1. Problema 2.3 LO (Ingolfsson, 1993; Kang, 2001)

Cualquiera que llegue a la estación de transbordo observa dos procesos Poisson independientes, A y B. Cada llegada del proceso Poisson combinado proviene del proceso A(B) con probabilidad $\lambda_A/\lambda_A + \lambda_B$ ($\lambda_B/\lambda_A + \lambda_B$), independientemente del resto de las llegadas. Así, el proceso Poisson combinado, tiene un proceso Bernoulli integrado. Para resolver este problema, es necesario entender bien las propiedades fundamentales de los procesos Poisson y Bernoulli. Si las respuesta no le son familiares, ahora tiene la oportunidad de repasar los procesos Poisson y Bernoulli, por ejemplo, leyendo el capítulo 4 de *Fundamentals of Applied Probability Theory* de Alvin Drake.

(a) (i) Los tiempos entre las sucesivas llegadas del tren A son variables aleatorias exponenciales independientes con el parámetro λ_A = 3/hora. Por la propiedad sin memoria, el hecho de que Bart llegue en un tiempo aleatorio no tiene importancia. El tiempo que tiene que esperar hasta el siguiente tren A es aún una variable aleatoria exponencial con el parámetro λ_A. Por lo tanto, si llamamos X al tiempo de espera, la función de densidad de probabilidad (FDP) de X viene dada por

$$f_X(x) = \lambda_A e^{-\lambda_A x} = 3e^{-3x}, \quad x \geq 0.$$

Esto es, de hecho, una cuestión de incidencia aleatoria, así que podemos resolver el problema utilizando la fórmula (2.65) del libro de texto. Supongamos que Y sea el tiempo de intervalo de llegada de los trenes A, entonces

$$f_X(x) = \frac{1 - F_Y(x)}{E[Y]}.$$

$E[Y] = \frac{1}{\lambda_A} = \frac{1}{3}$. $F_Y(x) = P\{Y \leq x\} = \int_0^x \lambda_A e^{-\lambda_A y} dy = 1 - e^{-\lambda_A x} = 1 - e^{-3x}$. Por tanto

$$f_X(x) = \frac{1 - (1 - e^{-3x})}{\frac{1}{3}} = 3e^{-3x}, \quad x \geq 0.$$

(ii) Un modo fácil de contestar esta pregunta es trasladarla a un proceso Bernoulli conocido, por ejemplo, una secuencia de lanzamientos de moneda al aire. De este modo, un tren A puede ser "cara" y un tren B, puede ser "cruz". El problema quedaría de la siguiente forma: ¿cuál es la probabilidad de obtener al menos 3 cruces antes de que salga cara? Esta probabilidad es la misma que la probabilidad de que los siguientes tres lanzamientos salgan cruz (es decir, que los siguientes 3 trenes sean trenes B). El resultado del cuarto y siguientes lanzamientos es irrelevante a efectos de contestar a esta pregunta. Por lo tanto,

P{al menos llegan 3 trenes B} = P{los siguientes 3 trenes son trenes B}

$$= \left(\frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B}\right)^3 = \left(\frac{6}{3+6}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3.$$

Otra manera de contestar esta pregunta es considerar el evento complementario. Supongamos que N_B sea una variable aleatoria que indique el número de trenes B que llegan mientras Bart espera.
Entonces,

$$P\{N_B \geq 3\} = 1 - P\{N_B = 0\} - P\{N_B = 1\} - P\{N_B = 2\}$$
$$= 1 - \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B} - \frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B} \cdot \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B} - \left(\frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B}\right)^2 \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B} = \left(\frac{2}{3}\right)^3.$$

(iii) Para que exactamente tres trenes B lleguen mientras Bart espera, los siguientes 3 trenes deberían ser trenes B y el cuarto debería ser un tren A.

P{exactamente 3 trenes B} = P{los siguientes 3 trenes son trenes B, el cuarto es un tren A}
$$= \left(\frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B}\right)^3 \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right).$$

(b) El proceso Poisson combinado de llegadas de tren tiene una tasa de llegada de $\lambda = \lambda_A + \lambda_B =$ 9/hora. La probabilidad de que haya 9 llegadas exactamente durante una hora (t = 1) en este proceso se obtiene utilizando la función de masa de probabilidad (PMF) de Poisson.

$$P_K(9) = \frac{(\lambda t)^9 e^{-\lambda t}}{9!} = \frac{9^9 e^{-9}}{9!} \simeq 0.1318.$$

(c) Para contestar a esta pregunta, hay que considerar otro proceso Bernoulli asociado con el proceso Poisson combinado. En este proceso Bernoulli, cada hora es una prueba independiente y si llegan exactamente 9 trenes durante una hora, esa hora se considera un éxito. Partiendo de (b), el éxito tiene lugar con la probabilidad $P_K(9) \cong 0{,}1318$. Lo que se pretende saber es cuál será el número de trenes hasta que tenga lugar el primer éxito. La respuesta es el valor esperado de una variable aleatoria geométrica con parámetro $P_K(9)$, es decir,

E{número de horas hasta exactamente 9 trenes/hora} $= \frac{1}{P_K(9)} \simeq \frac{1}{0.1318} = 7.59.$

(d) (i) un tren A tendrá retraso si el tiempo, indicado por Z, desde la llegada del tren A hasta el momento de la llegada del siguiente tren B es menos de 30 segundos. Por la propiedad sin memoria, este tiempo tiene una FDP con parámetro λ_B. Por tanto, la probabilidad de que un tren A se retrase se obtiene por

$$P_D = P\{Z \leq 30 \text{ seconds}\} = \int_0^{(30 \text{ secs})(1 \text{ hr}/3600 \text{ secs})} \lambda_B e^{-\lambda_B t}\, dt$$
$$= \int_0^{1/120} 6e^{-6t}\, dt = 1 - e^{-1/20}.$$

Como las probabilidades equivalen a frecuencias de larga duración, esto es también aproximadamente la fracción de trenes A que se retrasan durante un periodo largo razonable, digamos un mes.

(ii) Un pasajero de tren B que se beneficia de la política de retrasos no tiene que esperar nada para un tren A, por lo que su tiempo de espera aproximado en virtud de esa política es cero. Sin la política, el tiempo medio de espera sería $1/\lambda_A = 1/3 = 20$ minutos. Por lo tanto, la reducción del tiempo medio de espera de un pasajero de este tipo es de 20 minutos.
Ahora consideremos un pasajero de un tren A. Con la probabilidad P_D calculada en (i), el tiempo de viaje del pasajero aumentará en la cantidad de tiempo que el tren A espera a que llegue un tren B. Observe que el aumento de la media del tiempo de viaje para un pasajero del tren A que espera a un tren B es igual a $E[Z \mid Z \leq 1/120]$. Para calcular esta cantidad, invocamos el teorema de la expectativa total:

$E[Z] = E[Z \mid Z = 1/120]P\{Z = 1/120\} + E[Z \mid Z > 1/120]P\{Z > 1/120\}$.

Como $E[Z] = 1/\lambda B$ y $E[Z|Z > 1/120] = 1/120 + 1/\lambda B$, tenemos

$$1/\lambda_B = E[Z \mid Z \le 1/120]P_D + (1/120 + 1/\lambda_B)(1 - P_D).$$

Cambiando los términos,

$$\begin{aligned} E[Z \mid Z \le 1/120] &= \frac{1/\lambda_B - (1/120 + 1/\lambda_B)(1 - P_D)}{P_D} \\ &\simeq 0.00413 \text{ hours} = 14.9 \text{ seconds}. \end{aligned}$$

Por lo tanto el aumento de la media del tiempo de viaje para un pasajero del tren A es

E[Z | Z = 1/120] × PD = 14.9 segundos × (1 - e-1/20) = 0.73 segundos.

Se podría intentar obtener el aumento de la media del tiempo de viaje (esto es, el tiempo de espera aproximado, indicado por E[W]) para un pasajero del tren A de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} E[W] &= E[W \mid Z \le 1/120]P_D + E[W \mid Z > 1/120](1 - P_D) \\ &\overset{?}{=} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{120} \times (1 - e^{-1/20}) + 0\,. \end{aligned}$$

Pongamos por caso que nunca ocurra que dos o más trenes A se retrasen por esperar al mismo tren B, es decir, ignoramos la posibilidad de que dos trenes A lleguen en un intervalo de 30 segundos entre ellos. Con esta suposición, un tren A queda en espera por cada tren B que recibe los beneficios. Por lo tanto, la política producirá una reducción global neta del tiempo de viaje si

E[reducción tiempo total] > E[aumento tiempo total]

$$\begin{aligned} &\Rightarrow E[N_{BA}] \times \frac{1}{3} \text{ hours} > E[N_A] \times 0.00413 \text{ hours} \\ &\Rightarrow E[N_{BA}] > 0.012 \times \mathrm{E}[N_A], \end{aligned}$$

donde N_{BA} es el número de personas de un tren B que desean hacer transbordo a un tren A y N_A es el número de personas de un tren A en espera. En otras palabras: se favorece la política si la media de personas en un tren B que desea transbordar es al menos un 1,2% de la media de personas en un tren A.

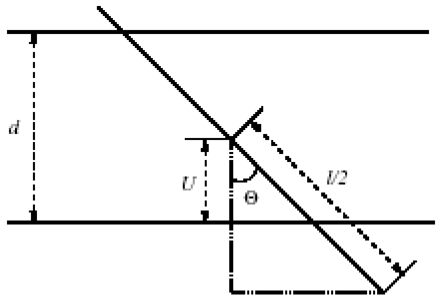
Esta es una condición que se esperaría fuese cierta en muchas estaciones de transbordo de trenes subterráneos. Tal vez le interese pensar en el efecto que tendría ignorar la posibilidad de que dos trenes A lleguen en un intervalo de 30 segundos. ¿Cómo se evaluaría lo razonable de esta simplificación? ¿Cómo cambiaría el análisis si no se realizase esta suposición simplificadora?

2. Ejercicio 3.5 LO (Kang, 2001)

Al igual que en clase, supongamos que U sea una variable aleatoria que indica la distancia del centro de la aguja a la línea más cercana, y supongamos que Θ sea una variable aleatoria que indique el ángulo agudo entre la aguja y la línea vertical como se muestra en la figura más abajo.

Si la aguja se arroja al azar, U se distribuye uniformemente entre 0 d/2 y Θ también está distribuido uniformemente por [0, π/2]. Supongamos que T equivale al evento de que la aguja toque una o varias líneas.

Si $l \leq d$, $P(T) = 2l/\pi d$ como vimos en clase. Ahora calculamos $P(T)$ cuando $l > d$. Observe que si $l/2 \cos\theta \geq d/2$, esto es, $\theta \leq \cos^{-1} d/l$, entonces la aguja siempre toca al menos una línea, independientemente de dónde caiga.



Sólo por simplicidad de anotación, supongamos que A representa el evento de que $0 \leq \Theta \leq \cos^{-1} d/l$. Utilizando el teorema de la probabilidad total, P(T) se calcula mediante

$$P(T) = P(T \mid A)P(A) + P(T \mid A^c)P(A^c).$$

Como $\Theta \sim [0, \pi/2]$, $P(A) = 2/\pi \cos^{-1} d/l$. Como $P(T \mid A) = 1$, tenemos

$$P(T) = \frac{2}{\pi}\cos^{-1}\frac{d}{l} + P(T \mid A^c)\left(1 - \frac{2}{\pi}\cos^{-1}\frac{d}{l}\right).$$

Si calculamos $P(T \mid A^c)$, ya lo tenemos. Dada una θ, $P(T \mid A^c, \Theta = \theta)$ se calcula mediante

$$P(T \mid A^c, \Theta = \theta) = P(U \leq \frac{l}{2}\cos\theta \mid A^c) = \frac{2}{d}\cdot\frac{l}{2}\cos\theta = \frac{l}{d}\cos\theta,$$

porque $U \sim U[0, d/2]$. Ahora podemos calcular $P(T \mid A^c)$ del siguiente modo:

$$P(T \mid A^c) = \int_{\cos^{-1}\frac{d}{l}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{l}{d}\cos\theta\, f_{\Theta|A^c}(\theta)\, d\theta,$$

donde $f_{\Theta|A^c}$ es la función de densidad de probabilidad condicional de Θ condicionada sobre A^C. Ya que $f_{\Theta|A^c}(\theta) = \frac{f_\Theta(\theta)}{P(A^c)}$,

$$\begin{aligned} P(T \mid A^c) &= \int_{\cos^{-1}\frac{d}{l}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{l}{d}\cos\theta \frac{\frac{2}{\pi}}{1 - \frac{2}{\pi}\cos^{-1}\frac{d}{l}}\, d\theta \\ &= \frac{\frac{2l}{\pi d}}{1 - \frac{2}{\pi}\cos^{-1}\frac{d}{l}}\Big[\sin\theta\Big]_{\cos^{-1}\frac{d}{l}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\frac{2l}{\pi d}}{1 - \frac{2}{\pi}\cos^{-1}\frac{d}{l}}\left(1 - \sin\cos^{-1}\frac{d}{l}\right). \end{aligned}$$

Ahora tenemos

$$P(T) = \frac{2}{\pi}\cos^{-1}\frac{d}{l} + \frac{2l}{\pi d}\left(1 - \sin\cos^{-1}\frac{d}{l}\right).$$

porque $\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$,

$$\sin\cos^{-1}\frac{d}{l} = \sqrt{1-\left(\cos\cos^{-1}\frac{d}{l}\right)^2} = \sqrt{1-\left(\frac{d}{l}\right)^2}.$$

Por tanto, $P(T)$ se simplifica como

$$P(T) = \frac{2}{\pi}\cos^{-1}\frac{d}{l} + \frac{2l}{\pi d}\left(1 - \sqrt{1-\left(\frac{d}{l}\right)^2}\right).$$

Resumiendo,

$$P(T) = \begin{cases} \frac{2l}{\pi d} & \text{if } l \le d, \\ \frac{2}{\pi}\cos^{-1}\frac{d}{l} + \frac{2l}{\pi d}\left(1 - \sqrt{1-\left(\frac{d}{l}\right)^2}\right) & \text{if } l > d. \end{cases}$$

3. (Kang, 2001)

Supongamos que la variable aleatoria Y indica el intervalo de llegada de autobuses.

$$E[Y] = 3 \times 0.4 + 5 \times 0.5 + 12 \times 0.1 = 4{,}9$$
$$E[Y^2] = 3^2 \times 0.4 + 5^2 \times 0.5 + 12^2 \times 0.1 = 30{,}5$$

(a) Pongamos que V sea el tiempo de espera. Mediante la ecuación (2.66) del libro de texto,

$$E[V] = \frac{E[Y^2]}{2E[Y]} = \frac{30.5}{2 \times 4.9} = 3.11 \text{ min}$$

(b) Considere N intervalos, donde N es muy un valor muy elevado. Podemos esperar que el número de intervalos con duración de 3 minutos sea 0,4N. Del mismo modo, 0,5N y 0,1N son los números de intervalos con duración de 5 y 12 minutos respectivamente. Por lo tanto, la duración total (minutos) de N intervalos es 3 × 0,4N +5× 0,5N +12 × 0,1N = 4,9N. La probabilidad de que el autobús llegue durante un intervalo de 12 minutos es la proporción de la duración total que ocupan intervalos de 12 minutos a 4,9N.

P(Mendel llega durante un intervalo de 12 minutos) = $\frac{12 \times 0.1N}{4.9N} = 0.245$

(c) Supongamos que W sea la duración del intervalo en el que llega Mendel. Podemos calcular $P(V < 1)$ mediante

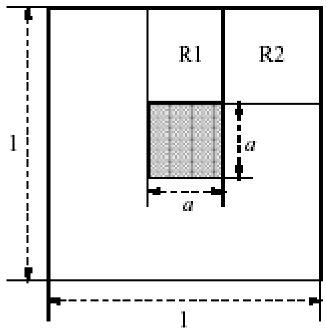
$$\begin{aligned} P(V<1) = {} & P(V<1 \mid W=3)P(W=3)+ \\ & P(V<1 \mid W=5)P(W=5)+ \\ & P(V<1 \mid W=12)P(W=12). \end{aligned}$$

Dado que Mendel llega en un intervalo de 3 minutos, la probabilidad de que espere menos de un minuto es 1/3, porque el momento de su llegada es totalmente aleatorio (distribuido uniformemente) durante todo el intervalo de 3 minutos. Del mismo modo, $P(V < 1 \mid W = 5) = 1/5$ y $P(V < 1 \mid W = 12) = 1/12$.
Por lo tanto,

$$\begin{aligned} P(V<1) &= \frac{1}{3}P(W=3) + \frac{1}{5}P(W=5) + \frac{1}{12}P(W=12) \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{3\times 0.4}{4.9}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{5\times 0.5}{4.9}\right) + \frac{1}{12}\left(\frac{12\times 0.1}{4.9}\right) \\ &= 0.204 \end{aligned}$$

4. Problema LO 3.13 (Chew, 1997; Kang, 2001)

Siguendo las notas que se dan en el texto, (X_1 e Y_1) y (X_2 e Y_2) indique las ubicaciones de la unidad de respuesta e incidentes, respectivamente. S ($S^{'}$) indica el conjunto de puntos dentro (fuera) del cuadrado central.
Supongamos que $A = \{(X_1,Y_1) \in S\}$ y $B = \{(X_2,Y_2) \in S\}$



(a) Consideremos el caso en que las unidades de incidentes y de respuesta están distribuidas de forma independiente y uniforme por todo el cuadrado. En este caso, la distancia de desplazamiento esperada puede descomponerse del siguiente modo

$$E[D] = E[D \mid A \cap B]P(A \cap B) + E[D \mid A \cap B^{'}]P(A \cap B^{'}) + \\ E[D \mid A^{'} \cap B]P(A^{'} \cap B) + E[D \mid A^{'} \cap B^{'}]P(A^{'} \cap B^{'}) .$$

Por simetría

$$E[D \mid A \cap B^{'}]P(A \cap B^{'}) = E[D \mid A^{'} \cap B]P(A^{'} \cap B).$$

Por lo tanto

$$E[D] = E[D \mid A \cap B]P(A \cap B) + 2E[D \mid A \cap B^{'}]P(A \cap B^{'}) + E[D \mid A^{'} \cap B^{'}]P(A^{'} \cap B^{'}) .$$

Sabemos de clase que $E[D] = 2/3$ y $E[D \mid A \cap B] = 2/3\ \alpha$. Como A y B son independientes y $P(A) = P(B) = \alpha^2$, tenemos

$$\begin{aligned} E[D] = \frac{2}{3} &= E[D \mid A \cap B]P(A)P(B) + 2E[D \mid A \cap B^{'}]P(A)P(B^{'}) + \\ &\quad E[D \mid A^{'} \cap B^{'}]P(A^{'})P(B^{'}) \\ &= \frac{2}{3}a(a^2)^2 + 2E[D \mid A \cap B^{'}]a^2(1-a^2) + E[D \mid A^{'} \cap B^{'}](1-a^2)^2 . \end{aligned}$$

(b) (i) El conjunto B′ se puede dividir en dos clases de formas de tamaño idéntico: cuatro rectángulos del tipo R_1 (lindando con el cuadro central) y cuatro rectángulos del tipo R_2 (en las esquinas del cuadrado). Por lo tanto,

$$E[D \mid A \cap B^{'}] = 4E[D \mid A \cap R_1]P(R_1 \mid B^{'}) + 4E[D \mid A \cap R_2]P(R_2 \mid B^{'}) .$$

Observe que

$$P(R_1 \mid B^{'}) = P(R_1 \mid R_1 \cup R_2)\, P(R_1 \cup R_2 \mid B^{'}).$$

Ya que

$$P(R_1 \cup R_2 \mid B^{'}) = \tfrac{1}{4},$$

podemos reescribir E[D | A ∩ B′] como

$$E[D \mid A \cap B^{'}] = E[D \mid A \cap R_1]P(R_1 \mid R_1 \cup R_2) + E[D \mid A \cap R_2]P(R_2 \mid R_1 \cup R_2)\,.$$

(ii) Por definición de la probabilidad condicional,

$$\begin{aligned} & P\{(X_2,Y_2) \in R_1 \mid (X_2,Y_2) \in R_1 \cup R_2\} \\ = \; & \frac{P\{(X_2,Y_2) \in R_1 \text{ and } (X_2,Y_2) \in R_1 \cup R_2\}}{P\{(X_2,Y_2) \in R_1 \cup R_2\}} = \frac{P\{(X_2,Y_2) \in R_1\}}{P\{(X_2,Y_2) \in R_1 \cup R_2\}} \\ = \; & \frac{a(1-a)\frac{1}{2}}{a(1-a)\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}(1-a)\right)^2} = \frac{a}{a+\frac{1}{2}(1-a)} = \frac{2a}{1+a}\,. \end{aligned}$$

(iii) Supongamos que D_x y D_y sean las distancias de desplazamiento en el eje x y en el eje y, respectivamente. De clase, sabemos que $E[D_x \mid A \cap R_1] = \alpha/3$. Si las localizaciones de las unidades de incidentes y respuesta están uniformemente distribuidas sobre S y R_1 respectivamente $E[D_y \mid A \cap R_1] =$

$$\tfrac{a}{2} + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1-a}{2}.$$

De ahí que,

$$\begin{aligned} E[D \mid A \cap R_1] &= E[D_x \mid A \cap R_1] + E[D_y \mid A \cap R_1] \\ &= \frac{a}{3} + \frac{a}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1-a}{2} = \frac{1}{4} + \frac{7}{12}a\,. \end{aligned}$$

Observe que $E[D_y \mid A \cap R2]$ es lo mismo que $E[D_y \mid A \cap R_1]$. Es fácil de ver que $E[D_x \mid A \cap R_2]$ =

$$\tfrac{a}{2} + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1-a}{2}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} E[D \mid A \cap R_2] &= E[D_x \mid A \cap R_2] + E[D_y \mid A \cap R_2] \\ &= 2\left(\frac{a}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1-a}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}a\,. \end{aligned}$$

(c) De (a), tenemos

$$W(a) = E[D \mid A^{'} \cap B^{'}] = \frac{\frac{2}{3} - \frac{2}{3}a(a^2)^2 - 2E[D \mid A \cap B^{'}]a^2(1-a^2)}{(1-a^2)^2}\,.$$

De (b), E[D | A ∩ B′] se calcula como sigue:

$$\begin{aligned} E[D \mid A \cap B^{'}] &= E[D \mid A \cap R_1]P(R_1 \mid R_1 \cup R_2) + E[D \mid A \cap R_2]P(R_2 \mid R_1 \cup R_2) \\ &= \left(\frac{1}{4} + \frac{7}{12}a\right)\left(\frac{2a}{a+1}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}a\right)\left(1 - \frac{2a}{a+1}\right) \\ &= \left(\frac{3+7a}{12}\right)\left(\frac{2a}{a+1}\right) + \left(\frac{1+a}{2}\right)\left(\frac{1-a}{a+1}\right) \\ &= \frac{1}{2(a+1)}\left(a + \frac{7a^2}{3} + 1 - a^2\right) = \frac{1}{2(a+1)}\left(\frac{4}{3}a^2 + a + 1\right)\,. \end{aligned}$$

Entonces W(*a*) viene dado por

$$\begin{aligned} W(a) &= \frac{\frac{2}{3}(1-a^5) - (\frac{4}{3}a^2 + a + 1)a^2(1-a)}{(1-a^2)^2} \\ &= \frac{-2a^4 - a^3 - a^2 + 2a + 2}{3(1+a)(1-a^2)} \\ &= \frac{2a^3 + 3a^2 + 4a + 2}{3(1+a)^2}\,. \end{aligned}$$

W(0) indica la distancia de desplazamiento esperada cuando no existe zona de demanda cero, que debería ser igual a E[D]. De hecho, W(0) = 2/3.

W(1) = 11/12. Si a = 1, todo el cuadrado es una zona de demanda cero. En este caso, la unidad y los incidentes de respuesta están distribuidos uniformemente por el perímetro del cuadrado.

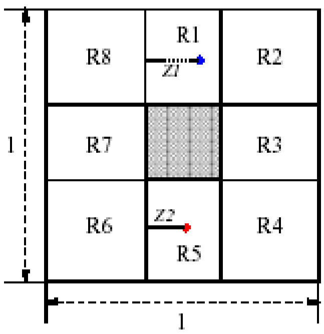
W(1) es la distancia de desplazamiento esperada de un punto en el perímetro a otro. Calculemos esta cantidad de otro modo. Considere las localizaciones de la unidad de respuesta e incidente. Se pueden examinar16 casos posibles:

- La unidad de respuesta y el incidente están en el mismo eje del cuadro (4 casos). La distancia de desplazamiento esperada entre dos ubicaciones es 1/3.
- La unidad de respuesta y el incidente están en ejes adyacentes del cuadro (8 casos). La distancia de desplazamiento esperada entre dos ubicaciones es ½ + ½ = 1.
- La unidad de respuesta y el incidente están en ejes enfrentados en el cuadro (4 casos). La distancia de desplazamiento esperada entre dos ubicaciones es 1/3 + 1 = 4/3.

Como todos los casos son igualmente posibles,

$W(1) = \frac{4}{16}\cdot\frac{1}{3} + \frac{8}{16}\cdot 1 + \frac{4}{16}\cdot\frac{4}{3} = \frac{11}{12}.$

5. Problema LO 3.14 (Kang, 2001)



(a) Dado que $(X_1,Y_1) \in A'$ y $(X_2,Y_2) \in B'$, los casos donde el término de perturbación es estrictamente positivo son:

- $(X_1,Y_1) \in R_1$ y $(X_2,Y_2) \in R_5$
- $(X_1,Y_1) \in R_5$ y $(X_2,Y_2) \in R_1$
- $(X_1,Y_1) \in R_3$ y $(X_2,Y_2) \in R_7$
- $(X_1,Y_1) \in R_7$ y $(X_2,Y_2) \in R_3$

La probabilidad del primer caso se calcula mediante

$$P((X_1,Y_1) \in R_1 \cap (X_2,X_2) \in R_5 \mid A' \cap B') = \frac{P((X_1,Y_1) \in R_1 \cap (X_2,X_2) \in R_5)}{P(A' \cap B')}$$

$$= \frac{\left(\frac{a(1-a)}{2}\right)^2}{(1-a^2)^2} = \frac{a^2}{4(a+1)^2}.$$

Por simetría, las probabilidades de los otros tres casos son iguales a $\frac{a^2}{4(a+1)^2}$. Por lo tanto,

$$P(W_E(a) > 0) = 4 \times \frac{a^2}{4(a+1)^2} = \left(\frac{a}{a+1}\right)^2.$$

(b) Consideremos el caso en el que $(X_1,Y_1) \in R_1$ y $(X_2,Y_2) \in R_5$. Observe que en este caso no hay distancia de desplazamiento extra en la dirección *y*. La distancia de desplazamiento en la dirección *x* viene dada por

$$D_x^B \mid R_1 \cap R_5 = \min(Z_1 + Z_2, 2a - Z_1 - Z_2) = \begin{cases} Z_1 + Z_2, & \text{si } Z_1 + Z_2 \le a, \\ 2a - Z_1 - Z_2, & \text{de otro modo,} \end{cases}$$

donde Z_1 y Z_2 constituyen las distancias x desde los ejes izquierdos de R_1 y R_5 hasta la unidad de respuesta y el incidente, respectivamente (ver figura anterior).

$$E[D_x^B \mid R_1 \cap R_5] = \int_0^a \int_0^{a-z_1} (z_1 + z_2) f_{Z_1}(z_1) f_{Z_2}(z_2)\, dz_2\, dz_1 + \int_0^a \int_{a-z_1}^a (2a - z_1 - z_2) f_{Z_1}(z_1) f_{Z_2}(z_2)\, dz_2\, dz_1 .$$

Ya que $f_{Z_1}(z_1) = f_{Z_2}(z_2) = \frac{1}{a}$,

$$\begin{aligned} E[D_x^B \mid R_1 \cap R_5] &= \frac{1}{a^2}\int_0^a \int_0^{a-z_1} (z_1 + z_2)\, dz_2\, dz_1 + \frac{1}{a^2}\int_0^a \int_{a-z_1}^a (2a - z_1 - z_2)\, dz_2\, dz_1 \\ &= \frac{1}{a^2}\int_0^a \left[z_1 z_2 + \frac{1}{2}z_2^2\right]_0^{a-z_1} dz_1 + \frac{1}{a^2}\int_0^a \left[2a z_2 - z_1 z_2 - \frac{1}{2}z_2^2\right]_{a-z_1}^a dz_1 \\ &= \frac{1}{2a^2}\int_0^a \left(a^2 - z_1^2\right) dz_1 + \frac{1}{a^2}\int_0^a \left(a z_1 - \frac{1}{2}z_1^2\right) dz_1 \\ &= \frac{1}{2a^2}\left[a^2 z_1 - \frac{1}{3}z_1^3\right]_0^a + \frac{1}{a^2}\left[\frac{1}{2}a z_1^2 - \frac{1}{6}z_1^3\right]_0^a \\ &= \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}a = \frac{2}{3}a . \end{aligned}$$

La distancia de desplazamiento esperada en la dirección x sin la barrera cuadrada es 1/3 *a*. Por lo tanto, la distancia extra de desplazamiento, dado que el término de perturbación es positivo, es $2/3a - 1/3a = 1/3^a$. Esto nos da

$$\bar{W}_E(a) = \frac{1}{3}a\left(\frac{a}{a+1}\right)^2 .$$

$\bar{W}'(1) = \bar{W}(1) + \bar{W}_E(1) = \frac{11}{12} + \frac{1}{12} = 1.$ Para defender este resultado, tenga en cuenta de nuevo las localizaciones de la unidad de respuesta y el incidente cuando *a* =1 (ver problema 3.13(c)). Hay 16 casos posibles a considerar. Aquí nos centraremos en la distancia extra de desplazamiento debido a la barrera de demanda cero, que se requiere si comparamos con el problema 3.13 (c).

- La unidad de respuesta y el incidente están en el mismo eje del cuadro (4 casos). La distancia de desplazamiento extra esperada entre dos ubicaciones es 0.
- La unidad de respuesta y el incidente están en ejes adyacentes del cuadro (8 casos). La distancia de desplazamiento extra esperada entre dos ubicaciones es también 0.
- La unidad de respuesta y el incidente están en ejes enfrentados en el cuadro (4 casos). Observe que la distancia de desplazamiento esperada entre dos ubicaciones era 1/3 + 1 = 4/3. Sin embargo, como no se permite desplazarse por la zona de demanda cero, la distancia de viaje esperada se convierte en 2/3 + 1 (podemos obtener 2/3 utilizando el mismo procedimiento que utilizamos en (b)). Por tanto, la distancia extra de desplazamiento entre dos ubicaciones es 1/3.

Como todos los casos son igualmente probables, $W_E(1)$ se calcula mediante
$\bar{W}_E(1) = \frac{4}{16}\cdot 0 + \frac{8}{16}\cdot 0 + \frac{4}{16}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{12}.$

6. Problema LO 3.18 (Kang, 2001)

Para el siguiente problema, empleamos los apuntes de clase, algo diferentes a las notas del libro de texto. Supongamos que $G(a) \equiv E[D^p] \equiv E[|X_1 - X_2|^p]$. Consideremos que $G(a+\varepsilon)$, esto es, $E[D^P]$, cuando el segmento de autopista que se examina se amplía mediante ε, donde ε es muy pequeña. Supongamos que $a < X_1 \le a+\varepsilon$ y $0 \le X_2 \le a$. Como X_1 y X_2 son independientes, $G(a+\varepsilon)$ para este caso se calcula de la siguiente forma:

$$G(a+\varepsilon) = E[(X_1 - X_2)^p] = \int_a^{a+\varepsilon}\int_0^a (x_1 - x_2)^p f_{X_2}(x_2) f_{X_1}(x_1)\, dx_2\, dx_1 \,,$$

donde $f_{X_1}(x_1)$ y $f_{X_2}(x_2)$ son las funciones de densidad de probabilidad de X_1 y de X_2 respectivamente. Como X_1 y X_2 están distribuidos uniformemente sobre $(a, a+\varepsilon]$ y $[0. a]$ respectivamente, $f_{X_1}(x_1)$ y $f_{X_2}(x_2) = 1/a$. Por tanto,

$$\begin{aligned}
G(a+\varepsilon) &= \frac{1}{a\varepsilon}\int_a^{a+\varepsilon}\int_0^a (x_1 - x_2)^p\, dx_2\, dx_1 \\
&= \frac{1}{a\varepsilon}\int_a^{a+\varepsilon}\left[\frac{-1}{p+1}(x_1 - x_2)^{p+1}\right]_0^a dx_1 \\
&= \frac{1}{a\varepsilon}\cdot\frac{1}{p+1}\int_a^{a+\varepsilon}\left(x_1^{p+1} - (x_1 - a)^{p+1}\right) dx_1 \\
&= \frac{1}{a\varepsilon}\cdot\frac{1}{p+1}\left[\frac{1}{p+2}x_1^{p+2} - \frac{1}{p+2}(x_1 - a)^{p+2}\right]_a^{a+\varepsilon} \\
&= \frac{1}{a\varepsilon}\cdot\frac{1}{(p+1)(p+2)}\left((a+\varepsilon)^{p+2} - \varepsilon^{p+2} - a^{p+2}\right) \\
&= \frac{1}{a\varepsilon}\cdot\frac{1}{(p+1)(p+2)}\left((p+2)a^{p+1}\varepsilon + o(\varepsilon)\right) \,,
\end{aligned}$$

donde $o(\varepsilon)$ representa términos con exponentes mayores que ε se cumple el límite de que $_{\varepsilon\to 0}\, o(\varepsilon)/\varepsilon = 0$ ("términos despreciables"). Claramente, $G(a+\varepsilon) \approx a^p/(p+1)$ ya que $\varepsilon \to 0$.

Cuando $0 \le X_1 \le a$ y $a < X_2 \le a+\varepsilon$, también tenemos $G(a+\varepsilon) \approx \frac{a^p}{(p+1)}$ como $\varepsilon \to 0$ mediante simetría. Si $0 \le X_1 \le a$ y $0 \le X_2 \le a$, entonces $G(a+\varepsilon) = G(a)$. Por último, no tenemos que calcular $G(a+\varepsilon)$ para en caso en el que $a < X_1 \le a+\varepsilon$ y $a < X_2 \le a+\varepsilon$ porque la probabilidad asociada es desdeñable.
La siguiente tabla es un resumen de $G(a+\varepsilon)$

Caso	Probabilidad de un caso	$G(a+\varepsilon)$ dado un caso
$0 \le X_1 \le a,\ 0 \le X_2 \le a$	$\frac{a}{a+\varepsilon}\cdot\frac{a}{a+\varepsilon} = (\frac{a}{a+\varepsilon})^2$	$G(a)$
$a < X_1 \le a+\varepsilon,\ 0 \le X_2 \le a$	$\frac{\varepsilon}{a+\varepsilon}\cdot\frac{a}{a+\varepsilon} = \frac{\varepsilon a}{(a+\varepsilon)^2}$	$\frac{a^p}{(p+1)}$
$0 \le X_1 \le a,\ a < X_2 \le a+\varepsilon$	$\frac{a}{a+\varepsilon}\cdot\frac{\varepsilon}{a+\varepsilon} = \frac{\varepsilon a}{(a+\varepsilon)^2}$	$\frac{a^p}{(p+1)}$
$a < X_1 \le a+\varepsilon,\ a < X_2 \le a+\varepsilon$	$\frac{\varepsilon}{a+\varepsilon}\cdot\frac{\varepsilon}{a+\varepsilon} = (\frac{\varepsilon}{a+\varepsilon})^2$	No interesa.

Utilizando el teorema de la esperanza total, obtenemos

$$\begin{aligned}
G(a+\varepsilon) &= G(a)\left(\frac{a}{a+\varepsilon}\right)^2 + \frac{a^p}{(p+1)}\frac{\varepsilon a}{(a+\varepsilon)^2} + \frac{a^p}{(p+1)}\frac{\varepsilon a}{(a+\varepsilon)^2} + o(\varepsilon^2) \\
&= G(a)\left(\frac{a}{a+\varepsilon}\right)^2 + \frac{2a^p}{(p+1)}\frac{\varepsilon a}{(a+\varepsilon)^2} + o(\varepsilon^2) \\
&\approx G(a)\left(\frac{a}{a+\varepsilon}\right)^2 + \frac{2a^p}{(p+1)}\frac{\varepsilon a}{(a+\varepsilon)^2} \,.
\end{aligned}$$

De la fórmula de la suma de una serie geométrica infinita, sabemos

$$\frac{a}{a+\varepsilon} = \frac{1}{1+\frac{\varepsilon}{a}} = 1 - \frac{\varepsilon}{a} + \left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^2 - \left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^3 + \cdots .$$

Si ignoramos los términos con los exponentes más altos, tenemos

$$\frac{a}{a+\varepsilon} \approx 1 - \frac{\varepsilon}{a} .$$

Esto nos da las siguientes aproximaciones:

$$\left(\frac{a}{a+\varepsilon}\right)^2 \approx \left(1-\frac{\varepsilon}{a}\right)^2 = 1 - \frac{2\varepsilon}{a} + \frac{\varepsilon^2}{a^2} \approx 1 - \frac{2\varepsilon}{a} ,$$
$$\frac{\varepsilon a}{(a+\varepsilon)^2} = \frac{\varepsilon}{a}\left(\frac{a}{a+\varepsilon}\right)^2 \approx \frac{\varepsilon}{a}\left(1-\frac{2\varepsilon}{a}\right) = \frac{\varepsilon}{a} - \frac{2\varepsilon^2}{a^2} \approx \frac{\varepsilon}{a} .$$

Por lo tanto, podemos reescribir $G(a + \varepsilon)$ como:

$$G(a+\varepsilon) \approx G(a)\left(1-\frac{2\varepsilon}{a}\right) + \frac{2a^p}{(p+1)} \cdot \frac{\varepsilon}{a} = G(a)\left(1-\frac{2\varepsilon}{a}\right) + \frac{2a^{p-1}\varepsilon}{(p+1)} .$$

Cambiando los términos de lugar, tenemos

$$\frac{G(a+\varepsilon) - G(a)}{\varepsilon} = -\frac{2G(a)}{a} + \frac{2a^{p-1}}{(p+1)} .$$

Si $\varepsilon \to 0$, tenemos la siguiente ecuación diferencial:

$$G'(a) = -\frac{2G(a)}{a} + \frac{2a^{p-1}}{(p+1)} .$$

Un criterio sensato (o la consulta de los libros sobre ecuaciones diferenciales) nos lleva a la siguiente solución:

$$G(a) \equiv E[D^p] = \frac{2a^p}{(p+1)(p+2)} .$$

Podemos saltarnos la derivación de la ecuación diferencial utilizando directamente la ecuación (3.64) del libro de texto. Una vez que obtenemos $G(a + \varepsilon)$, podemos insertarlo en (3.64), lo que nos da la misma ecuación diferencial que arriba.