1. Problema 4.12 LO (Pinker, 1994; Kang, 2001)

El aeropuerto se puede modelar como un sistema de colas M/G/1 con distribución uniforme de tiempo de servicio $E[S]$ = 60 seg y σ^2_S = 48 seg^2.

(a) El coste anual que suponen para las líneas aéreas las demoras en horas punta se calcula mediante la fórmula:

$$C_A = c_A \lambda_A W_q \times 1000$$

, donde:

- C_A es el coste medio de 1 minuto de espera para las aeronaves comerciales = 12$/min / avión,
- λ_A es la tasa de llegada de aeronaves comerciales = 40 aviones / hr

Para calcular W_q empleamos la fórmula Pollaczek - Khintchine (4.81) para sistemas de colas M/G/1.

$$W_q = \frac{\lambda(1/\mu^2 + \sigma_S^2)}{2(1-\rho)}$$

, donde

- $\lambda = 55$ aviones/hr $= \frac{11}{12}$ aviones /min,
- $\mu = \frac{1}{E[S]} = 1$ avión/min,
- $\sigma_S^2 = 48 \text{ sec}^2 = \frac{1}{75} \text{ min}^2$,
- $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{11}{12}$.

Obsérvese que estamos utilizando λ (no λ_A) para calcular W_q. Introduciendo en la fórmula los valores numéricos, tenemos que W_q = 5.573 minutos. Por lo tanto

C_A = 12$ / min / avión x 40 aviones / hora x 5,573 minutos x 1000 horas = 2.675.200$

(b) Llamaremos f al incremento en las tasas de aterrizaje. Luego la tasa de llegada de aeronaves en general vendrá expresada por 15 – 15/60 f por hora. Dado que la tasa de llegada de aeronaves comerciales no se ve afectada por los incrementos en las tasas de aterrizaje, la tasa total de llegadas λ nos vendrá dada por

$$\lambda = \left(40 + 15 - \frac{15}{60}f\right) \text{ por hora} = \left(\frac{11}{12} - \frac{1}{240}f\right) \text{ por minuto}$$

El coste anual para aeronaves comerciales durante horas punta estaría entonces compuesto por las tasas de aterrizaje y el coste de espera (demora).

$$\begin{aligned} C_A &= (\lambda_A f + c_A \lambda_A W_q) \times 1000 \\ &= \left(\lambda_A f + c_A \lambda_A \frac{\lambda(1/\mu^2 + \sigma_S^2)}{2(1-\rho)} \right) \times 1000 \\ &= \left(\lambda_A f + c_A \lambda_A \frac{(\frac{11}{12} - \frac{1}{240} f)(1/\mu^2 + \sigma_S^2)}{2(\frac{1}{12} + \frac{1}{240} f)} \right) \times 1000 \end{aligned}$$

A continuación queremos hallar el valor de f que minimice C_A.

$$\frac{dC_A}{df} = \left(\lambda_A + c_A \lambda_A \frac{-\frac{1}{240}(1/\mu^2 + \sigma_S^2)(\frac{2}{12} + \frac{2}{240} f) - (\frac{11}{12} - \frac{1}{240} f)(1/\mu^2 + \sigma_S^2)\frac{2}{240}}{4(\frac{1}{12} + \frac{1}{240} f)^2} \right) \times 1000 = 0\,.$$

$$\Rightarrow \quad 1 - c_A \frac{\frac{1}{120}(1/\mu^2 + \sigma_S^2)}{4(\frac{1}{12} + \frac{1}{240} f)^2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad 4\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{240} f \right)^2 = \frac{c_A}{120}(1/\mu^2 + \sigma_S^2) = \frac{12}{120}\left(1 + \frac{1}{75}\right) = \frac{76}{750}$$

$$\Rightarrow \quad f = 18.2$$

De donde se deduce que la cantidad óptima de incremento de las tasas de aterrizaje será f = 18,2$ por aeronave.

2. (Kang, 2001)

(a) Se trata de un sistema de colas M/D/1, en el que

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = 36/\text{hr y } \mu = \frac{1}{1.5}/\text{min} = 40/\text{hr}$$

Al ser $\sigma^2_S = 0$; en este sistema de colas el valor de W_q nos viene dado por (véase fórmula de Pollaczek - Khintchine (4.81))

$$W_q = \frac{\frac{\lambda}{\mu^2}}{2(1 - \frac{\lambda}{\mu})}$$

El coste total de las demoras en este sistema es

$$C = c\lambda W_q = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda} c_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda} c_2 \right) \lambda W_q = (\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2) W_q$$

Por lo que el coste marginal de demora ocasionado por cada cliente adicional del tipo 1 viene dado por

$$MC_1 = \frac{dC}{d\lambda_1} = c_1 W_q + (\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2)\frac{dW_q}{d\lambda_1}$$

El primer término de la derecha es lo que se conoce como el *coste interno* que experimenta el cliente adicional del tipo 1, y el segundo término es el *coste externo* que ese cliente ocasiona al sistema. La derivada de W_q con respecto a λ_1 se calcula del siguiente modo:

$$\frac{dW_q}{d\lambda_1} = \frac{dW_q}{d\lambda} \cdot \frac{d\lambda}{d\lambda_1} = \frac{\frac{1}{\mu^2}2(1-\frac{\lambda}{\mu}) + \frac{\lambda}{\mu^2}\frac{2}{\mu}}{4(1-\frac{\lambda}{\mu})^2} \cdot 1 = \frac{\frac{2}{\mu^2}}{4(1-\frac{\lambda}{\mu})^2}$$

El coste interno asociado a un cliente adicional (marginal) del tipo 1 es

$$c_1 W_q = (2 \times 60) \times \frac{36/40^2}{2(1-\frac{36}{40})} = \$13.5$$

Y el coste externo asociado a un cliente adicional del tipo 1 es

$$\begin{aligned}(\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2)\frac{dW_q}{d\lambda_1} &= (\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2)\frac{\frac{2}{\mu^2}}{4(1-\frac{\lambda}{\mu})^2} \\ &= \big(18(2 \times 60) + 18(3 \times 60)\big)\frac{\frac{2}{40^2}}{4(1-\frac{36}{40})^2} = \$168.75\end{aligned}$$

Del mismo modo, el coste marginal por demora que ocasiona un cliente adicional del tipo 1 nos lo indica

$$MC_2 = \frac{dC}{d\lambda_2} = c_2 W_q + (\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2)\frac{dW_q}{d\lambda_2}$$

Y el coste interno asociado a un cliente marginal del tipo 2 es

$$c_2 W_q = (3 \times 60) \times \frac{36/40^2}{2(1-\frac{36}{40})} = \$20.25$$

Hay que tener en cuenta que, como

$$\frac{d\lambda}{d\lambda_2} = \frac{d\lambda}{d\lambda_1}, \; \frac{dW_q}{d\lambda_2} = \frac{dW_q}{d\lambda_1}$$

el coste externo asociado a un cliente marginal del tipo 2 es

$$(\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2)\frac{dW_q}{d\lambda_2} = (\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2)\frac{dW_q}{d\lambda_1} = \$168.75$$

Los dos costes externos son idénticos. Ello se debe a que el tiempo de servicio de los clientes del tipo 1 es el mismo que el de los clientes del tipo 2. Cuando los tiempos de servicio son diferentes los costes externos no coinciden, por lo general.

(b) Aunque el tiempo de servicio para cada tipo de cliente es constante, el sistema de colas ya no es del tipo M/D/1, puesto que el tiempo de servicio de los clientes del tipo 1 es distinto del de los del tipo 2. Podemos considerar este sistema como un sistema de colas M/G/1 en el que la distribución del tiempo de servicio viene dado por la siguiente función de masa de probabilidad (FMP).

$$p_S(s) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & s = 1\text{minuto} \,, \\ \frac{1}{2}, & s = 2 \text{ minutos.} \end{cases}$$

El coste previsto de espera total nos viene dado por

$$C = (\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2) W_q = (\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2) \frac{\lambda(1/\mu^2 + \sigma_S^2)}{2(1-\rho)} \,.$$

Dado que $\frac{1}{\mu^2} + \sigma_S^2 = E[S]^2 + \sigma_S^2 = E[S^2]$, C puede reformularse como

$$C = (\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2) \frac{\lambda E[S^2]}{2(1-\rho)} \,.$$

Tenemos $\mu = \frac{1}{E[S]} = \frac{1}{1.5}$ clientes/min $= 40$ clientes/hora, $E[S^2] = \frac{5}{2}$ min$^2 = \frac{5}{7200}$ hr^2 y $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{36}{40}$. Tenemos entonces

$$C = \big(18(2 \times 60) + 18(3 \times 60)\big) \frac{36(\frac{5}{7200})}{2(1 - \frac{36}{40})} = \$675 \text{ por hora.}$$

(c) El coste total previsto en este caso se expresa mediante

$$\begin{aligned} C &= \big(\lambda_1(x) + \lambda_2(x)\big)x + \big(\lambda_1(x) c_1 + \lambda_2(x) c_2\big) W_q \\ &= \big(\lambda_1(x) + \lambda_2(x)\big)x + \big(\lambda_1(x) c_1 + \lambda_2(x) c_2\big) \frac{\lambda E[S^2]}{2(1-\rho)} \end{aligned}$$

λ, $E[S^2]$ y ρ se calculan del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_1(x) + \lambda_2(x) \,, \\ E[S^2] &= \frac{\lambda_1(x)}{\lambda_1(x) + \lambda_2(x)} \left(\frac{1}{60}\right)^2 + \frac{\lambda_2(x)}{\lambda_1(x) + \lambda_2(x)} \left(\frac{2}{60}\right)^2 \,, \\ \rho &= \frac{\lambda}{\mu} = \lambda E[S] = \big(\lambda_1(x) + \lambda_2(x)\big) \left(\frac{\lambda_1(x)}{\lambda_1(x) + \lambda_2(x)} \cdot \frac{1}{60} + \frac{\lambda_2(x)}{\lambda_1(x) + \lambda_2(x)} \cdot \frac{2}{60} \right) \\ &= \frac{\lambda_1(x)}{60} + \frac{2\lambda_2(x)}{60} \,. \end{aligned}$$

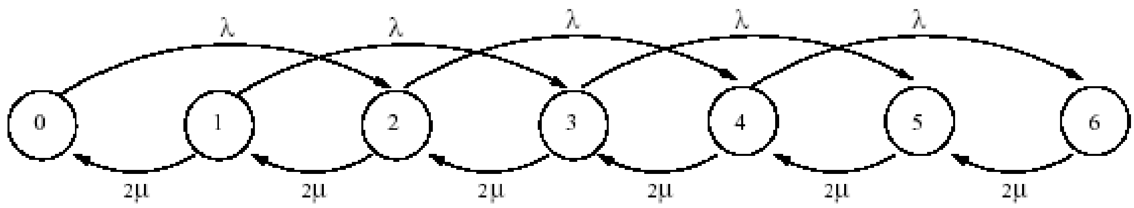
En consecuencia, el valor de C nos viene dado por

$$\boldsymbol{C} = \big(\lambda_1(x) + \lambda_2(x)\big)x + \big(120\lambda_1(x) + 180\lambda_2(x)\big)\frac{\big(\lambda_1(x) + \lambda_2(x)\big)\frac{\lambda_1(x)+4\lambda_2(x)}{3600(\lambda_1(x)+\lambda_2(x))}}{2(1 - \frac{\lambda_1(x)+2\lambda_2(x)}{60})}$$

$$= \big(\lambda_1(x) + \lambda_2(x)\big)x + \big(\lambda_1(x) + (1.5)\lambda_2(x)\big)\frac{\lambda_1(x) + 4\lambda_2(x)}{60 - \lambda_1(x) - 2\lambda_2(x)}\,.$$

3. (Kang, 2001)

(a) Podemos considerar que cada servicio se halla compuesto por dos fases de servicio, cuyas respectivas duraciones dependen de una distribución exponencial negativa de media $1/2\mu$. Llamaremos *n* a la variable de estado que indica el número de fases de servicio que hay que completar. Por tanto, el diagrama de transición entre estados nos viene dado por



Obsérvese que no hay "transición ascendente" (llegadas) desde el estado 5, ya que las llegadas desde ese estado vuelven hacia atrás.

(b) Podemos definir las ecuaciones de equilibrio "cortando los arcos" entre dos estados o bien aislando cada estado. Aplicando el primer método obtenemos:

$$\lambda P_0 = 2\lambda P_1$$
$$\lambda P_0 + \lambda P_1 = 2\lambda P_2$$
$$\lambda P_1 + \lambda P_2 = 2\lambda P_3$$
$$\lambda P_2 + \lambda P_3 = 2\lambda P_4$$
$$\lambda P_3 + \lambda P_4 = 2\lambda P_5$$
$$\lambda P_4 = 2\lambda P_6$$

Tenemos asimismo la ecuación de normalización:

$$\sum_{n=0}^{6} P_n = 1$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones obtenemos las probabilidades de estado estacionario P_n

(c) El número previsto de clientes que esperan en la peluquería L_q proviene de

$$L_q = 1(P_3 + P_4) + 2(P_5 + P_6)$$

Aplicando la ley de Little,

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda'}$$

Donde λ' es la tasa efectiva de llegada al sistema. Como $\lambda' = \lambda(P_0 + P_1 + P_2\ \ P_3 + P_4)$,

$$W_q = \frac{P_3 + P_4 + 2P_5 + 2P_6}{\lambda(P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4)}$$

También podemos obtener el valor de W_q mediante la siguiente ecuación:

$$W_q = W - \frac{1}{\mu} = \frac{L}{\lambda'} - \frac{1}{\mu}.$$

L, el número previsto de clientes en la peluquería, es

$$L = 1(P_1 + P_2) + 2(P_3 + P_4) + 3(P_5 + P_6)$$

De donde se deduce

$$\begin{aligned} W_q &= \frac{P_1 + P_2 + 2(P_3 + P_4) + 3(P_5 + P_6)}{\lambda'} - \frac{1}{\mu} \\ &= \frac{P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6}{\lambda'} + \frac{P_3 + P_4 + 2(P_5 + P_6)}{\lambda'} - \frac{1}{\mu} \end{aligned}$$

Hay que tener en cuenta que

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 = \rho = \frac{\lambda'}{\mu},$$

que es la probabilidad de que el servidor esté ocupado. De donde deducimos

$$\begin{aligned} W_q &= \frac{\lambda'/\mu}{\lambda'} + \frac{P_3 + P_4 + 2(P_5 + P_6)}{\lambda'} - \frac{1}{\mu} = \frac{P_3 + P_4 + 2(P_5 + P_6)}{\lambda'} \\ &= \frac{P_3 + P_4 + 2P_5 + 2P_6}{\lambda(P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4)}, \end{aligned}$$

que es el mismo resultado que habíamos calculado anteriormente.

(d) En principio, aplicando las probabilidades de estado estacionario, podemos calcular L mediante

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} n\,(P_{2n-1} + P_{2n})$$

No obstante, resulta mucho más práctico aplicar la fórmula de Pollaczek-Khintchine (4.79), ya que el sistema de colas ($M/E_2/1$) es un supuesto especial del sistema de colas M/G/1. Dado que $\rho = \lambda/\mu = 0{,}9$, y que $\sigma^2_S = 1/2\mu^2$ (véase sección 2.11.3 del libro de texto), tendremos

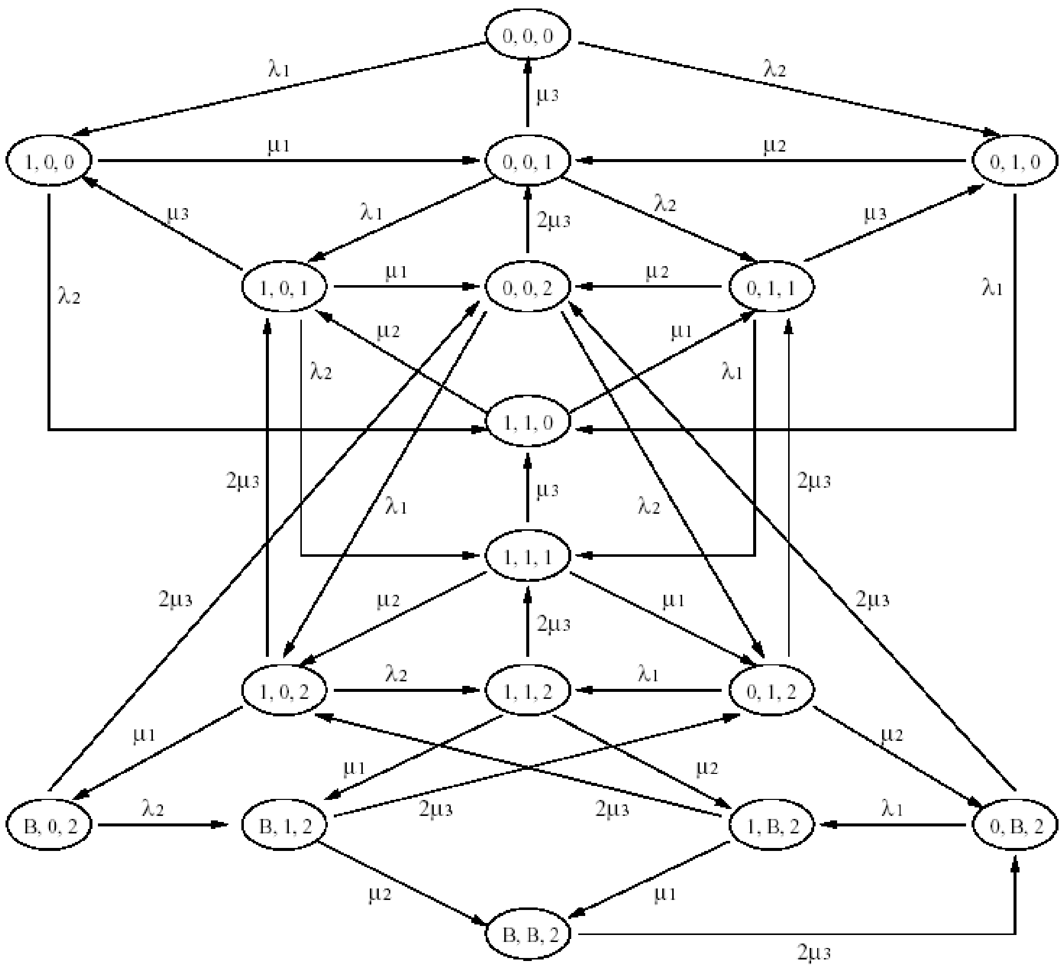
$$L = \rho + \frac{\rho^2 + \lambda^2\sigma_S^2}{2(1-\rho)} = 0.9 + \frac{0.9^2 + (0.9\mu)^2(1/2\mu^2)}{2(1-0.9)} = 6.975$$

4. Problema 4.13 LO (Kang, 2001)

Partimos de que la capacidad de la cola que se halla por delante de Q.S es cero. Los estados vienen representados por el triplete (*i, j, k*), donde *i, j* y *k* indican el número de clientes que hay en Q.S. 1, Q.S.2 y Q.S.3, respectivamente.

Cuando un cliente sale de Q.S.1 o de Q.S.2, quedará "bloqueado" si los dos servidores de Q.S.3 se encuentran ocupados. Para resolver este caso, definimos $i = B$ (o bien $j = B$) siempre que un cliente queda bloqueado.

Sabiendo que $i \in \{0,1,B\}$, $j \in \{0,1,B\}$ y $k \in \{0,1,2\}$, construimos el diagrama de transición entre estados. Téngase en cuenta que la "transición descendente" (es decir, la finalización del servicio) desde el estado (B,B,2) lleva al estado (0,B,2), ya que un cliente de Q.S 1 tendrá prioridad sobre uno de Q.S. 2 cuando ambos se hallan bloqueados.



Las ecuaciones de equilibrio de este sistema de colas son:

$$
\begin{aligned}
(\lambda_1 + \lambda_2)P_{000} &= \mu_3 P_{001} \\
(\lambda_2 + \mu_1)P_{100} &= \lambda_1 P_{000} + \mu_3 P_{101} \\
(\lambda_1 + \mu_2)P_{010} &= \lambda_2 P_{000} + \mu_3 P_{011} \\
(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_3)P_{001} &= \mu_1 P_{100} + \mu_2 P_{010} + 2\mu_3 P_{002} \\
(\lambda_2 + \mu_1 + \mu_3)P_{101} &= \lambda_1 P_{001} + \mu_2 P_{110} + 2\mu_3 P_{102} \\
(\lambda_1 + \mu_2 + \mu_3)P_{011} &= \lambda_2 P_{001} + \mu_1 P_{110} + 2\mu_3 P_{012} \\
(\lambda_1 + \lambda_2 + 2\mu_3)P_{002} &= \mu_1 P_{101} + \mu_2 P_{011} + 2\mu_3 P_{B02} + 2\mu_3 P_{0B2} \\
(\mu_1 + \mu_2)P_{110} &= \lambda_1 P_{010} + \lambda_2 P_{100} + \mu_3 P_{111} \\
(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)P_{111} &= \lambda_1 P_{011} + \lambda_2 P_{101} + 2\mu_3 P_{112} \\
(\lambda_2 + \mu_1 + 2\mu_3)P_{102} &= \lambda_1 P_{002} + \mu_2 P_{111} + 2\mu_3 P_{1B2} \\
(\lambda_1 + \mu_2 + 2\mu_3)P_{012} &= \lambda_2 P_{002} + \mu_1 P_{111} + 2\mu_3 P_{B12} \\
(\mu_1 + \mu_2 + 2\mu_3)P_{112} &= \lambda_1 P_{012} + \lambda_2 P_{102} \\
(\mu_2 + 2\mu_3)P_{B12} &= \lambda_2 P_{B02} + \mu_1 P_{112} \\
(\mu_1 + 2\mu_3)P_{1B2} &= \lambda_1 P_{0B2} + \mu_2 P_{112} \\
(\lambda_2 + 2\mu_3)P_{B02} &= \mu_1 P_{102} \\
(\lambda_1 + 2\mu_3)P_{0B2} &= \mu_2 P_{012} + 2\mu_3 P_{BB2} \\
2\mu_3 P_{BB2} &= \mu_1 P_{1B2} + \mu_2 P_{B12}
\end{aligned}
$$

Y conocemos asimismo la ecuación de normalización: $P_{000} + P_{100} + P_{010} + P_{001} + P_{101} + P_{011} + P_{002} + P_{110} + P_{111} + P_{102} + P_{012} + P_{112} + P_{B12} + P_{1B2} + P_{B02} + P_{0B2} + P_{BB2} = 1$