1. (Kang, 2001)

Supongamos que las tasas de llegada de los aviones con ruta norte y noroeste son λ_N/hora y λ_{NE}/hora, respectivamente.

(a) Pongamos que A sea el evento de que un avión con ruta noroeste se encuentre a 5 millas de *J* cuando un avión que se dirige hacia el norte llega a *J*.

P(A) = 1 - P(A^c)
= 1- P(ningún avión con ruta noroeste está a 5 millas de J)
= 1- P(no existe ningún avión con ruta noroeste en el intervalo $[t - \frac{5}{600}, t + \frac{5}{600}])$,

donde *t* es el tiempo en el cual el avión con ruta norte alcanza *J*. Debido a la cualidad sin memoria del proceso Poisson, *t* es irrelevante para el cálculo de la probabilidad. Utilizando la fórmula para el número de llegadas Poisson que suceden en un intervalo de duración *t*,

$$P(N(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!},$$

obtenemos

P(A) = 1 - P(ningún avión con ruta noroeste llega durante 10/600 horas)

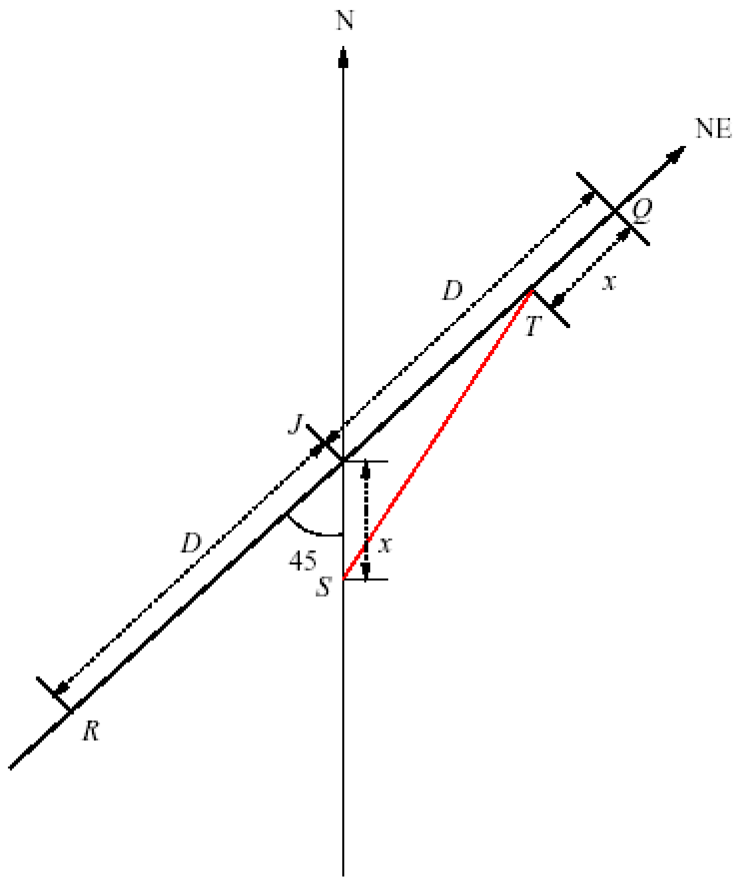
$$= 1 - \frac{\left(\lambda_{NE} \frac{1}{60}\right)^0 e^{-\left(\lambda_{NE} \frac{1}{60}\right)}}{0!}$$
$$= 1 - e^{-\frac{\lambda_{NE}}{60}}.$$

(b) Supongamos que B indica el evento de que un avión con ruta norte se encuentre en un radio de 5 millas de *J* cuando un avión con ruta noroeste llega a *J*. Siguiendo el mismo razonamiento que en (a),

P(B) = 1 - P(ningún avión con ruta norte llega durante 10/600 horas)

$$= 1 - \frac{\left(\lambda_{N} \frac{1}{60}\right)^0 e^{-\left(\lambda_{N} \frac{1}{60}\right)}}{0!}$$
$$= 1 - e^{-\frac{\lambda_{N}}{60}}.$$

(c) En primer lugar determinamos la distancia *D* desde *J* por el eje noreste, de modo que si no hay ningún avión con ruta noroeste en *D* millas cuando un avión con dirección norte llega a *J*, éste tiene garantizado que *nunca* va a estar en un radio de 5 millas de un avión con ruta noroeste en las cercanías de J (ver siguiente figura). Examine el caso cuando un avión con ruta noroeste llega al punto *Q*



cuando el avión en dirección norte llega a *J*. Supongamos que el avión con ruta norte no ha llegado todavía a *J* y se encuentra actualmente en el punto *S* que esta a *x* millas al sur de *J*. Como todos los aviones viajan a la misma velocidad, el avión con dirección noroeste está pasando por el punto *T* en ese momento. La distancia entre dos aviones *L(x)*, se calcula mediante

$$\begin{aligned} L(x) = \overline{ST} &= \sqrt{x^2 + (D-x)^2 - 2x(D-x)\cos\frac{3\pi}{4}} \\ &= \sqrt{(2-\sqrt{2})x^2 - (2-\sqrt{2})Dx + D^2}\,. \end{aligned}$$

Deseamos obtener el mínimo de *L(x)*, es decir, la distancia mínima posible entre los dos aviones en el curso del vuelo. Como minimizar *L(x)* es equivalente a minimizar $L(x)^2$,

$$\frac{dL(x)^2}{dx} = 2(2-\sqrt{2})x - (2-\sqrt{2})D = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{D}{2}\,.$$

Por lo tanto, la distancia mínima posible *L** es

$$L^* = L(\frac{D}{2}) = \sqrt{(2-\sqrt{2})\left(\frac{D}{2}\right)^2 - (2-\sqrt{2})D\left(\frac{D}{2}\right) + D^2} = \frac{D}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\,.$$

Para que L^* sea mayor de 5 millas,

$$\frac{D}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \; > \; 5 \quad \Rightarrow \quad D > \frac{10}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} = 5.41 \text{ millas.}$$

Esto significa que si no existe ningún avión con dirección noreste en un radio de 5,41 millas desde *J* por el eje noreste cuando un avión con ruta norte llega a *J*, la distancia entre el avión con ruta norte y cualquier avión con dirección noreste en las proximidades de *J* es *siempre* superior a 5 millas.

Supongamos que *P(C)* sea la probabilidad de que un avión con ruta norte se encuentre alguna vez en un radio de 5 millas de un avión con dirección noreste en las proximidades de *J*, lo que nos interesa calcular en este problema. Al igual que (a),

$P(C) = 1 - P(C^c) = 1 - P$(ningún avión con ruta noroeste llega durante 10,82/600 horas)

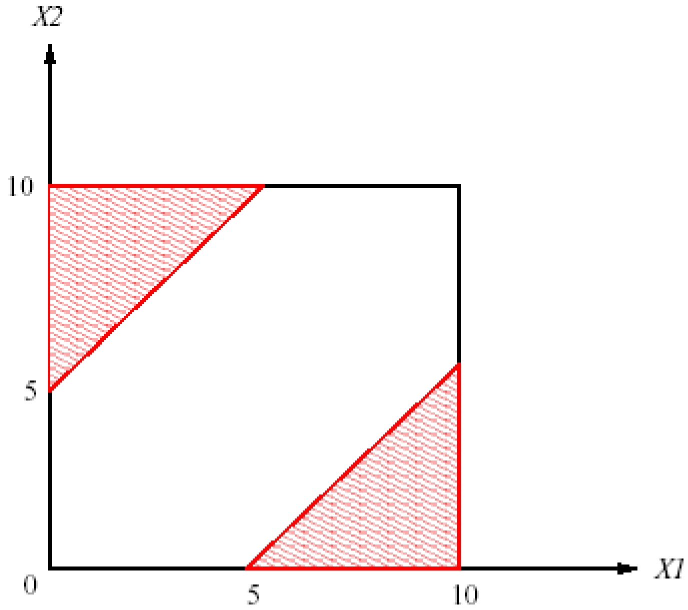
$$= 1 - e^{-\left(\lambda_{NE}\frac{10.82}{600}\right)}\,.$$

(d) Supongamos que *E* constituya el evento en el que existan exactamente dos aviones con dirección noroeste en un radio de 5 millas de *J*. Supongamos que *F* indica el evento de que estos dos aviones se encuentran, a su vez, al menos a 5 millas de distancia. Queremos calcular $P(E \cap F)$. Se puede calcular fácilmente *P(E)* utilizando la distribución de Poisson como sigue:

$P(E) = P$(dos aviones con ruta noroeste llegan durante 10/600 horas)

$$= \frac{\left(\lambda_{NE}\frac{1}{60}\right)^2 e^{-\left(\lambda_{NE}\frac{1}{60}\right)}}{2!}\,.$$

Ahora calculemos una probabilidad condicional $P(F \mid E)$. Supongamos que X_1 y X_2 indiquen las ubicaciones de los dos aviones, respectivamente. Entonces $P(F \mid E)$ es igual a $P(|X_1 - X_2| \geq 5)$ dado que X_1 y X_2 están distribuidos por un intervalo de 10 millas.



Como X_1 y X_2 están distribuidos uniformemente por el intervalo, podemos calcular $P(|X_1 - X_2| \geq 5)$ geométricamente; $P(|X_1 - X_2| \geq 5)$ es el cociente de la suma de las áreas de los dos triángulos en escuadra con el área del cuadrado de 10 por 10 en la figura anterior, que es 25/100 = ¼. Por lo tanto

$$P(E \cap F) = P(F \mid E)P(E) = \frac{(\frac{\lambda_{NE}}{60})^2 e^{-\frac{\lambda_{NE}}{60}}}{8}.$$

2. (Kang, 2001)

a) Q, el riesgo de muerte por vuelo durante el periodo 1/09/91–31/08/01 es

$$Q = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} = \frac{0.60 + 0.71 + 1.00 + 1.00 + 0.08}{5.5 \times 10^6 \times 10} = 6.16 \times 10^{-8}.$$

b) Q, el riesgo de muerte por accidente aéreo durante el periodo 1/10/91–30/09/01 es

$$Q = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} = \frac{0.60 + 0.71 + 1.00 + 1.00 + 0.08 + 1.00 + 1.00 + 1.00 + 1.00}{5.5 \times 10^6 \times 10} = 1.34 \times 10^{-7}.$$

c) La tragedia del 11 de septiembre aumentó Q sustancialmente para un periodo de diez años.