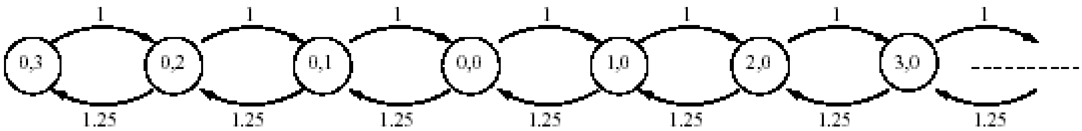
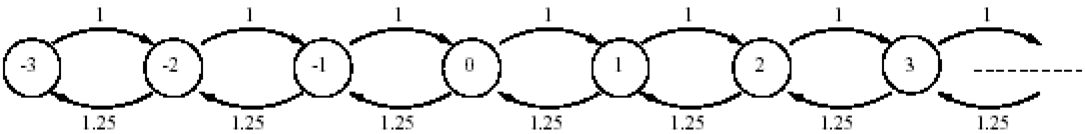
1. Problema LO 4.1 (Ingolfsson, 1993; Kang, 2001)

Más abajo se muestra un posible diagrama de transición entre estados. Cada estado se describe mediante dos números, *i* y *j*. *i* es el número de taxis que están esperando pasajeros, y *j* es el número de pasajeros que buscan taxis. Si hay taxis esperando pasajeros, éstos no tendrán que esperar. Si hay pasajeros que buscan taxis, no debería haber taxis libres. Por lo tanto, los estados con i > 0 y j > 0 no son posibles.



También es posible representar un estado mediante un solo número en lugar de dos. Si definimos la variable de estado *n* como:

n = (número de taxis esperando pasajeros) – (número de pasajeros buscando taxis), entonces el diagrama de transición entre estados correspondiente es:



Observe que existe una correspondencia biunívoca entre estados en los dos diagramas. Por ejemplo, el estado $n = -3$ en el segundo diagrama implica inmediatamente el estado $i = 0, j = 3$ en el primer diagrama sin ninguna ambigüedad.

A partir de ahora, vamos a utilizar el primer diagrama de transición entre estados. Las ecuaciones de balance son

$$P_{0,3} \times 1 = P_{0,2} \times 1.25 \quad \Rightarrow \quad P_{0,2} = 0.8P_{0,3}$$
$$P_{0,2} \times 1 = P_{0,1} \times 1.25 \quad \Rightarrow \quad P_{0,1} = 0.8P_{0,2} = (0.8)^2 P_{0,3}$$
$$P_{0,1} \times 1 = P_{0,0} \times 1.25 \quad \Rightarrow \quad P_{0,0} = 0.8P_{0,1} = (0.8)^3 P_{0,3}$$
$$\vdots$$
$$P_{i-1,0} \times 1 = P_{i,0} \times 1.25 \quad \Rightarrow \quad P_{i,0} = 0.8P_{i-1,0} = (0.8)^{i+3} P_{0,3}$$

Como $\sum_{i,j} P_{i,j} = 1,$ tenemos

$$P_{0,3} + P_{0,2} + P_{0,1} + \sum_{i=1}^{\infty} P_{i,0} = P_{0,3} \sum_{i=0}^{\infty} (0.8)^i = P_{0,3} \left(\frac{1}{1 - 0.8} \right) = 1 \quad \Rightarrow \quad P_{0,3} = 0.2$$

Por lo tanto,

$$P_{0,3} = 0.2, \quad P_{0,2} = (0.8)(0.2), \quad P_{0,1} = (0.8)^2(0.2), \quad P_{i,0} = (0.8)^{i+3}(0.2) \quad \text{para } i = 0, 1, 2, \ldots$$

(a) Supongamos que L_T sea el número medio de taxis que esperan clientes. Utilizando las probabilidades de estado estacionario calculadas arriba, L_T se obtiene mediante

$$
\begin{aligned}
\bar{L}_T &= \sum_{i=1}^{\infty} i P_{i,0} = \sum_{i=1}^{\infty} i(0.8)^{i+3}(0.2) = (0.8)^4 \sum_{i=1}^{\infty} i(0.8)^{i-1}(0.2) \\
&= (0.8)^4 E[\text{geométrico r.v. con } p = 0.2] \\
&= (0.8)^4 \left(\frac{1}{0.2}\right) = \left(\frac{4}{5}\right)^4 5 = \frac{256}{125} \simeq 2.05
\end{aligned}
$$

(b) Supongamos que L_P sea el número medio de pasajeros que buscan taxi.

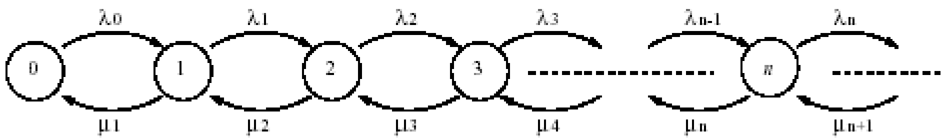
$$
\begin{aligned}
\bar{L}_P &= \sum_{j=1}^{3} j P_{0,j} = 1P_{0,1} + 2P_{0,2} + 3P_{0,3} \\
&= (0.8)^2(0.2) + 2(0.8)(0.2) + 3(0.2) \\
&= \frac{16}{125} + \frac{8}{25} + \frac{3}{5} = \frac{131}{125} \simeq 1.05
\end{aligned}
$$

(c) Supongamos que N sea el número de pasajeros que no se unen a la cola de espera durante una hora porque cuando ellos llegan no hay espacio, esto es, el sistema está en estado (0,3). Supongamos que T sea la cantidad de tiempo que el sistema está en estado (0,3) durante una hora. Asumiendo un estado estacionario, tenemos

$$
\begin{aligned}
E[N] &= \int_0^{60} E[N \mid T = t] f_T(t)dt = \int_0^{60} \lambda t f_T(t)dt = \lambda \int_0^{60} t f_T(t)dt \\
&= \lambda E[T] = (1.25)(P_{0,3})(60) = (1.25)(0.2)(60) = 15 \text{ pasajeros}
\end{aligned}
$$

2. Ejercicio LO 4.2 (Ingolfsson, 1993)

El diagrama de transición entre estados para cualquier sistema de cola markoviano (esto es, sin memoria) tiene el aspecto de la figura que se muestra más abajo. La única diferencia entre dicho sistema de cola y un sistema de cola M/M/1 es que, en un sistema de cola markoviano general, se permite que las tasas de servicio y de llegada dependan del estado del sistema.



Las ecuaciones de balance para este sistema de colas son

$$
\begin{aligned}
P_{n-1}\lambda_{n-1} = P_n\mu_n \quad &\Rightarrow \quad P_n = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} P_{n-1} \quad \text{para} \quad n = 1, 2, \ldots \\
&\Rightarrow \quad P_n = \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\cdots\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\cdots\mu_1} P_0 \quad \text{para } n = 1, 2, \ldots \qquad (1)
\end{aligned}
$$

La ecuación $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$ se puede utilizar para determinar P_0

(a) Utilizando la fórmula general (1) con $\lambda_n = \lambda/n{+}1$ y $\mu_n = \mu,$ tenemos

$$P_n = \frac{(\frac{\lambda}{n})(\frac{\lambda}{n-1})(\frac{\lambda}{n-2})\cdots(\lambda)}{(\mu)(\mu)(\mu)\cdots(\mu)}P_0 = \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}P_0 \quad \text{para } n = 0,1,2,\ldots \tag{2}$$

Entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = P_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} = P_0 e^{\lambda/\mu} = 1 \quad\Rightarrow\quad P_0 = e^{-\lambda/\mu}$$
$$\Rightarrow\quad P_n = \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}e^{-\lambda/\mu} \quad \text{para } n = 0,1,2,\ldots$$

Por tanto, en estado estacionario, el número de clientes en este sistema de colas sigue una distribución Poisson PMF con media λ/μ. La fracción de tiempo que el servidor está ocupado, ρ, es igual a $1 - P_0 = 1 - \varepsilon^{-\lambda/\mu}$. El sistema alcanza el estado estacionario con tal de que

$$\rho < 1 \quad\Leftrightarrow\quad 1 - e^{-\lambda/\mu} < 1 \quad\Leftrightarrow\quad e^{-\lambda/\mu} > 0 \quad\Leftrightarrow\quad \lambda/\mu < \infty$$

Así que todo lo que necesitamos pedir es que $\lambda < \infty$ y $\mu > 0$.

(b) Ahora tenemos $\lambda_n = \lambda$ y $\mu_n = c_n\mu$, por tanto

$$P_n = \frac{(\lambda/\mu)^n}{c_n c_{n-1}\cdots c_1}P_0 \quad \text{para } n = 1,2,\ldots$$

Si comparamos esto con (2), vemos que si $c_n = n$, se vuelven idénticas. Cuando $\mu_n = n\mu$ y $\lambda_n = \lambda$, el sistema de cola equivale a un sistema M/M/∞.

(c) Como la PMF para el número de clientes en estado estable en el sistema es una función Poisson con media λ/μ, tenemos $L = \lambda/\mu$. Según la ley de Little, tenemos $L = \lambda W$, sin olvidarnos de que debemos utilizar la tasa media de llegada λ. La tasa media de llegada se puede calcular mediante

$$\begin{aligned}\bar{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n P_n &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{n+1}\right)\frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}e^{-\lambda/\mu} \\ &= \mu e^{-\lambda/\mu}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda/\mu)^{n+1}}{(n+1)!} = \mu e^{-\lambda/\mu}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} \\ &= \mu e^{-\lambda/\mu}(e^{\lambda/\mu} - 1) = \mu(1 - e^{-\lambda/\mu})\,.\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\bar{W} = \frac{\bar{L}}{\bar{\lambda}} = \frac{\lambda/\mu}{\mu(1-e^{-\lambda/\mu})} = \frac{\lambda}{\mu^2(1-e^{-\lambda/\mu})}\,.$$

Un modo tentador, pero incorrecto, de calcular W es mediante:

$$\bar{W} \stackrel{?}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n+1}{\mu}\right)P_n = \frac{1}{\mu}(\bar{L}+1) = \frac{1}{\mu}(\frac{\lambda}{\mu}+1)\,. \qquad (3)$$

La razón por la que este enfoque es incorrecto es que la probabilidad de que un cliente elegido al azar llegue cuando hay *n* clientes presentes en el sistema, digamos Q_n no es igual a la probabilidad de estado estacionario P_n. De hecho,

$$\begin{aligned} Q_n &= P(n \text{ clientes} \quad \text{presentes cuando llega un cliente elegido al azar}) \\ &= \frac{\text{número de clientes que llegan cuando n clientes están presentes en el sistema}}{\text{total de llegadas de clientes durante un periodo largo de tiempo, } [0,T]} \\ &= \frac{(\text{duración de tiempo durante el cual hay n clientes}) \times \lambda_n}{\bar{\lambda}T} \\ &= \frac{TP_n\lambda_n}{\bar{\lambda}T} = \frac{\lambda_n}{\bar{\lambda}}P_n\,. \end{aligned}$$

Si utilizamos Q_n en lugar de P_n.en (3), obtenemos la respuesta correcta.

$$\bar{W} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n+1}{\mu}\right)Q_n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n+1}{\mu}\right)\frac{\lambda_n}{\bar{\lambda}}P_n = \frac{\lambda}{\mu^2(1-e^{-\lambda/\mu})}\,.$$

3. Ejercicio LO 4.3 (Ingolfsson, 1993)

Supongamos que

$N(t) \equiv \neq$ de autobuses averiados en tiempo t

Entonces

$$\Pr\{N(t+\Delta t) = N(t)+1\} = 1\Delta t + o(\Delta t)$$

(los autobuses se averían a razón de uno por hora) y

$$\Pr\{N(t+\Delta t) = N(t)-1\} = \mu(N(t))\Delta t + o(\Delta t)$$

donde la función $\mu(N(t))$ está determinada por:

(1) el número total de mecanismos empleados, *k* y
(2) la asignación de mecánicos a los $N(t)$ autobuses averiados

El problema es adoptar las decisiones (1) y (2) para minimizar el coste esperado por hora, *E[C]*. El coste *C* por hora consiste en

$$\begin{aligned} C &= \text{sueldos} \quad + \text{coste} \quad \text{de} \quad \text{autobuses} \quad \text{sin} \quad \text{servicio} \\ &= \$10k + \$40 \int_0^1 N(t)dt \end{aligned}$$

En estado estacionario, tenemos

$$\mathrm{E}\left[\int_0^1 N(t)dt\right] = 1 \times \bar{N}$$

donde *N* es la media de autobuses averiados, así que

$$\mathrm{E}[C] = 10k + 40\bar{N}$$

El número de autobuses *N(t)* se comporta de acuerdo a un proceso de Markov con estado discreto con un diagrama de transición idéntico al del último problema, con $\lambda_i = 1$ y μ_i por determinar.

(i) Tasa de servicio proporcional a k. Supongamos que k, el número total de mecánicos, se ha decidido. Recuerde que las probabilidades de estado estacionario para *N(t)* serán

$$P_i = \frac{1}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_i}P_0$$

Supongamos que se incrementa la tasa de servicio μ_j. Entonces $P_0, P_1, \ldots, P_{j-1}$ aumentaría, y $P_j, P_{j+1}, \ldots$ disminuiría, así que $N = \Sigma\, iP_i$ disminuiría. Como se quiere minimizar *N*, lo óptimo óptimo debería ser alargar al máximo todas las tasas de servicio μ_i. Con lo cual, cada vez que uno o más autobuses se averían, todos los mecánicos estarán trabajando, por lo tanto $\mu_i = (1/2)k$ para $i = 1, 2, \ldots$. Observe que no importa si todos los *k* mecánicos terminan de reparar el primer autobús averiado antes de empezar a trabajar en el siguiente que se averíe, del mismo modo, es indiferente si se separan cuando el segundo autobús se avería. Como μ_i es constante, esto equivale a una cola M/M/1, para la cual $N = \lambda/(\mu-\lambda) = 1/(k/2-1) = 2/(k-2)$ (así, *k* tiene que ser al menos tres para la estabilidad), por tanto

$$\mathrm{E}[C] = 10k + \frac{80}{k-2}$$

Diferenciando con respecto a *k* y haciendo que sea igual a cero, tenemos

$$10 - \frac{80}{(k-2)^2} = 0 \Rightarrow k = 2 + \sqrt{8} \simeq 4.8$$

Así, el número óptimo de mecánicos debe ser cuatro o cinco. Tenemos,

$$\mathrm{E}[C]|_{k=4} = 80 \text{ y } \mathrm{E}[C]|_{k=5} = 76\tfrac{2}{3}$$

así que $k^* = 5$ minimiza el coste por hora.

(ii) Tasa de servicio proporcional a $\sqrt{k}$. En este caso, sí importa si todos los mecánicos trabajan en el mismo autobús o se dividen para trabajar en diferentes autobuses. Por ejemplo, si $k = 4$, hay mecánicos disponibles y hay dos autobuses para reparar, la tasa de servicio general depende de cómo se asignen los mecánicos a los autobuses.

Asignación	Tasa de servicio general, μ_2
$4+0$	$\sqrt{4}(1/2) = 1$
$3+1$	$(\sqrt{3}+\sqrt{1})(1/2) = 1.366$
$2+2$	$(\sqrt{2}+\sqrt{2})(1/2) = 1.414$

Así que, para este caso, es mejor asignar dos mecánicos a cada autobús. Se podría realizar este análisis para $k = 1,2,...$ e i = ≠ de autobuses = 1,2,..., hallar la mejor asignación para cada caso y calcular *E[C]* para cada *k*. La respuesta resulta ser que $k^* = 5$ de nuevo minimiza el coste esperado por hora a 94,20$. En lugar de tener que realizar un análisis tan tedioso como este, supongamos un caso en el que no se puede dividir al personal. Entonces, la tasa de servicio será $\mu_i = (1/2)\sqrt{k}$, y

$$\bar{N} = \lambda/(\mu - \lambda) = 1/(\sqrt{k}/2 - 1) = 2/(\sqrt{k} - 2)$$

Ahora vemos que para la estabilidad se requiere que k > 4, y

$$\mathrm{E}[C] = 10k + \frac{80}{\sqrt{k}-2} \Rightarrow \frac{\partial \mathrm{E}[C]}{\partial k} = 10 - \frac{80}{(\sqrt{k}-2)^2}\frac{1}{2\sqrt{k}} = 0 \Rightarrow \sqrt{k}(\sqrt{k}-2)^2 = 4$$

Por el sistema de ensayo y error, hallamos que $k \simeq 9.8.$. Ya que

$$\mathrm{E}[C]|_{k=9} = 170 \text{ y} \mathrm{E}[C]|_{k=10} = 168.83$$

el tamaño óptimo del equipo es $k^* = 10$.

4. Ejercicio LO 4.6 (Odoni, 2001)

(a) El tiempo de servicio, *S*, viene dado por $S = \frac{D_x}{v_x} + \frac{D_y}{v_y} + Z.$ La función de densidad de probabilidad de D_x es (consultar sección 3.1 del libro de texto)

$$f_{D_x}(x) = \frac{1}{X_0}\left(1 - \frac{x}{2X_0}\right), \quad 0 \le x \le 2X_0 .$$

Tenemos

$$E[D_x] = \int_0^{2X_0} x f_{D_x}(x)\,dx = \int_0^{2X_0} x\frac{1}{X_0}\left(1 - \frac{x}{2X_0}\right)dx = \frac{2}{3}X_0 ,$$

$$E[D_x^2] = \int_0^{2X_0} x^2 f_{D_x}(x)\,dx = \int_0^{2X_0} x^2\frac{1}{X_0}\left(1 - \frac{x}{2X_0}\right)dx = \frac{2}{3}X_0^2 ,$$

$$\sigma_{D_x}^2 = E[D_x^2] - E[D_x]^2 = \frac{2}{9}X_0^2 .$$

Por simetría, también tenemos

$$E[D_y] = \frac{2}{3}Y_0, \quad E[D_y^2] = \frac{2}{3}Y_0^2, \quad \sigma_{D_y}^2 = \frac{2}{9}Y_0^2 .$$

De ahí que

$$E[S] = E[\frac{D_x}{v_x} + \frac{D_y}{v_y} + Z] = \frac{E[D_x]}{v_x} + \frac{E[D_y]}{v_y} + E[Z] = \frac{2X_0}{3v_x} + \frac{2Y_0}{3v_y} + E[Z] ,$$

$$\sigma_S^2 = \mathrm{var}(\frac{D_x}{v_x} + \frac{D_y}{v_y} + Z) = \frac{\sigma_{D_x}^2}{v_x^2} + \frac{\sigma_{D_y}^2}{v_y^2} + \sigma_Z^2 = \frac{2X_0^2}{9v_x^2} + \frac{2Y_0^2}{9v_y^2} + \sigma_Z^2 .$$

$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda E[S] = \lambda\left(\frac{2X_0}{3v_x} + \frac{2Y_0}{3v_y} + E[Z]\right).$ Ya que se trata de un sistema de cola M/G/1, podemos calcular L, L_q W, y W_q insertando las expresiones para ρ, $E[S]$ y σ^2_S en las siguientes ecuaciones:

$$L = \rho + \frac{\rho^2 + \lambda^2\sigma_S^2}{2(1-\rho)}, \quad W = E[S] + \frac{\rho^2 + \lambda^2\sigma_S^2}{2\lambda(1-\rho)}, \quad W_q = \frac{\rho^2 + \lambda^2\sigma_S^2}{2\lambda(1-\rho)}, \quad L_q = \frac{\rho^2 + \lambda^2\sigma_S^2}{2(1-\rho)}$$

(b) X_0 = 2 millas, Y_0 = 1 milla, v_x = 30 millas/hora, v_y = 20 millas/hora, $E[Z]$ = 10 min., y σ^2_Z = 25 minutos^2.

$$E[S] = \frac{1}{\mu} = \frac{2\cdot 2}{3\cdot(30/60)} + \frac{2\cdot 1}{3\cdot(20/60)} + 10 = 14.67 \text{ mins}$$

$$\sigma_S^2 = \frac{2\cdot 2^2}{9\cdot(30/60)^2} + \frac{2\cdot 1^2}{9\cdot(20/60)^2} + 25 = 30.55 \text{ mins}^2$$

Como se muestra en la tabla siguiente, los valores de ρ, L, W, L_q y W_q para un valor dado de λ son mayores que los valores correspondientes en el ejemplo 1. Lo que supone que ubicar la ambulancia en el centro de la región tras completar un servicio se traduce en un mejor servicio que si se deja el vehículo en la localización del último incidente.

λ (llam./hr)	ρ	L nº llamadas	W (min.)	L_q nº llamadas	W_q (min.)
0,5	0,1222	0,1320	15,8366	0,0097	1,1666
1,0	0,2445	0,2897	17,3808	0,0452	2,7108
1,5	0,3668	0,4880	19,5211	0,1213	4,8511
2,0	0,4890	0,7562	22,6856	0,2672	8,0156
2,5	0.6112	1,1600	27,8404	0,5488	13,1704
3,0	0,7335	1,8862	37,7243	1,1527	23,0543
3,5	0,8558	3,7544	64,3613	2,8987	49,6913
4,0	0,9780	25,8021	387,0320	24,8241	372,3620

5. (Odoni, 2001)

(a) Supongamos que α_r = P(r llegadas al sistema durante un tiempo de servicio). Supongamos también que $f_S(t)$ sea la función de densidad de probabilidad del tiempo de servicio. Si el proceso de llegada sucede según Poisson con una tasa de λ, α_r se obtiene de la siguiente forma:

$$\alpha_r = \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^r e^{-\lambda t}}{r!} f_S(t)\, dt .$$

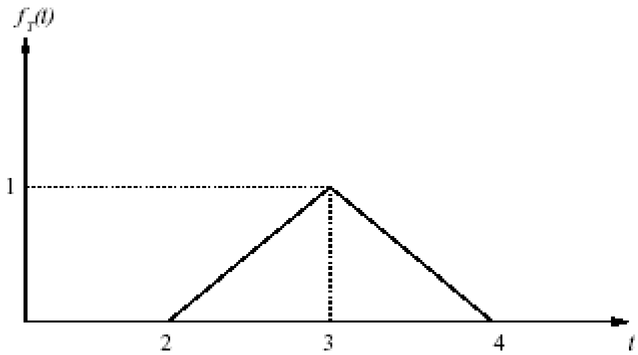
Como $f_S(t) = 1$ para $1 \leq t \leq 2$ y $\lambda = 0{,}6$ en este problema, tenemos

$$\alpha_r = \int_1^2 \frac{(0.6t)^r e^{-0.6t}}{r!}\, dt\,.$$

Para tener seis clientes en la cola tras dos finalizaciones de servicio cuando hay exactamente cuatro clientes esperando a ser atendidos, deberían llegar cuatro clientes nuevos antes de que se termine el segundo servicio. Asumiendo que cada finalización de servicio es independiente de las otras, la probabilidad viene dada por

$$P = \alpha_4\alpha_0 + \alpha_3\alpha_1 + \alpha_2\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_0\alpha_4 = 2\alpha_4\alpha_0 + 2\alpha_3\alpha_1 + \alpha_2^2\,.$$

Observe que P es igual a la probabilidad de que cuatro clientes lleguen durante *dos* tiempos de servicio consecutivos. Supongamos que $f_T(t)$ sea la función de densidad de probabilidad de los *dos* tiempos de servicio consecutivos. Asumiendo que los tiempos de servicio son independientes, obtenemos $f_T(t)$ por convolución.



Supongamos que β_r = P(r llegadas al sistema durante *dos* tiempos consecutivos de servicio).

$$\begin{aligned}\beta_r &= \int_2^4 \frac{(0.6t)^r e^{-0.6t}}{r!} f_T(t)\, dt \\ &= \int_2^3 \frac{(0.6t)^r e^{-0.6t}}{r!}(t-2)\, dt + \int_3^4 \frac{(0.6t)^r e^{-0.6t}}{r!}(4-t)\, dt\,.\end{aligned}$$

Entonces P es simplemente β_4

(b) $\lambda_1 = 0.6 \times 0.4 = 0.24$, $\lambda_2 = 0.6 \times 0.6 = 0.36$. $E[S_1] = E[S_2] = 1.5$, $\sigma_{S_1}^2 = \sigma_{S_2}^2 = \frac{1}{12}$. $\rho_1 = \lambda_1 E[S_1] = 0.36$, $\rho_2 = \lambda_2 E[S_2] = 0.54$.

$$\bar{W}_0 = \sum_{i=1}^{2} \frac{\lambda_i E[S_i^2]}{2} = \sum_{i=1}^{2} \frac{\lambda_i(\sigma_{S_1}^2 + E[S_i]^2)}{2} = 0.3\left(\frac{1}{12} + 1.5^2\right)$$

$$\bar{W}_{q1} = \frac{\bar{W}_0}{(1-\rho_1)} = \frac{0.3\left(\frac{1}{12} + 1.5^2\right)}{1 - 0.36} = 1.09375 \text{ mins}$$

$$\bar{W}_{q2} = \frac{\bar{W}_0}{(1-\rho_1)(1-\rho_1-\rho_2)} = \frac{0.3\left(\frac{1}{12} + 1.5^2\right)}{(1-0.36)(1-0.36-0.54)} = 10.9375 \text{ mins}$$

6. Ejercicio LO 4.8 (Chew, 1997)

(a) Para obtener el resultado, tenemos aquí un caso especial de (4.101) donde $k = 2$, $L_{qi} = 0$ ($i = 1,2$), y $\mu 1 = \mu$. Por lo tanto,

$$\bar{W}_q = \bar{W}_0 + \frac{1}{\mu}\bar{M}_1 = \bar{W}_0 + \frac{1}{\mu}\lambda\bar{W}_q = \bar{W}_0 + \rho\bar{W}_q \quad \Rightarrow \quad \bar{W}_q = \frac{\bar{W}_0}{(1-\rho)}$$

Como $\bar{W}_0 = \frac{\lambda\left(\frac{1}{\mu^2}+\sigma_s^2\right)}{2}$,

$$\bar{W}_q = \frac{\lambda\left(\frac{1}{\mu^2}+\sigma_s^2\right)}{2(1-\rho)}$$

(b) La ecuación análoga a (4.101) viene dada por

$$\bar{W}_{qk} = \bar{W}_0 + \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{m\mu}\bar{L}_{qi} + \sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{m\mu}\bar{M}_i\,,$$

donde $\bar{L}_{qi} = \lambda_i\,\bar{W}_{qi}$ y $\bar{M}_i = \lambda_i\ \ \bar{W}_{qk}$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \bar{W}_{qk} &= \bar{W}_0 + \sum_{i=1}^{k}\rho_i\bar{W}_{qi} + \sum_{i=1}^{k-1}\rho_i\bar{W}_{qk} \\ \Rightarrow \bar{W}_{qk} &= \frac{\bar{W}_0 + \sum_{i=1}^{k}\rho_i\bar{W}_{qi}}{1-\sum_{i=1}^{k}\rho_i}, \quad k = 1,\dots,r \end{aligned} \tag{4}$$

Si se resuelve, (4) da recurrentemente:

$$\bar{W}_{qk} = \frac{\bar{W}_0}{(1-a_{k-1})(1-a_k)}, \quad k = 1,2,\cdots,r$$

Donde $a_k \equiv \sum_{i=1}^{k}\rho_i$.