6.045J/18.400J: Autómatas, computabilidad y complejidad Prof. Ron Rivest

Tareas para casa 9

Fecha de entrega: 8 de mayo de 2002

Problema 1: considere el problema del *parque de bomberos*: dado un gráfico *G*, una distancia *d* y un límite *f* en el número de parques de bomberos, ¿puede hallar *f* nodos, o menos, en *G* en los que sea posible ubicar los parques de bomberos tal que cada nodo en *G* esté a una distancia *d* o inferior de algunos de los parques? (En este contexto, la distancia es el número de bordes del trayecto más corto). Más formalmente:

$$PARQUE\ DE\ BOMBEROS = \left\{ \langle G, d, f \rangle \ :\ \begin{array}{c}\text{existen } f \text{ nodos en } G \text{ tales que cada nodo se} \\ \text{encuentra a una distancia } d \text{ del otro}\end{array} \right\}$$

Demuestre que *PARQUE DE BOMBEROS* es *NP* completo.

Problema 2: considere el lenguaje:

$$MEDIO\ CLIQUE = \left\{ \langle G \rangle \ :\ G \text{ tiene un clique } \frac{|G|}{2} \right\}$$

Demuestre que *MEDIO CLIQUE* es *NP* completo.

Problema 3: (nota: este problema vale 20 puntos). Un colorante *k* de un gráfico indirecto *G* = (*V, E*) es una función $c : V \rightarrow \{1, 2, ...k\}$ tal que $c(u) \neq c(v)$ para todo $(u, v) \in E$. Es decir, es una forma de colorear cada uno de los nodos de *G* de un color *k* diferente, de forma que ningún borde toca a dos nodos del mismo color. Considere le lenguaje:

$$COLOR\ 3 = \{ \langle G \rangle \ :\ G \text{ tiene un colorante } 3 \}$$

En este problema, tendrá que demostrar que este lenguaje es *NP* completo. (Este es también el problema 7.34). Esta reducción tiene más truco que las anteriores que le hemos pedido que realice, por lo que le proporcionamos una guía:
Par demostrar que *COLOR 3* es *NP* completo, utilizamos una reducción de *SAT 3*. Dada una fórmula ϕ de *m* cláusulas en *n* variables $x_1, x_2, ... x_n$, construimos un gráfico *G* = (*V, E*) tal y como se cita a continuación. El conjunto de nodos *V* consta de un vértice para cada variable, un vértice para la negación de cada variable, 5 vértices para cada cláusula y tres vértices especiales: *VERDADERO, FALSO* y *ROJO*. Los bordes del gráfico son dos tipos: bordes "literales", que son independientes de las cláusulas y bordes "cláusula", que dependen de las cláusulas. Los bordes literales forman un triángulo en los vértices especiales y en $x_1, \overline{x}_i$ y *ROJO* para *i* = 1, 2, ... *n*.

1. Razone que en cualquier *c* de colorante 3 de un gráfico que contenga los bordes literales, exactamente uno de los bordes de una variable y de su negación está coloreado

$c(VERDADERO)$ y el otro $c(FALSO)$. Argumente que para cualquier asignación de verdad para ϕ , existe un colorante 3 del gráfico que contiene sólo los bordes literales.

El artilugio que se muestra en la Figura 1 se utiliza para forzar la condición correspondiente a una cláusula $(x \vee y \vee z)$. Cada una de las cláusula necesita una copia única de los 5 vértices que están en blanco en la figura. Estos se conectan tal y como se indica a los literales de una cláusula y al vértice especial *VERDADERO*.

2. Razone que si se colorea $c(VERDADERO)$ o $c(FALSO)$ cada x, y y z, el artilugio se puede colorear en 3 si se colorea $c(VERDADERO)$ x, y o z.

3. Demuestre que *COLOR 3* es *NP* completo.

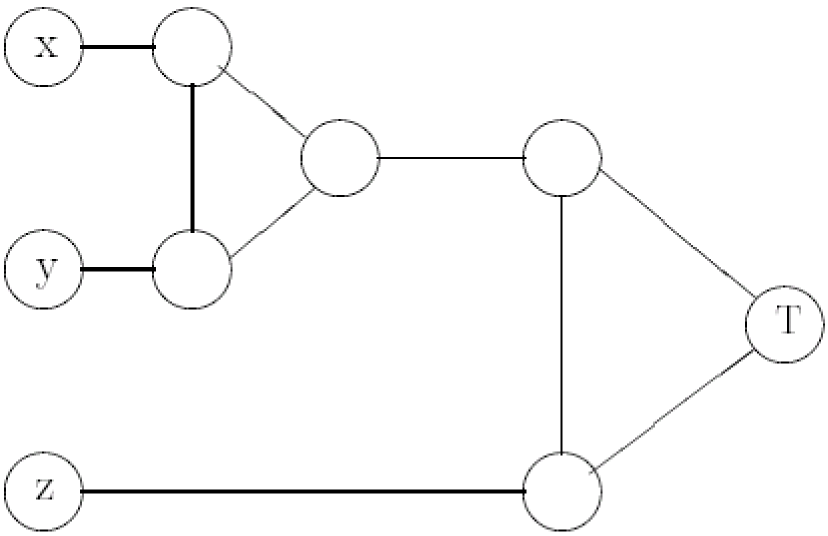

Figura 1: un artilugio.