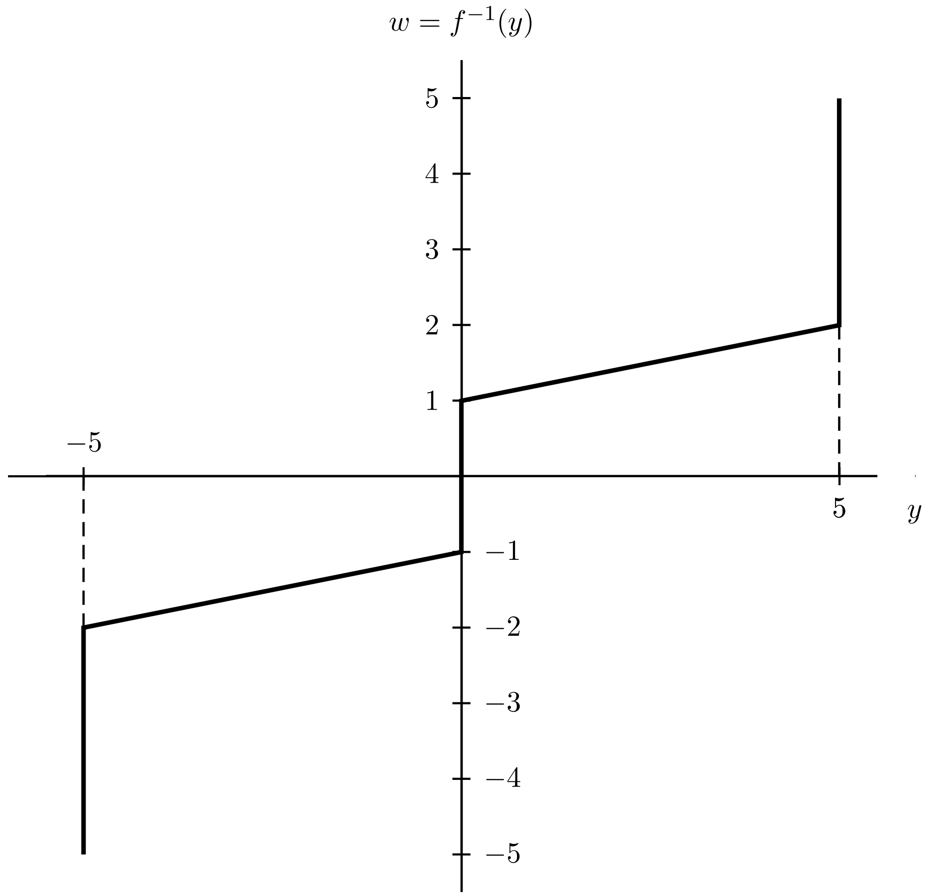
$$\begin{aligned} Q(s) &= \frac{s+2}{s^2+7s+12} \\ &= \frac{s+2}{(s+4)(s+3)} \\ &= \frac{2}{s+4}-\frac{1}{s+3} \end{aligned}$$

Dado que este es un sistema de retroalimentación, sabemos que es causal. Por lo tanto, hallamos la transformada inversa de Laplace para la función del sistema utilizando la parte causal para obtener la respuesta a impulso tal como se indica a continuación:

$$q(t)=2e^{-4t}u(t)-e^{-3t}u(t)$$

**Problema 6**

(a) $f^{-1}(y)$ se muestra a continuación.




(b) A partir del diagrama del sistema de retroalimentación, podemos escribir lo siguiente:

$$\begin{aligned} w(t) &= K_1(x(t) - K_2 y(t)) \\ &= K_1 x(t) - K_1 K_2 y(t) \\ f^{-1}(y) &= K_1 x(t) - K_1 K_2 y(t) \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$x(t) = \frac{1}{K_1} f^{-1}(y) + K_2 y(t)$$

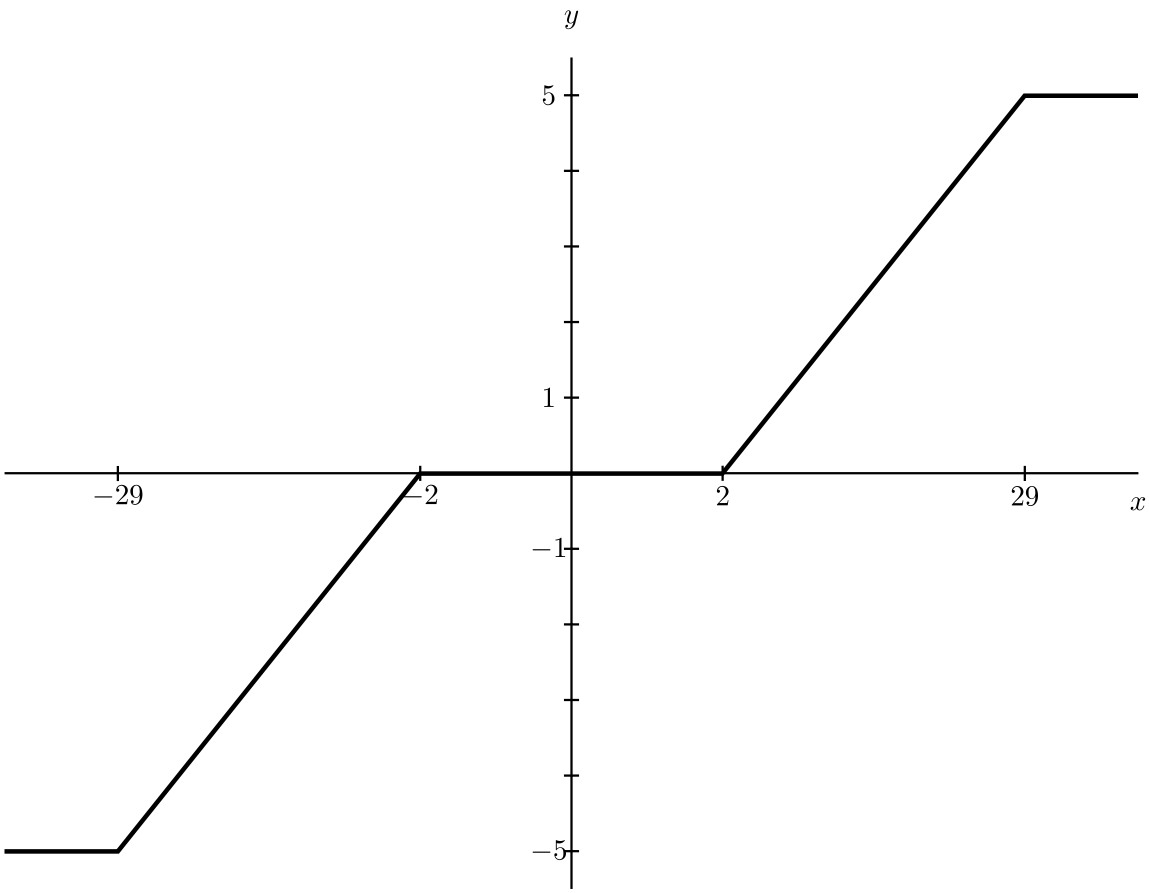
(c) 1. $K_1 = 0.5$ y $K_2 = 5$. Podemos escribir la relación de la entrada y la salida que hallamos en el apartado b,

$$x(t) = 2f^{-1}(y) + 5y(t)$$

Evaluemos la función anterior para algunos valores de $y$

| $y$ | $f^{-1}(y)$ | x |
|---|---|---|
| 0 | $-1$ to $-1$ | $-2$ to $2$ |
| 5 | $2.0$ | $29$ |
| $-5$ | $-2.0$ | $-29$ |

Observe que $y$ se satura en $y = -5$ e $y = 5$. A continuación, se indica el diagrama de *y* en función de *x*.



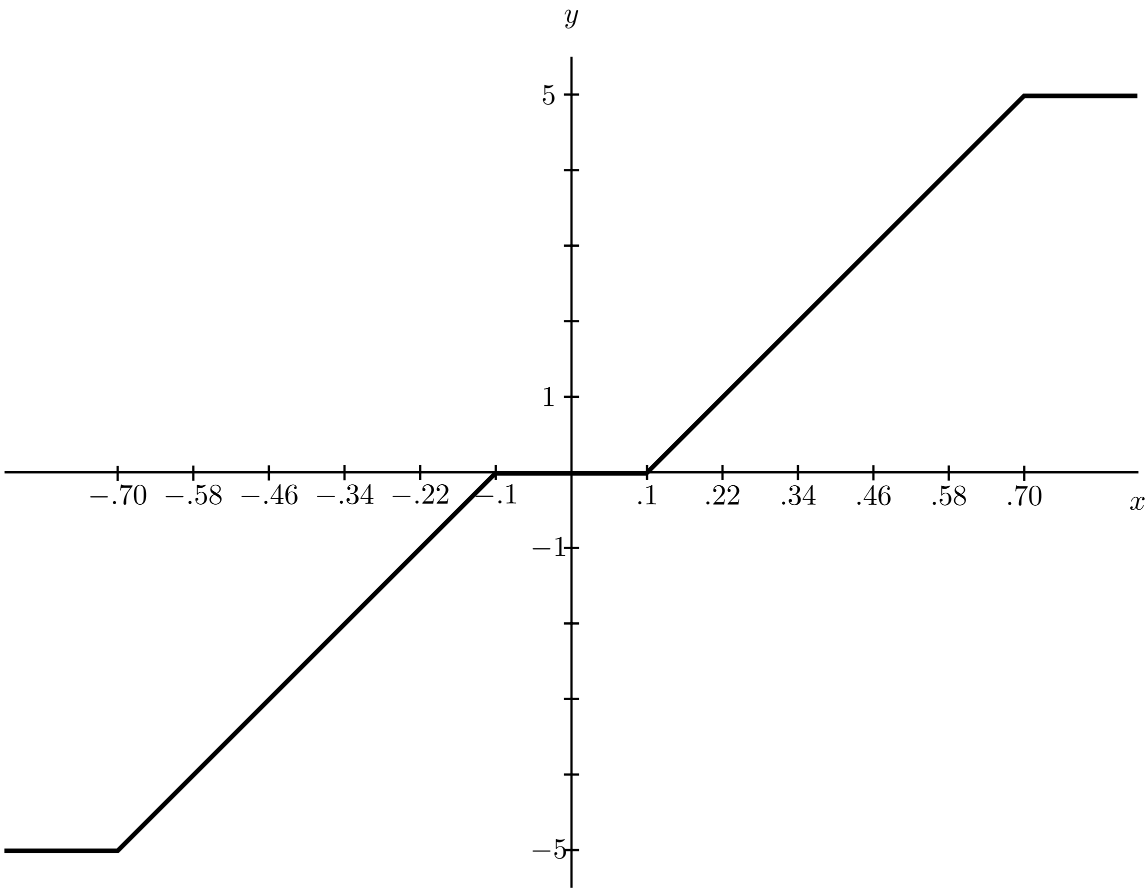

2. Ahora, $K_1 = 10$ y $K_2 = 0.1$. Podemos escribir la relación de la entrada y la salida hallada en el apartado b,

$$x(t) = \frac{1}{10} f^{-1}(y) + 0.1y(t)$$

Evaluemos la función anterior para algunos valores de *y*

| $y$ | $f^{-1}(y)$ | x |
|---|---|---|
| 0 | $-1$ to $-1$ | $-\frac{1}{10}$ to $\frac{1}{10}$ |
| 1 | $1.2$ | $0.22$ |
| 2 | $1.4$ | $0.34$ |
| 3 | $1.6$ | $0.46$ |
| 4 | $1.8$ | $0.58$ |
| 5 | $2.0$ | $0.70$ |

Para valores negativos de $y$, obtendríamos valores negativos de $x$. Observe que $y$ se satura en $y = -5$ e $y = 5$. A continuación, se indica el diagrama de $y$ en función de $x$.




(d) A partir de la relación obtenida en el apartado ($b$) vemos que si $K_1$ es grande, entonces podemos hallar la relación lineal aproximada entre la entrada, $x(t)$, y la salida, $y(t)$.

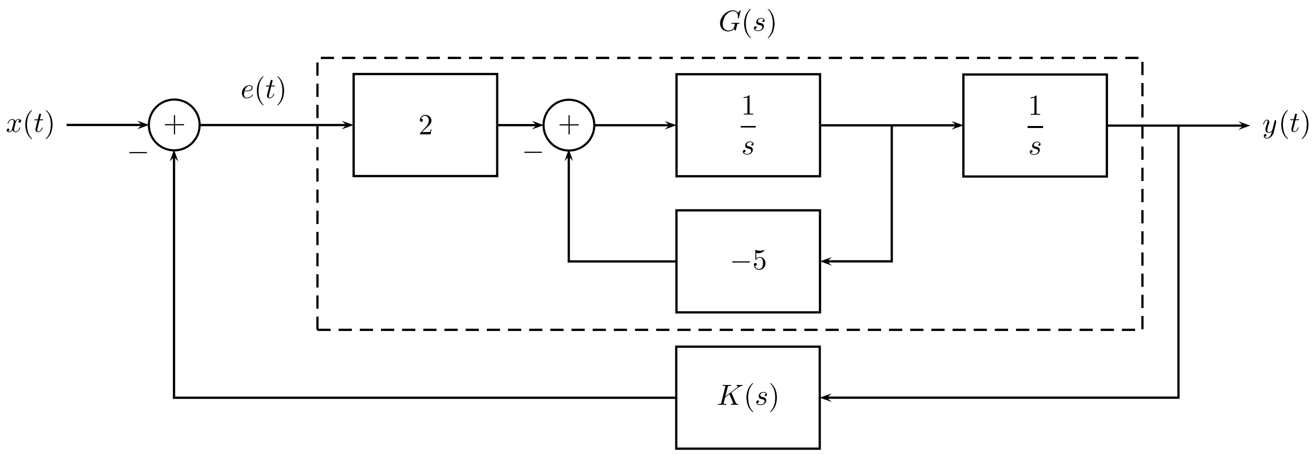
$$y(t) \cong \frac{1}{K_2} x(t)$$

Por consiguiente, $K_1$ tiene que ser grande en magnitud para tener una relación lineal aproximada entre la entrada y la salida.

A partir del apartado ($c$), observamos que la pendiente en rango lineal depende, aproximadamente de la magnitud de $K_2$. Por tanto, $K_2$ es un parámetro de diseño cuyo valor establece el usuario. Sin embargo, a medida que $K_2$ disminuye, resulta más fácil alcanzar los límites de saturación, por lo que, desde el punto de vista práctico de diseño, es posible que no deseemos disminuir $K_2$ demasiado.

**Problema 7**

1. Tenemos que hallar $G(s) = \frac{Y(s)}{E(s)}$. $G(s)$ se muestra a continuación en el diagrama del sistema completo,




Si utilizamos la fórmula de la función del sistema de bucle cerrado (ecuación 11.1 del libro de texto) para el sistema de retroalimentación, suponga $F(s)$, dentro de $G(s)$, hallamos:

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{\frac{1}{s}}{1 + \frac{1}{s}(-5)} \\ &= \frac{1}{s-5} \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$G(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = 2 \times F(s) \times \frac{1}{s}$$

$$G(s) = \frac{2}{s(s-5)}$$

La función del sistema $G(s)$ tiene un polo en la mitad derecha del plano s ($s = 5$). Por lo tanto, el sistema no es estable.

2. Tenemos que $K(s) = K_p$, donde $K_p$ es una constante real. Si utilizamos la fórmula de Black (ecuación

11.1 del libro de texto) para el sistema de retroalimentación, tenemos:

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{G(s)}{1+K(s)G(s)} \\ &= \frac{G(s)}{1+K_pG(s)} \\ &= \frac{\frac{2}{s(s-5)}}{1+K_p\frac{2}{s(s-5)}} \\ &= \frac{2}{s(s-5)+2K_p} \\ &= \frac{2}{s^2-5s+2K_p} \end{aligned}$$

Las raíces del denominador son los polos de $H(s)$ que deben estar en la mitad izquierda del plano s para que $H(s)$ sea estable.

$$\begin{aligned} s^2-5s+2K_p &= 0 \\ s=\frac{5\pm\sqrt{25-8K_p}}{2} &= \frac{5}{2}\pm\frac{\sqrt{25-8K_p}}{2} \end{aligned}$$

Si $\sqrt{25-8K_p}$ es real, existen 2 polos. Si $\sqrt{25-8K_p}<5$, los dos polos se encuentran en la mitad derecha del plano s. Si $\sqrt{25-8K_p}=5$, ambos polos están en $s=0$. Si $\sqrt{25-8K_p}>5$, un polo se encuentra en la mitad derecha del plano y el otro en la mitad izquierda.
Si $\sqrt{25-8K_p}$ es imaginario, los polos son conjugados complejos de cada uno de ellos y se encuentran en la mitad derecha del plano s.
Por consiguiente, el sistema no puede estabilizarse modificando $K_p$.

3. Tenemos $K(s)=K_ds+K_p$, donde tanto $K_d$ como $K_p$ son constante reales. A continuación, tenemos que:

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{G(s)}{1+K(s)G(s)} \\ &= \frac{G(s)}{1+(K_ds+K_p)G(s)} \\ &= \frac{\frac{2}{s(s-5)}}{1+(K_ds+K_p)\frac{2}{s(s-5)}} \\ &= \frac{2}{s(s-5)+2(K_ds+K_p)} \\ &= \frac{2}{s^2-(5-2K_d)s+2K_p} \end{aligned}$$

Las raíces del denominador son los polos de $H(s)$ que deben estar en la mitad izquierda del plano s para que $H(s)$ sea estable.

$$\begin{aligned} s^2-(5-2K_d)s+2K_p &= 0 \\ s=\frac{(5-2K_d)\pm\sqrt{(5-2K_d)^2-8K_p}}{2} &= \frac{5-2K_d}{2}\pm\frac{\sqrt{(5-2K_d)^2-8K_p}}{2} \end{aligned}$$

Para hallar el rango de $K_d$ y $K_p$ que estabilizará el sistema, utilizamos el criterio de Routh-Hurwitz para la mitad izquierda del plano en el polinomio del denominador, para lo cual seguimos los siguientes requisitos:

$$-(5 - 2K_d) > 0$$

$$K_d > \frac{5}{2}$$

Además es necesario que:

$$2K_p > 0$$

$$K_p > 0$$